

УДК 512.541+512.553

## О СООТНОШЕНИЯХ ДИСТРИБУТИВНОСТИ ДЛЯ Т-РАДИКАЛОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП<sup>1</sup>

© 2008 Е.А. Тимошенко<sup>2</sup>

Работа посвящена радикалам, которые задаются при помощи тензорного произведения абелевых групп. Рассмотрен вопрос о том, какие соотношения дистрибутивности справедливы для таких радикалов.

**Ключевые слова:** радикал, тензорное произведение, Абелева группа, дистрибутивность.

### Предварительные сведения

Данная статья продолжает исследование Т-радикалов, которое было начато в работе [1]. Т-радикалы можно охарактеризовать, в частности, как те радикалы, чьи радикальные классы замкнуты относительно взятия сервантных подгрупп. В качестве удобного инструмента используются также Е-радикалы. Все группы предполагаются абелевыми. Используются следующие обозначения:

|                        |                                                                                |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\oplus$               | прямая сумма                                                                   |
| $\subset (\subseteq)$  | строгое (нестрогое) включение                                                  |
| $\mathbf{P}$           | множество всех простых чисел                                                   |
| $\mathbf{Z}$           | группа целых чисел                                                             |
| $\mathbf{Z}(p)$        | циклическая группа порядка $p$                                                 |
| $\mathbf{Z}(p^\infty)$ | квазициклическая $p$ -группа                                                   |
| $\mathbf{Q}$           | группа рациональных чисел                                                      |
| $\mathbf{Q}_p$         | группа рациональных чисел, знаменатели<br>которых взаимно просты с $p$         |
| $\mathbf{Q}^{(p)}$     | группа рациональных чисел, знаменателями<br>которых являются степени числа $p$ |

<sup>1</sup>Представлена доктором физико-математических наук, профессором А.Н. Пановым.

<sup>2</sup>Тимошенко Егор Александрович (tea471@mail.tsu.ru), кафедра общей математики Томского государственного университета, 634050, Россия, г.Томск, пр.Ленина, 36.

|                    |                                                   |
|--------------------|---------------------------------------------------|
| $\mathbb{Q}_p^*$   | кольцо целых $p$ -адических чисел                 |
| $t(A)$             | периодическая часть группы $A$                    |
| $A \otimes B$      | тензорное произведение групп $A$ и $B$            |
| $\text{Hom}(A, B)$ | группа гомоморфизмов из группы $A$ в группу $B$ . |

Напомним некоторые факты из теории радикалов [2, 3]. Пусть каждой группе  $A$  сопоставлена некоторая ее подгруппа  $\rho(A)$ . Скажем, что в категории абелевых групп задан *идемпотентный радикал*  $\rho$ , если для любого  $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$  имеет место включение  $\varphi(\rho(A)) \subseteq \rho(B)$  и для любой группы  $A$  выполнены равенства

$$\begin{aligned}\rho(\rho(A)) &= \rho(A), \\ \rho(A/\rho(A)) &= 0.\end{aligned}$$

Пусть  $\rho$  — идемпотентный радикал (далее слово "идемпотентный" зачастую будет опускаться). Назовем  $\rho$ -*радикальным* класс всех групп  $A$ , удовлетворяющих условию  $\rho(A) = A$ . Двойственным образом равенство  $\rho(A) = 0$  определяет класс, называемый  $\rho$ -*полупростым*. Заметим, что идемпотентный радикал  $\rho$  однозначно определяется как своим полупростым, так и своим радикальным классом (будем обозначать эти два класса  $P_\rho$  и  $R_\rho$  соответственно). Всякий радикальный класс замкнут относительно взятия расширений, прямых сумм и гомоморфных образов; всякий полупростой — относительно взятия расширений, прямых произведений и подгрупп.

