

УДК 517.95+517.958

РАЗДЕЛЕНИЕ ДИНАМИК В СИСТЕМАХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ С РЕЛАКСАЦИЕЙ¹

© 2008 В.В.Палин²

Работа посвящена рассмотрению задачи Коши для гиперболической регуляризации линеаризованной системы законов сохранения. Исследован вопрос о том, когда можно выделить инвариантное многообразие специальных решений, которое является притягивающим. Ответ на этот вопрос получен в виде условий на матрицу системы и начальные данные.

Ключевые слова: инвариантное многообразие решений, проекция Чепмена—Энскога, гиперболическая регуляризация.

Введение

Изучению математических вопросов гиперболических регуляризаций систем законов сохранения (системы законов сохранения с релаксацией) посвящено много работ как российских, так и зарубежных авторов. Прежде всего это касается исследования феномена релаксации [4], в частности вопросов устойчивости и сингулярного предела при стремлении времени релаксации к нулю в работах С. Bardos, С. D. Levermore [1–2], R. E. Caffish, G. C. Papanicolaou [3], G. Q. Chen, H. Frid [4], E. Yu. Panov [5] для систем вида:

$$\partial_t u_i + \operatorname{div}_x f^i(u, v) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\partial_t v_k + \operatorname{div}_x g^k(u, v) + b^k(u)v = 0, \quad k = m + 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^{N-m}$, b — матрица релаксации порядка $(N - m) \times (N - m)$, потоки

$$f^i(u, v) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m; \quad g^k(u, v) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, \dots, N - m,$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Е.В.Радкевичем.

²Палин Владимир Владимирович, кафедра дифференциальных уравнений Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1.

где u — консервативные переменные, v — неравновесные переменные, m — число консервативных переменных. Одна из проблем кинетики неравновесных процессов [4] связана с недостаточной информацией о начально-краевых данных для большей части неравновесных переменных, которые не имеют интуитивного физического смысла — их нельзя определить из эксперимента. К тому же, число неравновесных переменных настолько велико, что числа граничных условий, полученных из физических соображений, недостаточно для постановки смешанной задачи [5], поэтому приходится считать начально — краевые данные большей части неравновесных переменных (моментов высших порядков) произвольными. Английскими физиками Чепменом и Энскогом [3] была выдвинута гипотеза, что для "физически корректных" моделей механики сплошных сред влияние моментов высшего порядка "несущественно". Физическая корректность задачи определяется рядом постулатов, на рассмотрении которых мы не будем останавливаться. Определим, в каком смысле понимать, что влияние моментов высшего порядка "несущественно". В работе [6] предложена математическая формулировка гипотезы Чепмена и Энскога в терминах проекции:

1. **Проекция.** Существует операторное уравнение состояния

$$v = Qu, \quad (3)$$

(проекция в фазовое пространство консервативных переменных) выражающее неравновесные переменные через консервативные, замыкающее регулируемую систему (1) законов сохранения

$$\partial_t w + \partial_x f(w, Qu(w)) = 0. \quad (4)$$

При этом, мы остаемся в классе гиперболических систем с релаксацией (возможно псевдодифференциальных) и решения w задачи Коши для усеченной системы (4) с начальными данными

$$w|_{t=0} = w^0,$$

определяют инвариантное многообразие $\mathcal{M}_{\text{ChEns}}$ специальных решений задачи Коши для полной системы (1):

$$U_{\text{ChEns}} = (w, Qw).$$

Это инвариантное многообразие является притягивающим, т.е существует уравнение коррекции

$$w_0 = \mathcal{T}(u_0, v_0)$$

данных Коши (u_0, v_0) полной системы (1), определяющее данные Коши для усеченной системы (4), так что

$$U = U_{\text{Ch}} + U_{\text{Cor}} + U_H,$$

где $U_{\text{Cor}} \in \mathcal{M}_{\text{ChEns}}$ — решение системы (1), определяющее поправку от неравновесных переменных, и в некоторой норме

$$\|U_H\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Более того, если в фазовом пространстве консервативных переменных

$$w \rightarrow 0, \quad \text{когда} \quad t \rightarrow \infty,$$

то невязка U_H стремится к нулю быстрее чем U_{ChEns} .

2. Разделение динамик. Неприводимые проекции (3) определяют на больших временах основные динамики моделируемого неравновесного процесса.

Целью настоящей статьи является формулировка условий на линеаризованную систему (1)–(2), при которых верна гипотеза Чепмена–Энскога. Статья построена по следующему плану. В начале статьи обсуждается вопрос об условиях на линеаризованную задачу, при которых существует операторное уравнение состояния (3), и решение допускает представление в виде суммы трех слагаемых. Далее вводится определение корректности по Чепмену–Энскогу и формулируются достаточные условия на класс начальных данных, при которых невязка U_H стремится к нулю быстрее, чем U_{ChEns} .

Операторное уравнение состояния и разложение решения в сумму трех слагаемых

Будем рассматривать задачу Коши для линеаризованной одномерной системы (1)–(2) в виде

$$\partial_t u + \mathcal{A} \partial_x u + B u = 0. \quad (5)$$

В статье [7] показано, что существование операторного уравнения состояния (3) для такой системы эквивалентно существованию решения для матричного квадратного уравнения

$$P_{21} \Lambda_{12} P_{21} - \Lambda_{22} P_{21} + P_{21} \Lambda_{11} - \Lambda_{21} = 0, \quad (6)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} = \mathcal{A} i \xi + B,$$

блок Λ_{11} — квадратная матрица размера $m \times m$. Также верно следующее утверждение:

Теорема 1: Пусть $\det(\Lambda) \neq 0$. Пусть, кроме того, найдутся векторы $v_1, \dots, v_m$ такие, что:

1. $V = \text{Lin}\{v_j\}_1^m$ — собственное подпространство матрицы Λ , т.е. $\Lambda V = V$.
2. Векторы $v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, \dots, e_N$ образуют базис.

Тогда квадратное матричное уравнение (6) разрешимо и наоборот.

Заметим также, что любое P_{21} — решение квадратного матричного уравнения (6), соответствующее матрице Λ , — является также решением того же уравнения, соответствующего матрице $\Lambda' = \Lambda + \gamma E$, где γ — произвольное число.

Заметим, что матричное уравнение Ляпунова

$$-M_{11} Q_{12} + Q_{12} M_{22} - M_{12} = 0 \quad (7)$$

является частным случаем уравнения (6), когда квадратичная часть строго равна нулю. Отсюда вытекает следующая теорема:

Теорема 2: Пусть $\det(M_{11}) \neq 0$, $\det(M_{22}) \neq 0$, матрица

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$$

не имеет собственных значений λ таких, что после разбиения на блоки соответствующего размера собственный вектор для λ имеет вид $v_0 = \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ 0 \end{pmatrix}$, а соответствующий ему присоединенный некоторого порядка — вид $v_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}$, причем $v_{1,2} \neq 0$. Тогда существует решение Q_{12} уравнения (7), соответствующего матрицам M_{11} , M_{12} , M_{22} .

Доказательство: Будем рассматривать уравнение (7) как частный случай матричного квадратного уравнения (6). Тогда соответствующая этому уравнению матрица Λ получается из матрицы M перестановкой строк и столбцов:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} M_{22} & 0 \\ M_{12} & M_{11} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, так как $\det(M_{11}) \neq 0$, $\det(M_{22}) \neq 0$, то $\det(\Lambda) \neq 0$ и можно пользоваться теоремой 1. Из нее следует, что уравнение (7) разрешимо, если система векторов, получающаяся из жорданова базиса Λ удалением векторов вида $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$, задает базис собственного подпространства матрицы Λ .

