УДК 517.956

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ[1]

© 2008 Е.Ю. Арланова[2]

В работе поставлена и исследована нелокальная задача для уравнения смешанного типа, представленного в верхней полуплоскости уравнением дробной диффузии, в нижней — уравнением влагопереноса. Доказана однозначная разрешимость задачи. Решение выписано в явном виде.

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа, краевая задача, дробные интегралы и производные.*

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y}u, & y > 0, \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x, & y < 0, \ |a| \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $D^{\alpha}_{0+,y}$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$ от функции $u(x, y)$ по второй переменной [1]:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,y}\right)(x, y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y \frac{u(x, t)}{(y-t)^{1-\alpha}}dt. \tag{1.2}$$

Пусть $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x, y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ — квадрат, D^- — область, расположенная в нижней полуплоскости ($y < 0$) и ограниченная характеристиками уравнения (1.1) при $y < 0$ и интервалом $J = (0, 1)$ прямой $y = 0$;

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором О.А. Репиным.

[2]Арланова Екатерина Юрьевна (earlanova@gmail.com), кафедра прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

$\Theta_0(x) = \left(\dfrac{x}{2}, -\sqrt{x}\right)$ и $\Theta_1(x) = \left(\dfrac{1+x}{2}, -\sqrt{1-x}\right)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1.1) при $y < 0$, выходящих из точки $x \in J$, с характеристиками $\xi = x - \dfrac{y^2}{2} = 0$ и $\eta = x + \dfrac{y^2}{2} = 1$ соответственно; $\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x)$ — операторы М. Сайго, введенные в [2]; $\varphi(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — заданные функции, такие, что $y^{1-\alpha}\varphi_1(y)$, $y^{1-\alpha}\varphi_2(y) \in C(\overline{D^+})$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

Для этого уравнения рассмотрим и исследуем следующую задачу.

Задача: Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1.1) при $|a| < 1$ в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} A\left(I_{0+}^{a_1, b_1, \frac{a-3}{4}-a_1} u[\Theta_0(t)]\right)(x) = B\left(I_{0+}^{a_1+\frac{1-a}{4}, b_1, \frac{a-3}{4}-a_1} u(t, 0)\right)(x) + \\ + C\left(I_{0+}^{a_1+\frac{3-a}{4}, b_1-\frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}-a_1} u_y(t, 0)\right)(x) + \varphi(x), \end{gathered} \tag{1.4}$$

где A, B, C, a_1, b_1 — заданные константы, такие что

$$\begin{gathered} \sqrt{\pi}A - \Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)B \neq 0, \\ \frac{a-1}{4} < a_1 < \frac{a+3}{4}, \quad b_1 > 0, \end{gathered} \tag{1.5}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x, y) = \lim_{y\to 0-} u(x, y) \quad (x \in \overline{J}), \tag{1.6}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x, y)\right)_y = \lim_{y\to 0-} u_y(x, y) \quad (x \in J). \tag{1.7}$$

Будем искать решение $u(x, y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D, таких, что

$$y^{1-\alpha}u(x, y) \in C(\overline{D^+}), \quad u(x, y) \in C(\overline{D^-}), \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y \in C\left(D^+ \cup \{(x, y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}\right), \\ u_{xx} \in C\left(D^+ \cup D^-\right), \quad u_{yy} \in C\left(\overline{D^-}\right). \end{gathered} \tag{1.9}$$

2. Единственность решения задачи

Пусть существует решение исследуемой задачи. Введем обозначения

$$\Gamma(\alpha)\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x, y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0-} u(x, y) = \tau_2(x), \tag{2.1}$$

$$\Gamma(\alpha)\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x, y)\right)_y = \nu_1(x), \quad \lim_{y\to 0-} u_y(x, y) = \nu_2(x). \tag{2.2}$$

Решение уравнения (1.1) в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, удовлетворяющее условиям (1.3) и

$$\Gamma(\alpha)\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}u(x, y) = \tau_1(x)(x \in \overline{J}), \tag{2.3}$$