Идемпотентные радикалы можно частично упорядочить, полагая  $\rho \leq \sigma$  в том и только в том случае, когда  $\rho(A) \subseteq \sigma(A)$  для любой группы  $A$ . Тогда большему радикалу будет соответствовать больший радикальный и меньший полупростой класс. Согласованные с введенным частичным порядком операции пересечения и объединения задаются равенствами

$$\begin{aligned}(\bigwedge_{i \in I} \rho_i)(A) &= \sum \{B \subseteq A \mid \rho_i(B) = B \text{ для любого } i \in I\}, \\ (\bigvee_{i \in I} \rho_i)(A) &= \bigcap \{B \subseteq A \mid \rho_i(A/B) = 0 \text{ для любого } i \in I\}.\end{aligned}$$

Относительно данных операций совокупность всех радикалов составляет полную большую решетку  $\mathcal{IR}$  с нулем и единицей (эта решетка отличается от обычной тем, что рассматриваемая совокупность не образует множество [4]).

Напомним теперь основные понятия из [1]. Пусть  $F$  есть некоторая абелева группа. Через  $W_F(A)$  будет обозначаться сумма всех подгрупп  $B$  группы  $A$ , для которых выполнено  $B \otimes F = 0$ . Для абелевой группы  $V$  через  $H_V(A)$  обозначается пересечение всех подгрупп  $B$  группы  $A$  таких, что  $\text{Hom}(V, A/B) = 0$ .

Определенные таким образом функторы  $W_F$  и  $H_V$  суть радикалы. Далее они называются соответственно  $T(F)$ -*радикалом* и  $E(V)$ -*радикалом*. Заметим, что для  $W_F$  радикальным будет класс всех групп  $A$  таких, что  $A \otimes F = 0$ . Полупростым классом радикала  $H_V$  является класс  $\mathcal{E}(V)$  всех абелевых групп  $A$ , для которых выполнено  $\text{Hom}(V, A) = 0$ . Кроме того,  $H_V$  — наименьший из всех радикалов  $\rho$  таких, что  $V \in R_\rho$ .

В [1] отмечался также следующий факт: если  $\{F_i\}_{i \in I}$  есть семейство групп, то пересечение всех  $T(F_i)$ -радикалов и объединение всех  $E(F_i)$ -радикалов совпадают соответственно с  $W_F$  и  $H_F$ , где  $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$ .

## $T(F)$ -радикалы и дистрибутивность

Воспроизведем полученное в [1] описание частично упорядоченного множества  $\mathcal{L}$  всех  $T(F)$ -радикалов. Рассмотрим решетку  $M = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$  с отношением порядка  $n \leq m \leq l \leq \mu \leq \nu$ ,  $m \leq \lambda \leq \mu$  (элементы  $l$  и  $\lambda$  считаем несравнимыми). Всякому радикалу  $W_F$  ставится в соответствие функция  $\psi^F: \mathbf{P} \rightarrow M$ , задаваемая следующим образом: если группа  $F$  непериодическая, то

$$\psi^F(p) = \begin{cases} l, & \text{если группа } F \text{ является } p\text{-делимой;} \\ m, & \text{если группа } F \text{ не является } p\text{-делимой,} \\ & \text{а факторгруппа } F/t(F) \text{ является;} \\ n, & \text{если факторгруппа } F/t(F) \text{ не является } p\text{-делимой.} \end{cases}$$

Если же группа  $F$  периодическая, то

$$\psi^F(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } p\text{-компонента группы } F \text{ не является делимой;} \\ \mu, & \text{если } p\text{-компонента группы } F \text{ делима и отлична от } 0; \\ \nu, & \text{если } F \text{ имеет нулевую } p\text{-компоненту.} \end{cases}$$

Сопоставляя функцию  $\psi^F$  всякому радикалу  $W_F$ , мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{L}$  и подмножеством  $M'$  множества  $M^{\mathbf{P}}$ . Заметим, что данное подмножество состоит из последовательностей вида  $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_p, \dots)$ , все члены которых одновременно входят в какое-то одно из множеств  $\{l, m, n\}$  или  $\{\lambda, \mu, \nu\}$ . Построенное соответствие задает изоморфизм частично упорядоченных множеств (считаем, что  $\alpha \leq \alpha'$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_p \leq \alpha'_p$  для всех простых чисел  $p$ ). Отсюда нетрудно вывести, что  $\mathcal{L}$  — полная дистрибутивная решетка.

Ясно, что в силу конечности множества  $M$  в решетке  $\mathcal{L}$  справедливы также и бесконечные законы дистрибутивности. Что касается большой решетки  $\mathcal{IR}$ , то, как показано в конце параграфа, она не является не только дистрибутивной, но и модулярной.