Теперь докажем утверждение теоремы методом от противного. Пусть уравнение (7) не является разрешимым. Тогда найдутся собственное значение λ и соответствующий ему вектор $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ жорданова базиса матрицы Λ такие, что

$$\Lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix},$$

причем $w \neq 0$ и найдется $k \in \mathbb{N}$: $w \in \text{Ker}((M_{11} - \lambda E)^k)$. Но тогда

$$M \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(M - \lambda E)^k \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что собственному значению λ матрицы M соответствуют собственный вектор вида $\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и присоединенный вектор некоторого порядка вида $\begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$, причем $v_1 \neq 0$. А это противоречит условиям теоремы, что и завершает доказательство.

Лемма 1: Пусть обратимая матрица S разбита на блоки S_{ij} , $i, j = 1, 2$, причем матрицы S_{11}, S_{22} — квадратные. Пусть также $FS = SF = E$ и матри-

ца F разбита на блоки того же размера. Тогда если $S_{11} = E$, то матрица F_{22} обратима.

Доказательство: Предположим противное. Т.к. $FS = E$, то

$$F_{21} + F_{22}S_{21} = 0. \quad (8)$$

Т.к. F_{22} необратима, то найдется такая строка $h \neq 0$, что $hF_{22} = 0$. Отсюда с помощью (8) получаем, что $hF_{21} = 0$. Но тогда последние строки матрицы F линейно зависимы: найдется строка v такая, что $v \neq 0$, $vF = 0$. Таким образом, матрица F необратима. Но матрица F — обратная к матрице S — значит, она обратима. Следовательно, получено противоречие.

Теорема 3: Пусть матрица Λ разбита на блоки Λ_{ij} , $i, j = 1, 2$. Тогда матричное квадратное уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда существует матрица S , удовлетворяющая одновременно следующим трем условиям:

1. Матрица S обратима;
2. $S_{11} = E$;
3. $(S^{-1}\Lambda S)_{21} = 0$.

Доказательство: Пусть сначала существует матрица S , удовлетворяющая трем указанным условиям. Обозначим $F = S^{-1}$. Тогда имеем

$$F_{21} + F_{22}S_{21} = 0,$$

$$F_{21}(\Lambda_{11} + \Lambda_{12}S_{21}) + F_{22}(\Lambda_{21} + \Lambda_{22}S_{21}) = 0.$$

Выражая F_{21} из первого уравнения и подставляя во второе, получаем:

$$F_{22}(-S_{21}(\Lambda_{11} + \Lambda_{12}S_{21})) + F_{22}(\Lambda_{21} + \Lambda_{22}S_{21}) = 0.$$

Заметим, что матрица S удовлетворяет условиям леммы 1. Отсюда

$$(-S_{21}(\Lambda_{11} + \Lambda_{12}S_{21})) + (\Lambda_{21} + \Lambda_{22}S_{21}) = 0,$$

т.е. матрица S_{21} удовлетворяет уравнению (6).

Пусть теперь уравнение (6) разрешимо. Положим

$$S_{11} = E, \quad S_{12} = 0, \quad S_{21} = P_{21}, \quad S_{22} = E.$$

Легко проверить, что в этом случае существует обратная матрица

$$S^{-1} = 2E - S.$$

Построенная матрица S удовлетворяет первым двум условиям. Вычисляя $(S^{-1}\Lambda S)_{21}$, получаем

$$\begin{aligned} (S^{-1}\Lambda S)_{21} &= F_{21}(\Lambda_{11} + \Lambda_{12}S_{21}) + F_{22}(\Lambda_{21} + \Lambda_{22}S_{21}) = \\ &= (-P_{21})(\Lambda_{11} + \Lambda_{12}P_{21}) + (\Lambda_{21} + \Lambda_{22}P_{21}) = 0, \end{aligned}$$

так как P_{21} — решение (6). Таким образом, третье условие на матрицу S также выполнено и теорема полностью доказана.

Таким образом, существование операторного уравнения состояния эквивалентно приведению исходной системы к блочному виду, такому, что блок

$(S^{-1}\Lambda S)_{21} = 0$. Ответ на вопрос о том, когда матрицу Λ можно с помощью некоего дополнительного преобразования привести к блочно-диагональному виду, дает следующая теорема.

Теорема 4: Пусть матрица Λ такова, что существует базис $v_1, \dots, v_m$ собственного подпространства V , и $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_m, e_{m+1}, \dots, e_N\} = \mathbb{R}^N$, V не может быть расширено до собственного подпространства матрицы Λ размерности $m+1$ путем добавления к базису $v_1, \dots, v_m$ присоединенного вектора матрицы Λ . Тогда существуют матрицы P_{21} , Q_{12} такие, что

$$\begin{pmatrix} E & -Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -P_{21} & E \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} E & 0 \\ P_{21} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Доказательство: Действительно, описанная в условии матрица Λ удовлетворяет условиям теоремы 1, откуда следует существование решения P_{21} матричного уравнения (6). Это, в свою очередь, согласно теореме 3 означает, что матрица

$$S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ P_{21} & E \end{pmatrix}$$

приводит Λ к блочно-верхнетреугольному виду, т.е.

$$S^{-1}\Lambda S = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}.$$

Далее, уравнение

$$\begin{pmatrix} E & -Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix}$$

эквивалентно уравнению (7) на матрицу Q_{12} . Осталось заметить, что если подпространство V , задающее решение (6), не может быть расширено до собственного подпространства матрицы Λ путем добавления присоединенного вектора, то матрица $S^{-1}\Lambda S$ не имеет собственных значений таких, что соответствующий им собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$, а некоторый

присоединенный вектор — вид $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $v_2 \neq 0$. Таким образом, для матрицы $S^{-1}\Lambda S$ выполнены условия теоремы 2, откуда следует разрешимость соответствующего уравнения (7), а значит, существование матрицы Q_{12} .

Пусть матрица Λ удовлетворяет условиям теоремы 4. Сделаем замену переменных в образах Фурье: положим $U = S^{-1}u$. Тогда решение задачи Коши (5) с начальными данными

$$U|_{t=0} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{V}_0 \end{pmatrix}$$

в образах Фурье может быть записано в виде

$$U = e^{-Mt} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{V}_0 \end{pmatrix},$$

где $M = S^{-1} \Lambda S$. Далее, согласно теореме 4, матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} E & Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} E & Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \exp \left(- \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} t \right) \begin{pmatrix} E & -Q_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{V}_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-M_{11}t} \mathcal{U}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{-M_{11}t} Q_{12} \mathcal{V}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{12} e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \\ e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-M_{11}t} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-M_{11}t} \begin{pmatrix} -Q_{12} \mathcal{V}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{12} e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \\ e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} U_{\text{Ch}} &= e^{-M_{11}t} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ U_{\text{Cor}} &= e^{-M_{11}t} \begin{pmatrix} -Q_{12} \mathcal{V}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ U_{\text{H}} &= \begin{pmatrix} Q_{12} e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \\ e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда решение задачи Коши представлено в виде суммы трех слагаемых:

$$U = U_{\text{Ch}} + U_{\text{Cor}} + U_{\text{H}},$$

причем каждое из слагаемых является решением уравнения (5) с некоторыми начальными данными, первое слагаемое соответствует проекции в фазовое пространство консолидированных переменных, второе является поправочным слагаемым, которое описывает влияние начальных данных для неравновесных переменных, а третье является остаточным.