выражается формулой [3]

$$u(x,\, y) = \int_0^y \varphi_0(\eta) G_\xi\,(x,\, y,\, 0,\, \eta)\, d\eta - \int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi\,(x,\, y,\, 1,\, \eta)\, d\eta + \\ + \int_0^1 \tau_1(\xi) G\,(x,\, y,\, \xi,\, 0)\, d\xi, \tag{2.4}$$

где для функции Грина имеем

$$G\,(x,\, y,\, \xi,\, \eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right) - e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right],$$

$$\frac{\partial G\,(x,\, y,\, \xi,\, \eta)}{\partial \xi} = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sgn}(x-\xi+2n)}{|x-\xi+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{sgn}(x+\xi+2n)}{|x+\xi+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right], \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}, \quad \alpha > \beta. \tag{2.5}$$

Далее находим, что

$$u(x,\, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^y \varphi_0(\eta)(y-\eta)^{\beta-1} \frac{\operatorname{sgn}(x+2n)}{|x+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right) d\eta - \\ - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^y \varphi_1(\eta) \left[(y-\eta)^{\beta-1} \frac{\operatorname{sgn}(x-1+2n)}{|x-1+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-1+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right) + \right. \\ \left. + (y-\eta)^{\beta-1} \frac{\operatorname{sgn}(x+1+2n)}{|x+1+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+1+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right] d\eta + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \tau_1(\xi) y^{\beta-1} \left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{y^\beta}\right) - e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+-xi+2n|}{y^\beta}\right)\right] d\xi.$$

Так как $\left(D^{\alpha-1}_{0+,y} u(x,\, y)\right)_y = D^{\alpha}_{0+,y} u(x,\, y)$, а $D^{\alpha}_{0+,y} u(x,\, y) = u_{xx}$, то

$$D^{\alpha}_{0+,y} u(x,\, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^y \varphi_0(\eta)(y-\eta)^{\beta-1} \frac{\operatorname{sgn}(x+2n)}{|x+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right) d\eta - \right. \\ - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^y \varphi_1(\eta) \left[(y-\eta)^{\beta-1} \frac{\operatorname{sgn}(x-1+2n)}{|x-1+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-1+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right) + \right. \\ \left. + (y-\eta)^{\beta-1} \frac{\operatorname{sgn}(x+1+2n)}{|x+1+2n|} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+1+2n|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right] d\eta + \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \tau_1(\xi) y^{\beta-1} \left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2n|}{y^\beta}\right) - e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2n|}{y^\beta}\right)\right] d\xi \right\}.$$

$$D^{\alpha}_{0+,y}u(x,\,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y\varphi_0(\eta)(y-\eta)^{\beta-1}\frac{\operatorname{sgn}(x+2n)}{|x+2n|}e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y\varphi_1(\eta)\left[(y-\eta)^{\beta-1}\frac{\operatorname{sgn}(x-1+2n)}{|x-1+2n|}e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-1+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)+\right.$$

$$\left.+(y-\eta)^{\beta-1}\frac{\operatorname{sgn}(x+1+2n)}{|x+1+2n|}e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+1+2n|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right]d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}y^{\beta-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{x+2n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(\xi)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi+2n}{y^{\beta}}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}y^{\beta-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{x+2n}^{1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(\xi)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{-x+\xi-2n}{y^{\beta}}\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}y^{\beta-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(\xi)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+\xi+2n}{y^{\beta}}\right)d\xi.$$

Поскольку $n\in Z$, то для выполнения условия $0<x+2n<1$ необходимо положить $n=0$. Тогда можно записать, что

$$D^{\alpha}_{0+,y}u(x,\,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y\varphi_0(\eta)\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{x}e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^{\beta}}\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^y\varphi_1(\eta)\left[\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{-(x-1)}e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{1-x}{(y-\eta)^{\beta}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{x+1}e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+1}{(y-\eta)^{\beta}}\right)\right]d\eta+\frac{1}{2}y^{\beta-1}\int\limits_0^x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(\xi)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^{\beta}}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}y^{\beta-1}\int\limits_x^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(\xi)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{\xi-x}{y^{\beta}}\right)d\xi-\frac{1}{2}y^{\beta-1}\int\limits_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau_1(\xi)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+\xi}{y^{\beta}}\right)d\xi.$$