Цель данной работы — ответить на вопрос: какие законы дистрибутивности останутся верны для  $T(F)$ -радикалов, если заменить в этих законах операции  $\widetilde{\wedge}$  и  $\widetilde{\vee}$  решетки  $\mathcal{L}$  операциями  $\wedge$  и  $\vee$ , определенными в  $\mathcal{IR}$ ? В силу сказанного в конце первого параграфа  $\widetilde{\wedge}$  действует на  $T(F)$ -радикалы так же, как и  $\wedge$ . Далее нам потребуется ряд подготовительных результатов.

Через  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  будем обозначать множества всех  $T(F)$ -радикалов таких, что абелева группа  $F$  является соответственно непериодической либо периодической. В [1] отмечалось, что множество  $\mathcal{L}_1$ , в отличие от  $\mathcal{L}_2$ , есть подрешетка большой решетки  $\mathcal{IR}$ . Радикал  $t$ , который сопоставляет всякой

группе ее периодическую часть, является наибольшим элементом в  $\mathcal{L}_1$ ; если группа  $F$  периодическая, то имеем  $W_F \not\leq t$ .

Введем некоторые необходимые для дальнейшего изложения дополнительные обозначения. Пусть  $\mathcal{V}$  — непустой класс абелевых групп. Через  $H_{\mathcal{V}}$  обозначим наименьший из всех радикалов  $\rho$ , которые обладают свойством  $\mathcal{V} \subseteq R_{\rho}$  (такой радикал обязательно существует). Несложно показать, что  $H_{\mathcal{V}}$ -полупростой класс совпадает с классом  $\mathcal{E}(\mathcal{V})$  всех групп  $A$ , для которых  $\text{Hom}(V, A) = 0$  при всех  $V \in \mathcal{V}$ . Можно также убедиться, что для любого множества групп  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  радикал  $H_{\mathcal{U}}$  будет объединением (точной верхней гранью) множества всех  $E(U_i)$ -радикалов. Говорят, что радикал  $H_{\mathcal{V}}$  порождается классом  $\mathcal{V}$ .

Ясно, что всякий радикал  $\rho$  может быть представлен в виде  $H_{\mathcal{V}}$  (для этого достаточно положить  $\mathcal{V} = R_{\rho}$ ). Далее, если  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{U}$  — два класса абелевых групп, то через  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$  обозначим класс всех групп вида  $V \otimes U$ , где  $V \in \mathcal{V}$ ,  $U \in \mathcal{U}$ . Если при этом  $\mathcal{V} = \{V\}$ , то пишем просто  $V \otimes \mathcal{U}$ .

**Лемма 1:** Для любых классов  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$  из  $H_{\mathcal{X}} \leq H_{\mathcal{V}}$  следует  $H_{\mathcal{X} \otimes \mathcal{U}} \leq H_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}}$ .

**Доказательство:** Достаточно доказать включение  $\mathcal{E}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{U})$  для случая, когда  $\mathcal{E}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{X})$ . В самом деле, если выполнено  $A \in \mathcal{E}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{U})$ , то при любых  $V \in \mathcal{V}$ ,  $U \in \mathcal{U}$  имеем

$$\text{Hom}(V, \text{Hom}(U, A)) \cong \text{Hom}(V \otimes U, A) = 0.$$

Отсюда для всех  $U \in \mathcal{U}$  получаем, что  $\text{Hom}(U, A) \in \mathcal{E}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{X})$  и, значит,

$$\text{Hom}(X \otimes U, A) \cong \text{Hom}(X, \text{Hom}(U, A)) = 0$$

для всякой группы  $X \in \mathcal{X}$ . Это доказывает, что  $A \in \mathcal{E}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{U})$ . Таким образом, если  $\mathcal{E}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{X})$ , то  $\mathcal{E}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{X} \otimes \mathcal{U})$ . Доказательство завершено.

С учетом коммутативности тензорного произведения групп получаем

**Следствие 2:** Для любых классов  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$  из  $H_{\mathcal{X}} \leq H_{\mathcal{V}}$  и  $H_{\mathcal{Y}} \leq H_{\mathcal{U}}$  следует неравенство  $H_{\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}} \leq H_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}}$ .