Определение: Будем говорить, что проектор P удовлетворяет условию L_2 -корректности по Чепмену—Энскогу в классе $\mathcal{H} = \{(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)\}$ начальных данных, если для всех начальных данных $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0) \in \mathcal{H}$ найдется $T_0 > 0$ такое, что для всех $t > T_0$ выполнена оценка

$$\frac{\|U_{\text{H}}\|(t)}{\|U_{\text{Ch}}\|(t)} \leq K e^{-\delta t}, \quad t > T_0, \quad (9)$$

где $K, \delta > 0$ — некоторые константы.

Условие щели и существование притягивающего многообразия

Найдем условия, при которых выполнена оценка

$$\|U_{\text{H}}\| = o(\|U_{\text{Ch}}\|), \quad t \rightarrow \infty,$$

где под знаком $\|f\|$ понимается норма f в пространстве L_2 . Для этого докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2: Пусть матрица Λ зависит от параметра ξ полиномиально и найдется такое $k_0 > 0$, что $\forall \xi : |\xi| > k_0$ все собственные значения матрицы Λ являются алгебраически однократными и на них выполнена оценка

$$|\lambda(\xi)| \leq C_1(1 + |\xi|)^{d_1},$$

где C_1, d_1 — некоторые константы. Пусть вектор v — собственный для Λ . Тогда при $|\xi| > k_0$ верно неравенство:

$$\frac{\max\{|e_i^T v|\}}{\min\{|e_i^T v| \neq 0\}} \leq C_2(1 + |\xi|)^{d_2}, \quad (10)$$

где C_2, d_2 — некоторые константы.

Доказательство: Поскольку собственные векторы определены с точностью растяжения, то можно считать, что $\min\{|e_i^T v| \neq 0\} = 1$. Тогда неравенство (10) может быть переписано в виде

$$\max\{|e_i^T v|\} \leq C_2(1 + |\xi|)^{d_2}.$$

Доказательство этого неравенства будем вести от противоположного. Разобьем все множество $e_i^T v$ координат вектора v на два подмножества — т.е., для которых требуемая оценка верна (в т.ч. все нулевые координаты), и те, которые растут быстрее, чем любая степень $|\xi|$, при $\xi \rightarrow \infty$. Перенумеровав координаты, без ограничения общности можем считать, что $v = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, где для любой из координат вектора w_1 оценка верна, а для любой из координат w_2 — нет. Пусть вектор w_2 состоит из s координат. Заметим, что $s < N$, где N — размер матрицы Λ ; это связано с тем, что наименьшая по модулю ненулевая координата вектора v удовлетворяет требуемой оценке. Рассмотрим строку с номером $i < N - s + 1$. Обозначим l_i строку из первых $N - s$ элементов i -той строки матрицы Λ ; r_i — строку из оставшихся элементов. Так как вектор v — собственный для Λ , то $\exists \lambda: \Lambda v = \lambda v$. Отсюда

$$\begin{aligned} l_i w_1 + r_i w_2 &= \lambda e_i^T v, \\ r_i w_2 &= \lambda e_i^T v - l_i w_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее, так как $i < N - s + 1$, то координата $e_i^T v$ относится к вектору w_1 . Отсюда либо $r_i w_2 = 0$, либо функция от ξ , стоящая в левой части равенства (11), растет быстрее, чем функция, стоящая в правой части, что приводит к противоречию. Таким образом, противоречия с асимптотическим поведением не получается только в случае, когда $r_i w_2 = 0 \quad \forall i < N - s + 1$. В этом случае разобьем матрицу Λ на блоки:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix},$$

причем блок Λ_{11} — квадратная матрица размера $N - s$. Так как $r_i w_2 = 0 \quad \forall i < N - s + 1$, то

$$\Lambda_{12} w_2 = 0.$$

Отсюда и из равенства $\Lambda v = \lambda v$ получаем

$$\Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

т.е. вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \end{pmatrix} \neq 0$, не пропорциональный вектору v , является собственным вектором матрицы Λ , соответствующим собственному значению λ . Отсюда следует, что собственное значение λ не является однократным. Имеем противоречие.

Лемма 3: Пусть матрица Λ , зависящая от параметра ξ , определена при всех $\xi \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям теоремы 4. при всех $\xi \in \Xi$, где множество $\Xi = \mathbb{R} \setminus \Xi_-$, множество Ξ_- состоит из конечного числа сфер вида $|\xi| = \text{const}$. Тогда на множестве Ξ определены P_{21} , Q_{12} . Пусть матрицы $P_{21}(\xi)$, $Q_{12}(\xi)$ могут быть по непрерывности доопределены на множестве Ξ_- . Пусть, кроме того, матрица Λ зависит от ξ полиномиально, и найдется такое $k_0 > 0$, что $\forall \xi : |\xi| > k_0$ все собственные значения матрицы Λ являются алгебраически однократными и на них выполнена оценка

$$|\lambda(\xi)| \leq C_1(1 + |\xi|)^{d_1},$$

где C_1 , d_1 — некоторые константы. Тогда найдется $d_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполнена оценка:

$$|P_{21}| \leq K_1(1 + |\xi|)^{d_0},$$

$$|Q_{12}| \leq K_2(1 + |\xi|)^{5d_0},$$

где K_1 , K_2 — некоторые константы, под знаком $|A|$ понимается матричная норма A в L_∞ .

Доказательство: Докажем сначала оценку для P_{21} . Так как при $\xi \in \Xi$ матрица Λ обратима, то, записав часть жорданова базиса Λ , задающую базис V , по столбцам, получим матрицу $\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{pmatrix}$. Далее, матрица

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

задающая P_{21} , согласно [7] может быть представлена в виде $P = \Lambda^{-1}X$, где X — решение матричного уравнения $X^2 - \Lambda X = 0$. В свою очередь, матрица X имеет жорданов базис, который, будучи записан по столбцам, образует матрицу

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & E \end{pmatrix}.$$

Кроме того, согласно [7], жорданова нормальная форма для X содержит в себе только часть жордановой формы матрицы Λ и блок нулей. Отсюда следует оценка для X :

$$|X| \leq |C||\Lambda|C^{-1}.$$

Так как $P = \Lambda^{-1}X$, то

$$|P| \leq |\Lambda^{-1}| |C| |\Lambda| |C^{-1}|.$$

Заметим теперь, что для нормы обратной матрицы выполнено равенство

$$|C^{-1}| = \frac{1}{|\det(C)|} |\operatorname{cof}(C)|,$$

где $\operatorname{cof}(C)$ — матрица алгебраических дополнений. В свою очередь,

$$|\operatorname{cof}(C)| \leq |C|^{N-1}.$$

Отсюда получаем оценку для нормы матрицы P :

$$|P| \leq \frac{1}{|\det(\Lambda)| |\det(C)|} |\Lambda|^N |C|^N.$$

Далее, $|P_{21}| \leq |P|$. Отсюда находим

$$|P_{21}| \leq \frac{1}{|\det(\Lambda)| |\det(C)|} |\Lambda|^N |C|^N. \quad (12)$$