Введем обозначения

$$I_1=\int\limits_0^x\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^{\beta}}\right)\tau_1(\xi)d\xi,$$

$$I_2=\int\limits_x^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{\xi-x}{y^{\beta}}\right)\tau_1(\xi)d\xi,$$

$$I_3=\int\limits_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+\xi}{y^{\beta}}\right)\tau_1(\xi)d\xi,$$

$$I_4 = \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{x} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\beta}\right)\right]\varphi_0(\eta)d\eta,$$

$$I_5 = \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{-(x-1)} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{1-x}{(y-\eta)^\beta}\right)\right]\varphi_1(\eta)d\eta,$$

$$I_6 = \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{x+1} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+1}{(y-\eta)^\beta}\right)\right]\varphi_1(\eta)d\eta.$$

Так как

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^\beta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^\beta}\right),$$

то

$$I_1 = \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^\beta}\right)\tau_1(\xi)d\xi = \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^\beta}\right)\tau_1(\xi)d\xi.$$

Интегрируя дважды по частям и учитывая, что $\tau(0) = \tau(1) = 0$, будем иметь

$$I_1 = \tau_1'(0) e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{y^\beta}\right) + \int_0^x e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^\beta}\right)\tau_1''(\xi)d\xi.$$

Аналогично находим

$$I_2 = -\tau_1'(1) e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{1-x}{y^\beta}\right) + \int_x^1 e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{\xi-x}{y^\beta}\right)\tau_1''(\xi)d\xi,$$

$$I_3 = -\tau_1'(1) e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+1}{y^\beta}\right) + \tau_1'(0) e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{y^\beta}\right) + \int_0^1 e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+\xi}{y^\beta}\right)\tau_1''(\xi)d\xi,$$

$$I_4 = \varphi_0'(0)\frac{y^{\beta-1}}{x} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{y^\beta}\right) + \int_0^y \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{x} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\beta}\right)\varphi_0''(\eta)d\eta,$$

$$I_5 = \varphi_1'(0)\frac{y^{\beta-1}}{x-1} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{1-x}{y^\beta}\right) + \int_0^y \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{x-1} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{1-x}{(y-\eta)^\beta}\right)\varphi_1''(\eta)d\eta,$$

$$I_6 = \varphi_1'(0)\frac{y^{\beta-1}}{x+1} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+1}{y^\beta}\right) + \int_0^y \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{x+1} e^{0,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x+1}{(y-\eta)^\beta}\right)\varphi_1''(\eta)d\eta.$$

Таким образом, получается следующее выражение:

$$D^\alpha_{0+,y}u = \left(D^{\alpha-1}_{0+,y}u\right)_y = I_4 + \frac{1}{2}(I_5 + I_6) + \frac{1}{2}y^{\beta-1}(I_1 + I_2 - I_3).$$

В работе [4] доказано равенство

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(D^{\alpha-1}_{0+,y}u(x,y)\right)_y = \Gamma(\alpha+1)\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y. \tag{2.6}$$

Для функции $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$ справедливы следующие соотношения [5]:

$$ze^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)=e^{\mu-\alpha,\,\delta+\beta}_{\alpha,\beta}(z)-\frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha)\Gamma(\delta+\beta)},\tag{2.7}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}e^{\mu,0}_{\alpha,\beta}(-\lambda t)dt=\frac{\beta}{\Gamma(\mu)},\tag{2.8}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}e^{0,\delta}_{\alpha,\beta}(-\lambda t)dt=-\frac{\alpha}{\Gamma(\delta)},\tag{2.9}$$

$$\lim_{z\to\infty}e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)=0,\quad \pi\geqslant|\arg z|>\frac{\alpha+\delta}{2}\pi+e,\quad e>0,\quad \alpha\geqslant d>0.\tag{2.10}$$