**Следствие 3:** Для любых классов  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$  из  $H_{\mathcal{X}} = H_{\mathcal{V}}$  и  $H_{\mathcal{Y}} = H_{\mathcal{U}}$  следует равенство  $H_{\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}} = H_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}}$ .

**Следствие 4:** Для любых классов  $\mathcal{V}$  и  $\mathcal{U}$  выполнено  $H_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}} \leq H_{\mathcal{U}}$ .

**Доказательство:** Радикал  $H_{\mathbf{Z}}$  — наибольший элемент в  $I\mathcal{R}$ . Это означает, что  $H_{\mathcal{V}} \leq H_{\mathbf{Z}}$  и  $H_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}} \leq H_{\mathbf{Z} \otimes \mathcal{U}} = H_{\mathcal{U}}$  (так как  $\mathbf{Z} \otimes U \cong U$  для всякой группы  $U$ ).

Напомним, что для любого радикала  $\rho$  подгруппа  $\rho(A)$  сервантна в  $A$  [5].

**Лемма 5:** Если  $\rho < \sigma$ , то найдется группа без кручения, циклическая группа простого порядка или квазициклическая группа  $B \neq 0$ , для которой выполняются включения  $B \in R_{\rho}$  и  $B \in R_{\sigma}$ .

**Доказательство:** Из включения  $R_{\rho} \subset R_{\sigma}$  следует, что существует абелева группа  $A$ , для которой  $A \notin R_{\rho}$  и  $A \in R_{\sigma}$ . Группа  $A$  принадлежит радикальному классу  $R$  тогда и только тогда, когда  $t(A) \in R$  и  $A/t(A) \in R$  [6];

таким образом, можно, не умаляя общности, считать  $A$  группой без кручения или периодической группой. В первом из этих случаев достаточно положить  $B = A/\rho(A)$ , поскольку подгруппа  $\rho(A)$  сервантна в  $A$ .

Пусть группа  $A$  периодическая. Действие радикала на периодические группы полностью определяется его действием на группы вида  $\mathbf{Z}(p)$  и  $\mathbf{Z}(p^\infty)$  [6, 7], так что существует группа  $B$  указанного вида, для которой  $\rho(B) \subset \sigma(B)$ . Группа  $B$  будет искомой, так как коциклические группы не имеют ненулевых собственных сервантных подгрупп. Лемма доказана.

Как было показано в [1], всякий радикал  $\rho \in \mathcal{L}$  можно представить в виде  $H_V$  для подходящей группы  $V$ . Для  $\rho \in \mathcal{L}_2$  это делается следующим образом: если идемпотентному радикалу  $\rho$  соответствует функция  $\psi: \mathbf{P} \rightarrow M$ , то достаточно положить  $V = X \oplus Y$ , где  $X$  — аддитивная группа всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты со всеми простыми  $p \in \psi^{-1}(v)$ , а  $Y$  есть прямая сумма групп  $\mathbf{Z}(p)$  по всем  $p \in \psi^{-1}(\mu)$ . При этом  $A \in R_\rho$  в том и только в том случае, когда факторгруппа  $A/t(A)$  является  $p$ -делимой для всех простых чисел  $p \in \psi^{-1}(\mu)$ , а сама группа  $A$  —  $p$ -делимой для всех  $p \in \psi^{-1}(\lambda)$ .

**Теорема 6:** Пусть  $H_V \in \mathcal{L}_2$ , где группа  $V = X \oplus Y$  имеет указанный выше вид, и пусть класс  $\mathcal{U}$  содержит по крайней мере одну непериодическую группу. Тогда  $H_V \wedge H_{\mathcal{U}} = H_{V \otimes \mathcal{U}}$ .

**Доказательство:** Обозначим  $\rho = H_V$ ,  $\sigma = H_{\mathcal{U}}$ . Применив следствие 4 дважды, получаем неравенство  $H_{V \otimes \mathcal{U}} \leq \rho \wedge \sigma$ . Предположим, что оно является строгим. Тогда по предыдущей лемме существует группа  $B$  (вида  $\mathbf{Z}(p)$ , квазициклическая либо без кручения) такая, что  $B \in \mathcal{E}(V \otimes \mathcal{U})$  и  $B \in R_{\rho \wedge \sigma}$ . Пусть  $\psi: \mathbf{P} \rightarrow M$  есть функция, соответствующая идемпотентному радикалу  $H_V$ .