Заметим, что из обратимости Λ при всех $\xi \in \Xi$ следует, что определитель $\det(\Lambda)$ отделен от нуля при $|\xi| > k_0$. Так как матрица P_{21} может быть доопределена на множестве Ξ_- по непрерывности, то для всех ξ : $|\xi| \leq k_0$ выполняется оценка

$$|P_{21}| \leq K_{1,1},$$

где $K_{1,1}$ — некоторая константа. Если $|\xi| > k_0$, то воспользовавшись неравенством (12), получаем

$$|P_{21}| \leq K_{1,2} |\Lambda|^N \frac{1}{|\det(C)|} |C|^N.$$

Так как Λ зависит от ξ полиномиально, то отсюда имеем

$$|P_{21}| \leq K_{1,3} (1 + |\xi|)^{N_1} \frac{1}{|\det(C)|} |C|^N,$$

где N_1 — некоторая константа. Далее, так как при $|\xi| > k_0$ все собственные значения матрицы Λ — алгебраически однократные, то все векторы матрицы C — собственные. Так как собственные векторы определены с точностью до растяжения, то можно считать, что наименьшая по модулю ненулевая координата каждого из них равна 1. Но тогда $|\det(C)| \geq 1$, откуда

$$|P_{21}| \leq K_{1,3} (1 + |\xi|)^{N_1} |C|^N.$$

Применяя неравенство (10), отсюда получаем

$$|P_{21}| \leq K_{1,4} (1 + |\xi|)^{d_0},$$

и это неравенство выполнено для всех ξ таких, что $|\xi| > k_0$. Выбирая $K_1 = \max\{K_{1,1}, K_{1,4}\}$ получаем требуемую оценку на P_{21} .

Заметим теперь, что согласно теореме 4 матрица Q_{12} является решением уравнения Ляпунова (7), соответствующего матрице

$$M = S^{-1} \Lambda S,$$

где матрица

$$S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ P_{21} & E \end{pmatrix}.$$

Так как $S^{-1} = 2E - S$, $M^{-1} = S^{-1}\Lambda^{-1}S$, $|2E - S| = |S|$, то аналогично доказанному ранее, так как уравнение (7) является частным случаем уравнения (6), получаем оценку:

$$|Q_{12}| \leq \frac{1}{|\det(\Lambda)||\det(C)|} |\Lambda|^N |C|^N |S|^4,$$

откуда, т.к. $|S| \leq (1 + |P_{21}|)$, следует требуемая оценка для Q_{12} .

Обозначение 1: Наименьшее из всех $d_0 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих лемме 3, обозначим d_Λ .

Помимо приведенных ранее оценок, нам потребуется двусторонняя оценка для $|e^{-Mt}v|$, где под знаком $|\cdot|$ понимается норма в $L_\infty(\mathbb{R})$. Для сокращения формулировки, введем сначала несколько обозначений.

Обозначение 2: Пусть M — квадратная матрица, непрерывно зависящая от параметра ξ ; λ_j , $j = 1, \dots, s$ — ее собственные значения. Обозначим d_j максимальный размер жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ_j . Пусть, кроме того, λ_j упорядочены по возрастанию вещественной части, причем наименьшая из них равна $l(M)$, а наибольшая — $L(M)$, т.е.:

$$l(M) = \Re \lambda_1 \leq \Re \lambda_2 \leq \dots \leq \Re \lambda_s = L(M).$$

Обозначим также $d(M) = d_1$.

Перейдем теперь к лемме о двусторонней оценке.

Лемма 4: Пусть M — квадратная матрица, непрерывно зависящая от параметра ξ . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_0 > 0$ такое, что $\forall t > T_0$ выполнена оценка

$$e^{-L(M)t}|v| \leq |e^{-Mt}v| \leq \frac{1 + \varepsilon}{(d(M) - 1)!} |M|^{d(M)-1} e^{-l(M)t} t^{d(M)-1} |v|, \quad (13)$$

где под знаком $|A|$ понимается матричная норма A в $L_\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство: Начнем с оценки сверху. Пусть сначала жорданова нормальная форма матрицы M — одна клетка, соответствующая собственному значению λ . Тогда

$$e^{-Mt}v = e^{-Mt} \sum_{k=0}^{N-1} v_k h_k,$$

где N — размер матрицы M , $v_k \in \mathbb{C}$, h_k — векторы жорданова базиса M , перечисленные по порядку присоединения (т.е. вектор h_0 — собственный, h_1 — первый присоединенный и т.д.). Далее,

$$e^{-Mt}h_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} e^{-\lambda t} t^j h_{k-j},$$

откуда приходим к следующему представлению

$$e^{-Mt}v = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} t^j h_{k-j}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $T_0 > 0$, что для всех $t > T_0$:

$$|e^{-Mt}v| \leq (1 + \varepsilon) e^{-\Re \lambda t} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{1}{k!} v_k t^k h_0 \right|,$$

откуда следуют неравенства

$$|e^{-Mt}v| \leq \frac{1 + \varepsilon}{(N-1)!} e^{-\Re \lambda t} |v_{N-1} h_0| t^{N-1} \leq \frac{1 + \varepsilon}{(N-1)!} e^{-\Re \lambda t} |v| |h_0| t^{N-1}. \quad (15)$$

Далее, так как жорданов базис матрицы M определен с точностью до растяжения, то можно считать, что $|h_{N-1}| = 1$ (на самом деле, в последнем переходе это уже было использовано). Отсюда и из равенств $Mh_k = \lambda h_k + h_{k-1}$, а также того, что $|\lambda| \leq |M|$ следует, что $|h_{k-1}| \leq |M| |h_k|$. Отсюда получаем неравенство $|h_0| \leq |M|^{N-1} |h_{N-1}| = |M|^{N-1}$. Подставляя это в правую часть (15), получаем

$$|e^{-Mt}v| \leq \frac{1 + \varepsilon}{(N-1)!} e^{-\Re \lambda t} |M|^{N-1} t^{N-1} |v|.$$

Таким образом, в случае, когда матрице M соответствует всего одна жорданова клетка, оценка сверху для $|e^{-Mt}v|$ из неравенства (13) доказана. Если же матрице M соответствует несколько собственных значений (а, следовательно, и несколько жордановых клеток), то, воспользовавшись уже доказанной оценкой для каждой из жордановых клеток и выбирая достаточно большое $T_0 > 0$, получаем

$$\begin{aligned} |e^{-Mt}v| &\leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \left(\sum_{j=1}^s \frac{1}{j!} |M|^{d_j-1} e^{-\Re \lambda_j t} t^{d_j-1} \right) |v| \leq \\ &\leq \frac{1 + \varepsilon}{(d(M) - 1)!} |M|^{d(M)-1} e^{-L(M)t} t^{d(M)-1} |v|, \end{aligned}$$

т.е. получили правую половину оценки (13).

Аналогично для оценки снизу в случае, когда M соответствует одна жорданова клетка, из равенства (14) сразу получаем

$$|e^{-Mt}v| \geq e^{-\Re \lambda t} \left| \sum_{k=0}^{N-1} v_k h_k \right| = e^{-\Re \lambda t} |v|.$$

Из этого неравенства, точно так же, как и для оценки сверху, в случае нескольких жордановых клеток при $t > T_0 \gg 0$ получаем

$$|e^{-Mt}v| \geq \sum_{j=1}^s e^{-\Re \lambda_j t} |v| \geq e^{-L(M)t} |v|,$$

т.е. требуемую оценку снизу.