Воспользовавшись выражением (2.6) и приведенными выше формулами (2.7)–(2.10), совершив замену переменных $(x-\xi)y^{-\beta}=s_1$ (в первом интеграле) и $(\xi-x)y^{-\delta}=s_2$ (во втором интеграле), получим

$$\begin{aligned}
\nu_1(x)&=\Gamma(\alpha)\lim_{y\to0+}y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u(x,y)\right)_y=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}y^{1-\alpha}\left(D^{\alpha-1}_{0+,y}u(x,y)\right)_y=\\
&=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}y^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0+,y}u(x,y)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}y^{1-\alpha}y^{\beta-1}(I_1+I_2)=\\
&=\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}y^{-\beta}\left(\tau_1'(0)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{y^\beta}\right)+\int\limits_0^x e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^\beta}\right)\tau_1''(\xi)d\xi\right)+\\
&+\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}y^{-\beta}\left(-\tau_1'(1)e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{1-x}{y^\beta}\right)+\int\limits_x^1 e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{\xi-x}{y^\beta}\right)\tau_1''(\xi)d\xi\right)=\\
&=\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}y^{-\beta}y^{\beta}\int\limits_0^x\frac{\tau_1''(\xi)}{\xi-x}e^{0,2\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{x-\xi}{y^\beta}\right)d\xi+\\
&\qquad+\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}y^{-\beta}y^{\beta}\int\limits_x^1\frac{\tau_1''(\xi)}{x-\xi}e^{0,2\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{\xi-x}{y^\beta}\right)d\xi=\\
&=\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}\int\limits_0^{xy^{-\beta}}\frac{\tau_1''(x-s_1y^\beta)}{-s_1}e^{0,2\beta}_{1,\beta}(-s_1)ds_1+\\
&\qquad+\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\lim_{y\to0+}\int\limits_0^{(1-x)y^{-\beta}}\frac{\tau_1''(x+s_2y^\beta)}{-s_2}e^{0,2\beta}_{1,\beta}(-s_2)ds_2=\\
&=-\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\tau_1''(x)\int\limits_0^\infty\frac{1}{s_1}e^{0,2\beta}_{1,\beta}(-s_1)ds_1-\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\tau_1''(x)\int\limits_0^\infty\frac{1}{s_2}e^{0,2\beta}_{1,\beta}(-s_2)ds_2=\\
&\qquad=\frac{\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+1)}\tau_1''(x)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)=\frac{\tau_1''(x)}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, полученное функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ имеет вид

$$\nu_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x). \tag{2.11}$$

Найдем соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на J из гиперболической части D^- области D. Используя решение задачи Коши [6, 7]

$$u(x,y) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}\int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-3}{4}}t^{-\frac{a+3}{4}}dt +$$
$$+ y\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}\int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-1}{4}}t^{-\frac{a+1}{4}}dt,$$

найдем $u[\Theta_0(x)]$ в форме

$$u\left[\Theta_0(x)\right] = k_1\left(I_{0+}^{\frac{1-a}{4},0,\frac{a-3}{4}}\tau_-(t)\right)(x) + k_2\left(I_{0+}^{\frac{3-a}{4},-\frac{1}{2},\frac{a-3}{4}}\nu_-(t)\right)(x),$$

где $k_1 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)$, $k_2 = -\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)$. Подставляя в выражение (1.4) значение для $u[\Theta_0(x)]$ и применяя к полученному равенству оператор $\left(I_{0+}^{a_1+\frac{3-a}{4},b_1-\frac{1}{2},\frac{a-3}{4}-a_1}\right)^{-1} = \left(I_{0+}^{-a_1-\frac{3-a}{4},\frac{1}{2}-b_1,0}\right)$, получим

$$\nu_2(x) = \frac{Ak_1 - B}{C - Ak_2}\left(I_{0+}^{-\frac{1}{2}}\tau_2(t)\right)(x) + g(x), \tag{2.12}$$

где $g(x) = -\frac{1}{C - Ak_2}\left(I_{0+}^{-a_1-\frac{3-a}{4},\frac{1}{2}-b_1,0}\varphi(t)\right)(x)$.