В  $V \otimes \mathcal{U}$  есть хотя бы одна непериодическая группа, так что радикальный класс радикала  $H_{V \otimes \mathcal{U}}$  содержит все делимые абелевы группы [5]; следовательно, имеем  $B \not\cong \mathbf{Z}(p^\infty)$ . Предположим теперь, что  $B \cong \mathbf{Z}(p)$  для некоторого простого числа  $p$ . Из условия  $B \in R_\sigma$  следует, что для какой-то группы  $U \in \mathcal{U}$  справедливо неравенство  $\text{Hom}(U, B) \neq 0$ , т. е. группа  $U$  не является  $p$ -делимой. Точно так же из  $B \in R_\rho$  следует, что  $p$ -делимой не является группа  $V$ . Но тогда  $V \otimes U$  имеет своим гомоморфным образом ненулевую группу  $(V/pV) \otimes (U/pU)$ . Данная группа изоморфна прямой сумме копий  $\mathbf{Z}(p)$ . Отсюда  $H_{V \otimes \mathcal{U}}(B) = B$ , что невозможно.

Осталось разобрать случай, когда  $B$  — группа без кручения. Из  $B \in R_\sigma$  сразу следует, что для некоторой группы  $U \in \mathcal{U}$  имеем  $\text{Hom}(U, B) \neq 0$ . Далее, группа без кручения  $B$  входит в  $R_\rho$  и, значит,  $p$ -делима для любого  $p \notin \psi^{-1}(v)$ . Тогда  $B$  можно рассматривать как унитарный модуль над кольцом  $X$ ; следовательно, группа  $\text{Hom}(U, B)$  также допускает  $X$ -модульную структуру. Отсюда

$$\text{Hom}(X \otimes U, B) \cong \text{Hom}(X, \text{Hom}(U, B)) \neq 0,$$

что противоречит включению  $B \in \mathcal{E}(V \otimes \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{E}(V \otimes U)$ . Теорема доказана.

**Следствие 7:** Пусть  $H_V \in \mathcal{L}_2$ , а  $\mathcal{U}$  есть некоторый класс, содержащий хотя бы одну непериодическую группу. Тогда  $H_V \wedge H_{\mathcal{U}} = H_{V \otimes \mathcal{U}}$ .

**Доказательство:** Для  $\mathcal{V} = \{X \oplus Y\}$  данный факт уже доказан в предыдущей теореме. Применяя теперь следствие 3, приходим к требуемому равенству.

**Следствие 8:** Если  $H_V, H_U \in \mathcal{L}_2$ , то  $H_V \wedge H_U = H_{V \otimes U}$ .

**Доказательство:** Из  $H_U \not\leq t$  нетрудно вывести, что  $U$  — непериодическая группа. Для получения нужного равенства остается применить следствие 7.

Утверждение следствия 8 верно и для любых конечных пересечений, так как  $H_{V \otimes U}$  вновь будет элементом  $\mathcal{L}_2$ . К сожалению, равенство  $H_V \wedge H_U = H_{V \otimes U}$  не удастся обобщить даже для ситуации  $H_V \in \mathcal{L}_1$ ,  $H_U \in \mathcal{L}$ ; в самом деле, абелевы группы  $V = \mathbf{Z}(p^\infty)$  и  $U = \mathbf{Q}$  удовлетворяют условиям  $H_V \in \mathcal{L}_1$  и  $H_U \in \mathcal{L}_2$ , но

$$\begin{aligned} H_V \wedge H_V &= H_V \neq 0 = H_0 = H_{V \otimes V}, \\ H_V \wedge H_U &= H_V \neq 0 = H_0 = H_{V \otimes U}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к основному результату статьи.

**Теорема 9:** Для любого семейства  $\{\sigma_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}$  и любого  $\rho \in \mathcal{L}$  выполнено

$$\rho \wedge \left( \bigvee_{i \in I} \sigma_i \right) = \bigvee_{i \in I} (\rho \wedge \sigma_i).$$

**Доказательство:** Сначала введем вспомогательные обозначения

$$\tau_i = \rho \wedge \sigma_i, \quad \sigma = \bigvee_{i \in I} \sigma_i, \quad \tau = \rho \wedge \sigma.$$

Неравенство  $\bigvee_{i \in I} \tau_i \leq \tau$  очевидно; осталось доказать, что  $\tau \leq \bigvee_{i \in I} \tau_i$ .