Для того, чтобы сформулировать условия существования притягивающего многообразия более кратко, нам потребуется еще одно обозначение.

Обозначение 3: Пусть $\Gamma(\xi)$ — конечное множество непрерывных функций $\gamma_1(\xi), \dots, \gamma_s(\xi)$ параметра ξ . Обозначим $l(\xi, \Gamma(\xi)) = \inf_s \{\Re \gamma_s(\xi) \mid \gamma_s(\xi) \in \Gamma(\xi)\}$, $l_0(\Gamma) = \inf_{\xi} l(\xi, \Gamma(\xi))$, $L(\xi, \Gamma(\xi)) = \sup_s \{\Re \gamma_s(\xi) \mid \gamma_s(\xi) \in \Gamma(\xi)\}$, $L_0(\Gamma) = \sup_{\xi} L(\xi, \Gamma(\xi))$.

Условие 1: Будем говорить, что для пары множеств $\Gamma_1(\xi)$, $\Gamma_2(\xi)$ выполнено жесткое условие щели, если

$$\exists \gamma > 0 : l_0(\Gamma_2) - L_0(\Gamma_1) \geq \gamma. \quad (16)$$

Перейдем теперь к формулировке и доказательству условий существования притягивающего многообразия.

Теорема 5: Пусть матрица Λ , соответствующая задаче (5), удовлетворяет условиям леммы 3. Пусть, кроме того, Γ_1 — множество всех собственных значений матрицы Λ , соответствующих задающему разделению динамик собственному подпространству V , Γ_2 — все остальные собственные значения Λ , и для Γ_1 , Γ_2 выполнено жесткое условие щели. Тогда, если $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)$ — образы Фурье от начальных данных — принадлежат множеству

$$\mathcal{H} = \{(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0) : \|\mathcal{U}_0\| \neq 0, (1 + |\xi|)^{5N_{\Lambda}} |M_{22}|^{d(M_{22})-1} \mathcal{V}_0 \in L_2(\mathbb{R})\},$$

т.е. начальные данные для неравновесных переменных достаточно гладкие, а начальные данные для консервативных переменных не равны нулю, то соответствующий разделению динамик проектор P удовлетворяет условию L_2 -корректности по Чепмену—Энскогу в классе $\mathcal{H}$ начальных данных. При этом для констант K , δ из определения L_2 -корректности по Чепмену—Энскогу верно следующее: K зависит от $\|\mathcal{U}_0\|$, $\|\mathcal{V}_0\|$; δ зависит от γ и свойств матрицы M .

Доказательство: Действительно,

$$\|U_H(t)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} Q_{12} e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \\ e^{-M_{22}t} \mathcal{V}_0 \end{pmatrix} \right\|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |1 + |Q_{12}|^2| e^{-M_{22}t} |\mathcal{V}_0|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда с помощью лемм 3 и 4 получаем:

$$\begin{aligned} \|U_H(t)\|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + K_2^2 (1 + |\xi|)^{10d_{\Lambda}}) \left(\frac{1 + \varepsilon}{(d(M_{22}) - 1)!} \right)^2 \times \\ &\quad \times |M_{22}|^{2d(M_{22})-2} e^{-2l(M_{22})t} t^{2d(M_{22})-2} |\mathcal{V}_0|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Далее, из условия (16) следует, что

$$\begin{aligned} e^{-l(M_{22})t} &\leq e^{-l_0(\Gamma_2)t} \leq e^{-\gamma t} e^{-L_0(\Gamma_1)t}, \\ e^{-L(M_{11})t} &\geq e^{-L_0(\Gamma_1)t}. \end{aligned}$$

Кроме того, из леммы 4 следует, что

$$\|U_{\text{Ch}}(t)\| \geq \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2L(M_{11})t} |\mathcal{U}_0|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Объединяя последние четыре неравенства, получаем

$$\left(\frac{\|U_{\text{H}}(t)\|}{\|U_{\text{Ch}}(t)\|} \right)^2 \leq \frac{e^{-2\eta t} t^{2d(M_{22})-2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2L_0(\Gamma_1)t} (1 + K_2^2(1 + |\xi|)^{10d_\Lambda}) \left(\frac{1 + \varepsilon}{(d(M_{22}) - 1)!} \right)^2 |\mathcal{V}_0|^2 d\xi}{\int_{\mathbb{R}} e^{-2L_0(\Gamma_1)t} |\mathcal{U}_0|^2 d\xi},$$

откуда, так как $L_0(\Gamma_1)$ не зависит от ξ , следует доказываемая оценка (9).

Ослабление жесткого условия щели. Условие согласования носителей для начальных данных

Предположим теперь, что жесткое условие щели (16) не выполнено. Попробуем выяснить, что можно сказать о существовании притягивающего многообразия в этом случае.

Условие 2: Будем говорить, что для пары множеств $\Gamma_1(\xi)$, $\Gamma_2(\xi)$ выполнено условие вырожденной щели, если

$$\forall \xi, \forall \lambda_1(\xi) \in \Gamma_1(\xi), \lambda_2(\xi) \in \Gamma_2(\xi) : \operatorname{Re}(\lambda_2(\xi)) \geq \operatorname{Re}(\lambda_1(\xi)). \quad (17)$$

Заметим, что это условие не является достаточным условием существования притягивающего многообразия. Для того, чтобы это показать, введем сначала несколько обозначений.

Обозначение 4: Пусть пара множеств $\Gamma_1(\xi)$, $\Gamma_2(\xi)$ собственных значений матрицы Λ удовлетворяет условию вырожденной щели. Множество значений Ξ параметра ξ представим в виде

$$\Xi = \Xi_I \sqcup \Xi_J \sqcup \Xi_e,$$

где Ξ_I — множество таких ξ , что для них неравенство (17) строгое; Ξ_J — множество таких ξ_J , что найдутся $\lambda_1(\xi_J) \in \Gamma_1(\xi_J)$, $\lambda_2(\xi_J) \in \Gamma_2(\xi_J)$, $\lambda_1(\xi_J) = \lambda_2(\xi_J)$; Ξ_e — все оставшиеся значения параметра.

Осталось заметить, что если $\Xi_J \neq \emptyset$, то при этом могут быть не выполнены условия теоремы 4, что означает отсутствие разделения динамик при $\xi \in \Xi_J$. При таких ξ нет представления решения задачи Коши в виде суммы трех слагаемых. Таким образом, условие вырожденной щели не является достаточным для существования проекции. Сформулируем условия на начальные данные задачи Коши, при которых из условия вырожденной щели следует существование проекции.

Условие 3: Пусть выполнено условие вырожденной щели, и пусть образы Фурье начальных данных $\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0$ таковы, что найдется множество $\Sigma_U \subset \text{supp} \mathcal{U}_0$ такое, что

$$\exists \gamma > 0 : \forall \xi_1 \in \Sigma_U, \forall \xi_2 \in \text{supp} \mathcal{V}_0 : l(\xi_2, \Gamma_2(\xi_2)) - L(\xi_1, \Gamma_1(\xi_1)) \geq \gamma. \quad (18)$$

В этом случае будем говорить, что для образов Фурье начальных данных $\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0$ выполнено условие согласования носителей.