При $\varphi_1(x) \equiv 0$ имеем

$$\nu_2(x) = \frac{Ak_1 - B}{C - Ak_2}\left(I_{0+}^{-\frac{1}{2}}\tau_2(t)\right)(x). \tag{2.13}$$

Единственность решения задачи вытекает из аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе [6].

Пусть $\max\limits_{\overline{D^+}} u(x,y) = \tau(x_0) > 0$. Тогда, в соответствии с принципом экстремума для операторов дробного дифференцирования [7], из (2.13) и условия $(Ak_1 - B)(C - Ak_2) < 0$ заключаем, что $\nu_2(x_0) < 0$. Поскольку $\tau''(x_0) = 0$, то из (2.11) заключаем, что $\nu_1(x_0) = 0$. Из полученных условий $\nu_2(x_0) < 0$ и $\nu_1(x_0) = 0$ следует единственность решения задачи.

3. Существование решения задачи

Для доказательства существования решения исходной задачи сведем ее к интегральному уравнению дробного порядка.

Выразим $\tau_1(x)$ из соотношения (2.11). В результате получим

$$\tau_1(x) = \Gamma(1+\alpha)\left(I_{0+}^{2}\nu_1(t)\right)(x). \tag{3.1}$$

Полагая $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$ и $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$, подставляя (3.1) в соотношение (2.12), с учетом свойств операторов Римана–Лиувилля [1], приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго порядка:

$$\nu(x) = \frac{Ak_1 - B}{C - Ak_2}\Gamma(1+\alpha)\left(I_{0+}^{\frac{3}{2}}\nu(t)\right)(x) + g(x). \tag{3.2}$$

Перепишем (3.2) в виде

$$\nu(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int\limits_0^x \nu(t)\sqrt{x-t}dt. \tag{3.3}$$

где $\lambda = \dfrac{Ak_1 - B}{C - Ak_2}\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$.

Функция $g(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, так как $\varphi(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, поэтому используя теорию интегральных уравнений [8], находим

$$\nu(x) = g(x) + \lambda\int\limits_0^x \sqrt{x-t}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(x-t)^{\frac{3}{2}}\right)g(t)dt. \tag{3.4}$$

Здесь бесконечный ряд

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\alpha)} \tag{3.5}$$

— функция типа Миттаг—Леффлера, которая является целой функцией (комплексной) переменной $z = x + iy$ порядка $1/\alpha > 0$ [8]. При $\mu = 1$ функция (3.5) совпадает с функцией Миттаг—Леффлера $E_\alpha(z) \equiv E_{\alpha,1}(z)$.

Подставляя (3.4) в (3.1), получим выражение для $\tau(x)$:

$$\tau(x) = \Gamma(1+\alpha)\left(I_{0+}^{2}g(t)\right)(x) + \\ + \Gamma(1+\alpha)\lambda\left(I_{0+}^{2}\int\limits_0^t \sqrt{t-s}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(t-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds\right)(x). \tag{3.6}$$

Лемма: Если $\lambda \in C$, то

$$\left(I_{0+}^{2}\int\limits_0^t \sqrt{t-s}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(t-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds\right)(x) = \\ = \int\limits_0^x (x-s)^{\frac{5}{2}}E_{\frac{3}{2},\frac{7}{2}}\left(\lambda(x-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds. \tag{3.7}$$