Разобьем доказательство на несколько случаев. Сначала мы предположим, что для всех  $i \in I$  выполнено  $\sigma_i \in \mathcal{L}_1$ . Тогда  $\sigma_i \leq t$ , так что  $\tau_i = \rho \bar{\wedge} \sigma_i$  входит не только в  $\mathcal{L}$ , но и в  $\mathcal{L}_1$ . Используя дистрибутивность решетки  $\mathcal{L}$  и тот факт, что  $\mathcal{L}_1$  является полной подрешеткой в  $I\mathcal{R}$ , получаем

$$\bigvee_{i \in I} \tau_i = \bigvee_{i \in I} \widetilde{\tau_i} = \bigvee_{i \in I} (\rho \bar{\wedge} \sigma_i) = \rho \bar{\wedge} \left( \bigvee_{i \in I} \sigma_i \right) = \rho \bar{\wedge} \sigma = \tau.$$

Пусть теперь  $\rho \in \mathcal{L}_1$  (заметим, что этот случай не исключает предыдущий). Вновь имеем  $\tau_i = \rho \bar{\wedge} \sigma_i \in \mathcal{L}_1$  для любого  $i \in I$ . Далее,

$$\bigvee_{i \in I} \tau_i = \bigvee_{i \in I} \widetilde{\tau_i} = \bigvee_{i \in I} (\rho \bar{\wedge} \sigma_i) = \rho \bar{\wedge} \left( \bigvee_{i \in I} \sigma_i \right) = \rho \wedge \left( \bigvee_{i \in I} \sigma_i \right) \geq \rho \wedge \sigma = \tau.$$

Нам осталось рассмотреть случай, когда  $\rho \in \mathcal{L}_2$  и  $\sigma_i \in \mathcal{L}_2$  по крайней мере для одного индекса  $i \in I$ . Как отмечалось ранее, можно выбрать группы  $\{U_i\}_{i \in I}$  и  $V$  так, что  $\sigma_i$  и  $\rho$  суть  $E(U_i)$ -радикалы и  $E(V)$ -радикал соответственно. Тогда для класса  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  имеем  $H_{\mathcal{U}} = \sigma$ . Применяя следствие 4 к одноэлементным классам  $\{V\}$  и  $\{U_i\}$ , мы получаем, что для каждого  $i \in I$  группа  $V \otimes U_i$  входит в  $\tau_i$ -радикальный класс. Поэтому

$$H_{V \otimes \mathcal{U}} \leq \bigvee_{i \in I} \tau_i \leq \tau = \rho \wedge \sigma = H_V \wedge H_{\mathcal{U}}.$$

Но по крайней мере одна из групп  $U_i$  является непериодической; в этом случае по следствию 7 получаем  $\tau = H_{V \otimes \mathcal{U}}$ , т. е.  $\tau = \bigvee_{i \in I} \tau_i$ . Теорема доказана.

В заключение рассмотрим другой тип дистрибутивности.

**Пример:** Покажем, что, вообще говоря, для  $T(F)$ -радикалов не выполняется дистрибутивный закон

$$\rho \vee (\sigma \wedge \tau) = (\rho \vee \sigma) \wedge (\rho \vee \tau).$$

Для этого найдем группу  $A$  такую, что  $A \in P_\rho \cap P_{\sigma \wedge \tau}$  и  $A \in R_{\rho \vee \sigma} \cap R_{\rho \vee \tau}$ . В роли  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  будут выступать радикалы  $H_V$ ,  $H_X$  и  $H_Y$ , порожденные подходящими рациональными группами идемпотентного типа. Фактически будет показано, что в этом случае