Обозначение 5: Будем обозначать $\chi(z, A)$ характеристическую функцию множества A , зависящую от переменной z .

Перейдем теперь к формулировке и доказательству условий существования притягивающего многообразия, более слабых, чем условия, сформулированные в теореме 5.

Теорема 6: Пусть матрица Λ соответствует задаче (5), все ее собственные значения разбиты на два множества Γ_1 и Γ_2 , причем для этих множеств выполнено условие вырожденной щели. Пусть также множество собственных векторов, соответствующих Γ_1 , для всех $\xi \notin \Xi_J$ задает собственное подпространство V , удовлетворяющее теореме 4. Пусть, кроме того, найдется такое $k_0 > 0$, что $\forall \xi : |\xi| > k_0$ все собственные значения матрицы Λ являются алгебраически однократными и на них выполнена оценка

$$|\lambda(\xi)| \leq C_1(1 + |\xi|)^{d_1},$$

где C_1, d_1 — некоторые константы. Тогда, если $\mathcal{H}$ — множество образов Фурье начальных данных $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)$, для которых выполнено условие согласования носителей, а также начальные данные для неравновесных переменных достаточно гладкие, т.е.

$$(1 + |\xi|)^{5N_\Lambda} |M_{22}|^{d(M_{22})-1} \mathcal{V}_0 \in L_2(\Xi),$$

а для начальных данных для консервативных переменных выполнено условие $\|\mathcal{U}_0 \chi(\xi, \Sigma_U)\| \neq 0$, и, кроме того, $\text{supp} \mathcal{V}_0 \cap \Xi_J = \emptyset$, то соответствующий разделению динамик проектор P удовлетворяет условию L_2 -корректности по Чепмену—Энскому в классе $\mathcal{H}$ начальных данных. При этом для констант K, δ из определения L_2 -корректности по Чепмену—Энскому верно следующее: K зависит от $\|\mathcal{U}_0\|, \|\mathcal{V}_0\|$ и Σ_U ; δ зависит от γ, Σ_U и свойств матрицы M .

Доказательство: Для несущественных переменных, как и в теореме 5, имеем

$$\begin{aligned} \|U_H(t)\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (1 + K_2^2(1 + |\xi|)^{10d_\Lambda}) & \left(\frac{1 + \varepsilon}{(d(M_{22}) - 1)!} \right)^2 \times \\ & \times |M_{22}|^{2d(M_{22})-2} e^{-2l(M_{22})t} t^{2d(M_{22})-2} |\mathcal{V}_0|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Для консервативных переменных имеем

$$\|U_{\text{Ch}}\|(t) \geq \|U_{\text{Ch}} \chi(\xi, \Sigma_U)\|(t).$$

Далее, по лемме 4, заключаем, что

$$\|U_{\text{Ch}}\chi(\xi, \Sigma_U)\|(t) \geq \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2L(\xi, \Gamma_1(\xi))t} |\mathcal{U}_0\chi(\xi, \Sigma_U)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из условия (18) следует неравенство

$$l_0(\Gamma_2) - L_0(\Gamma_1, \Sigma_U) \geq \frac{\gamma}{2},$$

где $L_0(\Gamma_1, \Sigma_U) = \sup\{L(\xi, \Gamma_1(\xi)), \xi \in \Sigma_U\}$. Из этого и трех предыдущих неравенств получаем для консервативных переменных оценку

$$\|U_{\text{Ch}}\|(t) \geq \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2L_0(\Gamma_1, \Sigma_U)t} |\mathcal{U}_0\chi(\xi, \Sigma_U)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}},$$

и для несущественных переменных оценку

$$\begin{aligned} \|U_{\text{H}}\|^2(t) \leq e^{-\gamma t} t^{2d(M_{22})-2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2L_0(\Gamma_1, \Sigma_U)t} (1 + K_2^2(1 + |\xi|)^{10d_\Lambda}) \times \\ \times \left(\frac{1 + \varepsilon}{(d(M_{22}) - 1)!} \right)^2 |\mathcal{V}_0|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, так как $L_0(\Gamma_1, \Sigma_U)$ не зависит от ξ , $\|\mathcal{U}_0\chi(\xi, \Sigma_U)\| \neq 0$, то, разделив последнее неравенство на предпоследнее, получаем доказываемую оценку.

Ослабление жесткого условия щели. Равномерное условие вырожденной щели

Помимо описанного в предыдущем параграфе, существует и другой способ ослабления жесткого условия щели (16). Он заключается в наложении дополнительных требований не на класс начальных данных, как в случае условия согласования носителей, а на собственные значения матрицы Λ . При этом класс начальных данных остается максимально широким.

Как и в предыдущем параграфе, для того, чтобы сформулировать теорему о притягивающем многообразии с ослабленными условиями, сначала придется привести несколько определений и обозначений.

Обозначение 6: Разобьем множество Ξ_J — подмножество множества Ξ значений параметра ξ — на две части, соответствующие разным ситуациям:

$$\Xi_J = \Xi_K \sqcup \Xi_s,$$

где Ξ_K — множество ξ_K таких, что найдутся $\lambda_1(\xi_K) \in \Gamma_1(\xi_K)$, $\lambda_2(\xi_K) \in \Gamma_2(\xi_K)$, причем $\lambda_1(\xi_K) = \lambda_2(\xi_K)$ и собственному значению $\lambda_1(\xi_K)$ соответствует хотя бы один присоединенный вектор; Ξ_s — множество ξ_s таких, что найдутся

$\lambda_1(\xi_s) \in \Gamma_1(\xi_s)$, $\lambda_2(\xi_s) \in \Gamma_2(\xi_s)$, причем $\lambda_1(\xi_s) = \lambda_2(\xi_s)$, но собственному значению $\lambda_1(\xi_s)$ соответствуют только собственные вектора.

Нетрудно видеть, что требования теоремы 4 могут быть не выполнены только при $\xi \in \Xi_K$, если для всех $\xi \in \Xi$ выполнены требования, приведенные в теореме 1.

Условие 4: Будем говорить, что для пары множеств $\Gamma_1(\xi)$, $\Gamma_2(\xi)$ выполнено равномерное условие вырожденной щели, если

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \Xi, \forall \lambda_1(\xi_1) \in \Gamma_1(\xi_1), \lambda_2(\xi_2) \in \Gamma_2(\xi_2) : \operatorname{Re}(\lambda_2(\xi_2)) \geq \operatorname{Re}(\lambda_1(\xi_1)).$$

Покажем, что справедливо следующее обобщение теоремы 5.