Доказательство: Осуществляя по формуле Дирихле перестановку порядков интегрирования, а затем перестановку ряда и интегрирования, имеем

$$\left(I_{0+}^{2}\int\limits_{0}^{t}\sqrt{t-s}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(t-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds\right)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2)}\int\limits_{0}^{x}(x-t)dt\int\limits_{0}^{t}\sqrt{t-s}E_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}\left(\lambda(t-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}g(s)ds\left[\frac{1}{\Gamma(2)}\int\limits_{s}^{x}(x-t)\sqrt{t-s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda(t-s)^{\frac{3}{2}}\right)^{m}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}k+\frac{3}{2}\right)}dt\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}k+\dfrac{3}{2}\right)}\int\limits_{0}^{x}\left[\frac{1}{\Gamma(2)}\int\limits_{s}^{x}(x-t)(t-s)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}k}dt\right]g(s)ds=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}k+\dfrac{7}{2}\right)}\int\limits_{0}^{x}(x-s)^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}k}g(s)ds=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}(x-s)^{\frac{5}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda(x-s)^{\frac{3}{2}}\right]^{k}}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}k+\dfrac{7}{2}\right)}g(s)ds=\int\limits_{0}^{x}(x-s)^{\frac{5}{2}}E_{\frac{3}{2},\frac{7}{2}}\left(\lambda(x-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds.$$

Используя полученное выражение, получим окончательную формулу для функции $\tau(x)$:

$$\tau(x)=\Gamma(1+\alpha)\left(I_{0+}^{2}g(t)\right)(x)+$$

$$+\Gamma(1+\alpha)\lambda\int\limits_{0}^{x}(x-s)^{\frac{5}{2}}E_{\frac{3}{2},\frac{7}{2}}\left(\lambda(x-s)^{\frac{3}{2}}\right)g(s)ds. \qquad (3.8)$$

Используя полученные таким образом функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, можно найти решение задачи 3.2 в каждой из областей D^{+} и D^{-}, а значит, и решение задачи 3.2 в заданном классе функций в области D, удовлетворяющее краевым условиям (1.3) и (1.4) и условиям сопряжения (1.6), (1.7).

Теорема. Пусть ненулевые действительные константы A_1, A_2, a_1, b_1, c_1 удовлетворяют условию (1.5), функция $\varphi_1(x)\in C[0,1]\cap C^{2}(0,1)$. Тогда задача (1.3), (1.4) для уравнения (1.1) при $|a|\leqslant 1$ имеет единственное решение, которое может быть найдено в форме решения задачи Коши, где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ определены в (3.8) и (3.4) соответственно.

Литература

[1] Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[2] Saigo, M. A certain boundary value problem for the Euler–Poisson–Darboux equation / M. Saigo // Math. Japan. – 1979. – Vol. 24. – №4. – Pp. 377–385.

[3] Псху, А.В. Краевые задачи для диффференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А.В. Псху. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005. – 186 с.

[4] Геккиева, С.Х. Задача Коши для обобщенного уравнения переноса с дробной по времени производной / С.Х. Геккиева // Докл. Адыгейской (Черкесской) Межд. АН. – 2001. – Т. 5, – №2. – С. 18–22.

[5] Псху, А.В. Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка / А.В. Псху // Докл. Адыгейской (Черкесской) Межд. АН. – 2000. – Т. 5. – №1. – С. 45–53.

[6] Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

[7] Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

[8] Джрбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966. – 671 с.

Поступила в редакцию 01/*IX*/2008;
в окончательном варианте — 01/*IX*/2008.

A PROBLEM WITH SHIFTED VARIABLE FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH GENERALIZED OPERATORS OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION IN THE BOUNDARY CONDITION[3]

E.Y. Arlanova[4]

In the paper a non-local problem for a mixed type equation represented in the upper half-plane by a fractional diffusion equation, in the lower half-plane by a diffusion transfer equation is studied. Unique solvability of the problem is then proved. The solution is represented in an explicit form.

Keywords and phrases: *mixed type equation, boundary-value problem, fractional integrals and derivatives.*

Paper received 01/*IX*/2008.
Paper accepted 01/*IX*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.A. Repin.

[4]Arlanova Ekaterina Yurjevna (earlanova@gmail.com), Dept. of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russia.