$$H_{V \oplus (X \otimes Y)} \neq H_{V \oplus X} \wedge H_{V \oplus Y}.$$

Возьмем различные  $p, q, r \in \mathbf{P}$ ; пусть  $V = \mathbf{Q}^{(p)}$ ,  $X = \mathbf{Q}^{(q)}$  и  $Y = \mathbf{Q}^{(r)}$ . Далее, положим  $B = \mathbf{Q}^{(pq)}$  (группа всех рациональных чисел, знаменатели которых суть произведения некоторых степеней  $p$  и  $q$ ) и  $C = \mathbf{Q}^{(pr)}$ . Через  $\beta$  и  $\gamma$  мы обозначим канонические гомоморфизмы  $B \rightarrow B/X$  и  $C \rightarrow C/Y$ . Заметим, что факторгруппы  $B/X$  и  $C/Y$  обе изоморфны группе  $\mathbf{Z}(p^\infty)$ ; пусть  $\varphi: B/X \rightarrow C/Y$  есть некоторый изоморфизм этих факторгрупп. Группу  $A$  зададим равенством

$$A = \{(b, c) \in B \oplus C \mid (\varphi\beta)(b) = \gamma(c)\}.$$

Легко убедиться, что гомоморфизм  $A \rightarrow C$ , который переводит всякую пару  $(b, c)$  в элемент  $c$ , является эпиморфизмом, а его ядро изоморфно  $X$ . Тогда из включений  $C \in R_\rho$ ,  $X \in R_\sigma$  и замкнутости радикальных классов относительно расширений следует  $A \in R_{\rho \vee \sigma}$ . Аналогично доказывается, что  $A \in R_{\rho \vee \tau}$ . Далее, справедлив изоморфизм  $X \otimes Y \cong \mathbf{Q}^{(qr)}$ , так что  $A \in \mathcal{E}(X \otimes Y) = P_{\sigma \wedge \tau}$ .

Остается показать, что для подходящим образом выбранного изоморфизма  $\varphi$  выполнено включение  $A \in \mathcal{E}(V)$  и, значит,  $\rho(A) = 0$ . Имеем

$$B/X = (V + X)/X \cong V/(V \cap X) = V/(V \cap Y) \cong (V + Y)/Y = C/Y;$$

пусть  $i: B/X \rightarrow C/Y$  обозначает соответствующий изоморфизм, т. е. для любого элемента  $v \in V$  справедливо равенство  $i(v + X) = v + Y$ .

Факторгруппу  $C/Y$  (как и всякую  $p$ -группу) можно превратить в модуль над кольцом целых  $p$ -адических чисел  $\mathbf{Q}_p^*$ , полагая

$$\left(\frac{n}{p^k} + \mathbf{Q}^{(r)}\right)\pi = \frac{n(s_0 + s_1 p + \dots + s_{k-1} p^{k-1})}{p^k} + \mathbf{Q}^{(r)} \quad (n \in \mathbf{Z}),$$

если  $\pi = s_0 + s_1 p + \dots + s_m p^m + \dots \in \mathbf{Q}_p^* \quad (s_j \in \{0, 1, \dots, p-1\})$ .

Пусть  $\pi \in \mathbf{Q}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p$  (мы считаем, что  $\mathbf{Q}_p \subset \mathbf{Q}_p^*$ ) есть некоторое  $p$ -адическое число указанного выше вида, причем  $s_0 \neq 0$ . Эндоморфизм  $\chi$  группы  $C/Y$ , задаваемый умножением на  $\pi$ , является автоморфизмом (обратный к нему автоморфизм  $\chi^{-1}$  действует как умножение на  $\pi^{-1}$ ); положим  $\varphi = \chi i$ .

Допустим, что  $\text{Hom}(V, A) \neq 0$ . Это значит, что в  $A$  найдется ненулевая пара  $(b, c)$  такая, что для любого натурального  $k$  выполнено  $(b/p^k, c/p^k) \in A$ . При этом можно считать, что числа  $b$  и  $c$  целые (иначе просто домножим их на общий знаменатель), так что

$$\frac{b(s_0 + s_1 p + \dots + s_{k-1} p^{k-1})}{p^k} + \mathbf{Q}^{(r)} = (\varphi\beta)\left(\frac{b}{p^k}\right) = \gamma\left(\frac{c}{p^k}\right) = \frac{c}{p^k} + \mathbf{Q}^{(r)},$$

откуда следует, что  $c - b\pi \in p^k \mathbf{Q}_p^*$  для всех  $k$ . Значит,  $c = b\pi$ , а это противоречит выбору элемента  $\pi$ . Итак,  $A \in \mathcal{E}(V)$ , что завершает построение примера.