Теорема 7: Пусть матрица Λ соответствует задаче (5), все ее собственные значения разбиты на два множества Γ_1 и Γ_2 , причем для этих множеств выполнено равномерное условие вырожденной щели. Пусть, более того, $\Xi_K = \emptyset$, $\operatorname{mes}(\Xi_s \cup \Xi_e) = 0$, множества $\Gamma_1(\xi)$, $\Gamma_2(\xi)$ состоят из гладких функций. Пусть также множество собственных векторов, соответствующих Γ_1 , для всех ξ задает собственное подпространство V , удовлетворяющее теореме 4. Пусть, кроме того, найдется такое $k_0 > 0$, что $\forall \xi : |\xi| > k_0$ все собственные значения матрицы Λ являются алгебраически однократными и на них выполнена оценка

$$|\lambda(\xi)| \leq C_1(1 + |\xi|)^{d_1},$$

где C_1 , d_1 — некоторые константы. Пусть $\mathcal{H}$ — множество образов Фурье начальных данных $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)$, таких, что начальные данные для неравновесных переменных достаточно гладкие, т.е.

$$(1 + |\xi|)^{5N_\Lambda} |M_{22}|^{d(M_{22})-1} \mathcal{V}_0 \in L_2(\Xi),$$

а для начальных данных для консервативных переменных выполнено условие $\|\mathcal{U}_0\| \neq 0$. Тогда соответствующий разделению динамик проектор P удовлетворяет условию L_2 -корректности по Чепмену—Энскогу в классе $\mathcal{H}$ начальных данных. При этом для констант K , δ из определения L_2 -корректности по Чепмену—Энскогу верно следующее: K зависит от $\|\mathcal{U}_0\|$ и $\|\mathcal{V}_0\|$; δ зависит от свойств матрицы M .

Доказательство: Обозначим ε -окрестность множества Ξ_s через $\Xi_{s,\varepsilon}$. Аналогично определим множество $\Xi_{e,\varepsilon}$. Пусть также $\Sigma_\varepsilon = \operatorname{supp} \mathcal{U}_0 \setminus (\Xi_{s,\varepsilon} \cup \Xi_{e,\varepsilon})$. Так как $\|\mathcal{U}_0\| \neq 0$, то из условий на множества Ξ_s , Ξ_e и того, что все собственные значения — гладкие функции следует, что найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $\operatorname{mes}(\Sigma_\varepsilon) > 0$.

Обозначим $\theta(G) = \sup\{\Re \lambda(\xi), \xi \in G, \lambda(\xi) \in \Gamma_1(\xi)\}$. Пусть также $\theta_0 = \inf\{\Re \lambda(\xi), \xi \in \Xi_s, \lambda(\xi) \in (\Gamma_1(\xi) \cup \Gamma_2(\xi))\}$. Так как собственные значения матрицы Λ непрерывны по параметру ξ и для множеств Γ_1 , Γ_2 выполнено равномерное условие вырожденной щели, то найдутся достаточно большое $R > 0$ и достаточно маленькое $\gamma > 0$ такие, что

$$\theta_0 - \theta(\Sigma_\varepsilon \cap \{|\xi| < R\}) > \gamma,$$

а также неравенство

$$\text{mes}(\Sigma_\varepsilon \cap \{|\xi| < R\}) > 0.$$

Но так как $\Sigma_\varepsilon \subset \text{supp } \mathcal{U}_0$, $\|\mathcal{U}_0\| \neq 0$, то $\|\mathcal{U}_0 \chi(\xi, \Sigma_\varepsilon \cap \{|\xi| < R\})\| \neq 0$. Отсюда для начальных данных $\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0$ выполнено условие согласования носителей, и множество Σ_U имеет вид $\Sigma_U = \Sigma_\varepsilon \cap \{|\xi| < R\}$. Значит, доказываемое утверждение следует из теоремы 6.

Ослабление жесткого условия щели. Условие разделения фаз

Возможен и третий способ ослабления жесткого условия щели (16). Он заключается в наложении дополнительных условий на множество начальных данных, но не на область определения их образов Фурье, как в случае условия согласования носителей, а на область значений. Как и в предыдущих параграфах, начнем с введения обозначений и формулировки условия.

Обозначение 7: Пусть $\Gamma_1(\xi), \Gamma_2(\xi)$ — пара множеств непрерывных по ξ ветвей собственных значений матрицы Λ . Пусть также

$$\Gamma_{1,c}(\xi) = \{\lambda(\xi) \in \Gamma_1(\xi) : \exists \xi \in \Xi : \Re \lambda(\xi) = \max_{\mu \in \Gamma_1} \Re \mu(\xi)\},$$

$$\Gamma_{2,c}(\xi) = \{\lambda(\xi) \in \Gamma_2(\xi) : \exists \xi \in \Xi : \Re \lambda(\xi) = \min_{\mu \in \Gamma_2} \Re \mu(\xi)\}.$$

Обозначим $\mathcal{W}_1(\xi)$ линейное пространство, получающееся из $\mathbb{C}^n$ ортогональным проектированием вдоль линейного подпространства, соответствующего множеству собственных значений $\Gamma_{1,c}$. Аналогично подпространство $\mathcal{W}_2(\xi)$ соответствует множеству $\Gamma_{2,c}$.

Условие 5: Будем говорить, что для образов Фурье начальных данных $\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0$ выполнено условие разделения фаз, если

$$\forall \xi \in \Xi : \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{V}_0 \end{pmatrix}(\xi) \in (\mathcal{W}_1(\xi) \cup \mathcal{W}_2(\xi)). \quad (19)$$

Перейдем теперь к формулировке теоремы о притяжении для условия разделения фаз и ее доказательству.

Теорема 8: Пусть матрица Λ соответствует задаче (5), все ее собственные значения разбиты на два множества Γ_1 и Γ_2 , причем для этих множеств выполнено условие вырожденной щели. Пусть также множество собственных векторов, соответствующих Γ_1 , для всех $\xi \notin \Xi_K$ задает собственное подпространство V , удовлетворяющее теореме 4. Пусть, кроме того, найдется такое $k_0 > 0$, что $\forall \xi : |\xi| > k_0$ все собственные значения матрицы Λ являются алгебраически однократными и на них выполнена оценка

$$|\lambda(\xi)| \leq C_1(1 + |\xi|)^{d_1},$$

где C_1, d_1 — некоторые константы. Тогда, если $\mathcal{H}$ — множество образов Фурье начальных данных $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)$, для которых выполнено условие разделения фаз, а также начальные данные для неравновесных переменных достаточно гладкие, т.е.

$$(1 + |\xi|)^{5N_\Lambda} |M_{22}|^{d(M_{22})-1} \mathcal{V}_0 \in L_2(\Xi),$$

а для начальных данных для консервативных переменных выполнено условие $\|\mathcal{U}_0\| \neq 0$, то соответствующий разделению динамик проектор P удовлетворяет условию L_2 -корректности по Чепмену—Энскому в классе $\mathcal{H}$ начальных данных. При этом для констант K, δ из определения L_2 -корректности по Чепмену—Энскому верно следующее: K зависит от $\|\mathcal{U}_0\|$ и $\|\mathcal{V}_0\|$; δ зависит от свойств матрицы M .

Доказательство: Заметим, что так как выполняется условие $\|\mathcal{U}_0\| \neq 0$, $\mathcal{U}_0 \in L_2(\Xi)$, то $\text{mes}(\text{supp } \mathcal{U}_0) > 0$. Отсюда мера хотя бы одного из множеств

$$G_j = \{\xi \in \Xi : \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{V}_0 \end{pmatrix}(\xi) \in \mathcal{W}_j(\xi)\}, \quad j = 1, 2$$

больше нуля.

Пусть $\text{mes}(G_1) > 0$. Тогда множество $G_1 \setminus G_{1,c}$ непусто. Рассмотрим матрицу $\Lambda^{(1)}(\xi)$, имеющую тот же жорданов базис, что и Λ . Разбиение собственных значений матрицы Λ на множества $G_1 \setminus G_{1,c}, G_{1,c}, G_2$ индуцирует разбиение жорданова базиса Λ . Это разбиение, в свою очередь, индуцирует разбиение множества собственных значений матрицы $\Lambda^{(1)}(\xi)$ на три множества $\Omega_1^{(1)}, \Omega_{1,c}^{(1)}$ и $\Omega_2^{(1)}$ соответственно. Пусть $\Omega_1^{(1)} = G_1 \setminus G_{1,c}$, $\Omega_2^{(1)} = G_2$, множество $\Omega_{1,c}^{(1)}$ состоит из вещественнозначных функций $\omega_1(\xi) = (\inf_{\lambda \in G_1 \cup G_2} \Re \lambda) - 1$. Заметим, что тогда для пары множеств собственных значений $\Omega_1^{(1)} \cup \Omega_{1,c}^{(1)}$ и $\Omega_2^{(1)}$ выполнено жесткое условие щели (16). Действительно, это условие выполнено для некоторого $\gamma > 0$ для множеств $\Omega_1^{(1)} \neq \emptyset$ и $\Omega_2^{(1)}$ по построению этих множеств и множества $G_{1,c}$; множество $\Omega_{1,c}^{(1)}$ в силу своего явного вида не может ухудшить γ .

Аналогично, если $\text{mes}(G_2) > 0$ строится матрица $\Lambda^{(2)}(\xi)$. Единственным отличием является то, что множество $\Omega_{2,c}^{(2)}$ состоит из вещественнозначных функций $\omega_2(\xi) = (\sup_{\lambda \in G_1 \cup G_2} \Re \lambda) + 1$. Также как и выше, для множеств $\Omega_1^{(2)}$ и $\Omega_{2,c}^{(2)} \cup \Omega_2^{(2)}$ выполнено жесткое условие щели.

Осталось заметить, что на множестве G_1 матрица $\Lambda(\xi)$ действует на $(\mathcal{U}_0, \mathcal{V}_0)^T$ так же, как $\Lambda^{(1)}(\xi)$, а на множестве G_2 так же, как матрица $\Lambda^{(2)}(\xi)$. Отсюда с помощью теоремы 5 получаем требуемое.

Примеры задач, для которых существует разделение динамик, но нет притяжения решений

В качестве первого примера рассмотрим гиперболическую регуляризацию уравнения Хопфа

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 + \partial_x u_2 &= -u_1 \partial_x u_1, \\ \partial_t u_2 + \alpha_1 \partial_x u_1 + \partial_x u_3 + \beta_1 u_2 &= 0, \\ \partial_t u_3 + \alpha_2 \partial_x u_2 + \beta_2 u_3 &= 0,\end{aligned}$$

где $\frac{1}{\beta_j}$ — времена релаксации, $\beta_2 > \beta_1 > 0$. Потребуем дополнительно, чтобы для коэффициентов и времен релаксации выполнялось равенство

$$\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \beta_1.$$

Пусть $P(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы Λ , соответствующей линейаризованной задаче (20). Тогда нетрудно видеть, что найдется $\xi_0 > 0$ такое, что при $|\xi| \neq \xi_0$ существует полное разделение динамик, соответствующее проекции в одно уравнение, для линейаризованной задачи (20). Кроме того, при $|\xi| > \xi_0$ матрица Λ имеет вещественное собственное значение β_1 и пару комплексно сопряженных собственных значений. Пусть v и w — собственные вектора матрицы Λ , соответствующие комплексно сопряженной паре собственных значений и такие, что $v(0) = e_1$, $w(0) = e_3$. Пусть также $\phi(\xi)$ — функция из $L_2(\mathbb{R})$ такая, что $\text{supp } \phi(\xi) \cap \{|\xi| \leq \xi_0\} = \emptyset$. Тогда нетрудно видеть, что для образов Фурье начальных данных

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{V}_0 \end{pmatrix} = \phi(\xi)(v(\xi) + w(\xi))$$

отсутствует притяжение к решению $U_{\text{сн}}$. При этом, однако, нетрудно видеть, что условие согласования носителей для таких начальных данных не выполнено.

В качестве второго примера рассмотрим систему из двух уравнений такую, что для нее всегда выполнены условия полного разделения динамик, а собственные значения λ_1 и λ_2 таковы, что существует ровно одно значение $\xi_0 \in \mathbb{R}$, при котором вещественные части $\Re \lambda_1(\xi)$ и $\Re \lambda_2(\xi)$ одновременно достигают минимума, причем $\lambda_1(\xi_0) = \lambda_2(\xi_0)$. Тогда для этой системы не выполнено равномерное условие вырожденной щели. С другой стороны, если взять начальные данные так, что для некоторого $\varepsilon > 0$: $\text{supp } \mathcal{U}_0 \subseteq [\xi_0 + 2\varepsilon, +\infty)$, $(\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon) \subset \text{supp } \mathcal{V}_0$, то для них не будет притяжения к решению $U_{\text{сн}}$. Это связано с тем, что для пары $(\mathcal{V}_0, \mathcal{U}_0)$, взятой именно в таком порядке, выполнено условие согласования носителей.

Литература

- [1] Bardos, C. Fluid dynamic of kinetic equation II: convergence proofs for the Boltzmann equation / C. Bardos, C.D. Levermore // Comm. Pure Appl. Math. 46, – 1993. – P. 667–753.
- [2] Bardos, C. Fluid dynamics limits of discrete velocity kinetic equations / C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore // Advances in Kinetic Theory and Continuum Mechanics, R. Gatignol and Soubbaramayer, Eds., Springer-Verlag, Berlin–New–York, 1991. – P. 57–71.
- [3] Caffish, R.E. The fluid dynamical limit of nonlinear model Boltzmann equations / R.E. Caffish, G.C. Papanicolaou // Comm. Pure and Appl. Math. 32, 1079. – P. 103–130.
- [4] Chen Gui-Qiang and Tai-Ping Luu Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy / Gui-Qiang Chen, Levermore C.D. // Comm. on Pure and Appl. Math., V. XLVII (1994). – P. 787–830.
- [5] Chen, G.Q. Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws / G.Q. Chen, H. Frid // Arch. Ration. Mech. Anal. 147 (1999). – P. 89–118.
- [6] Radkevich, E.V. Irreducible Chapman–Enskog Projections and Navier–Stokes Approximations / E.V. Radkevich // Instability in Models Connected with Fluid Flows. II. Ed. by Claude Bardos and Andrei Fursikov; International Mathematical Series, V. 6. P. 85–151. Springer, New York (2007).
- [7] Палин, В.В. О разрешимости квадратных матричных уравнений / В.В. Палин // Вестник МГУ. Сер.1, Математика. Механика. 2008. – №6. – С. 36–42.

Поступила в редакцию 01/IX/2008;

Paper received 01/IX/2008.

в окончательном варианте — 01/IX/2008.

Paper accepted 01/IX/2008.

THE SEPARATION OF DYNAMICS IN SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS WITH RELAXATION³

© 2008 V.V. Palin⁴

The paper is devoted to analysis of the Cauchy problem for the hyperbolic regularization of the linearized conservative laws system. The problem of existence of the invariant manifold of special solutions, which is an attractor, is studied. The solution is given in a form of conditions on the system structure and the Cauchy data.

Keywords and phrases: *invariant manifold of solutions, Chapman–Enskog projection, hyperbolic regularization.*

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. E.V. Radkevich.

⁴Palin Vladimir Vladimirovich, Dept. of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.