**Замечания:** 1) Если записать полученное для  $\rho, \sigma, \tau$  неравенство в виде

$$(\rho \wedge \rho) \vee (\rho \wedge \tau) \vee (\sigma \wedge \rho) \vee (\sigma \wedge \tau) \neq (\rho \vee \sigma) \wedge (\rho \vee \tau),$$

то нетрудно заметить, что в рассмотренном примере мы фактически построили вполне разложимые абелевы группы  $K = V \oplus X$  и  $L = V \oplus Y$  ранга 2 такие, что выполнено  $H_{K \otimes L} \neq H_K \wedge H_L$ . Итак, условия, налагаемые теоремой 6 на группу, которая порождает радикал  $H_V$ , действительно существенны.

2) С учетом теоремы 9 для тех же радикалов  $\rho, \sigma, \tau$  имеем

$$\rho \vee (\sigma \wedge (\rho \vee \tau)) = \rho \vee (\sigma \wedge \rho) \vee (\sigma \wedge \tau) = \rho \vee (\sigma \wedge \tau) \neq (\rho \vee \sigma) \wedge (\rho \vee \tau),$$

при этом, очевидно,  $\rho \leq \rho \vee \tau$ . Отсюда получаем, что большая решетка  $\mathcal{IR}$  не является модулярной, как и отмечалось в начале параграфа. Ясно, что не будет модулярной и подрешетка большой решетки  $\mathcal{IR}$ , порожденная подмножеством  $\mathcal{L}$ .

В свете теоремы 6 и следствия 7 уместен следующий вопрос. Пусть  $V \neq 0$  и известно, что для всякого класса  $\mathcal{U}$ , содержащего хотя бы одну непериодическую группу, выполнено  $H_V \wedge H_{\mathcal{U}} = H_{V \otimes \mathcal{U}}$ . Следует ли отсюда, что  $H_V \in \mathcal{L}_2$ ? Ответ пока неизвестен.

## Литература

- [1] Тимошенко, Е.А. Т-радикалы в категории абелевых групп / Е.А. Тимошенко // Фундамент. и прикл. мат. – 2007. – Т. 13. – №3. – С. 193–208.
- [2] Кашу, А.И. Радикалы и кручения в модулях / А.И. Кашу. – Кишинев: Штиинца, 1983. – 156 с.
- [3] Мишина, А.П. Абелевы группы и модули / А.П. Мишина, Л.А. Скорняков. – М.: Наука, 1969. – 152 с.
- [4] Göbel, R. Semi-rigid classes of cotorsion-free abelian group / R. Göbel, S. Shelah // J. Algebra. – 1985. – Vol. 93. – №1. – P. 136–150.
- [5] Gardner, B.J. Two notes on radicals of abelian groups / B.J. Gardner // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1972. – Vol. 13. – №3. – P. 419–430.
- [6] Dickson, S.E. On torsion classes of abelian groups / S.E. Dickson // J. Math. Soc. Japan. – 1965. – Vol. 17. – №1. – P. 30–35.



- [7] Курош, А.Г. Радикалы в теории групп / А.Г.Курош // Сиб. мат. журн. – 1962. – Т. 3. – №6. – С. 912–931.

Поступила в редакцию 29/*VIII*/2008;  
в окончательном варианте — 29/*VIII*/2008.

## ON THE DISTRIBUTIVE LAWS FOR T-RADICALS OF ABELIAN GROUPS<sup>3</sup>

© 2008 E.A. Timoshenko<sup>4</sup>

The paper is devoted to the radicals defined by means of tensor product of Abelian groups. A question: what distributive laws hold for such radicals is considered?

**Keywords and phrases:** *radical, tensor product, Abelian groups, distributivity.*

Paper received 29/*VIII*/2008.

Paper accepted 29/*VIII*/2008.

---

<sup>3</sup>Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. A.N. Panov.

<sup>4</sup>Timoshenko Egor Aleksandrovich ([tea471@mail.tsu.ru](mailto:tea471@mail.tsu.ru)), Dept. of General Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia.