

УДК 517.95

ОЦЕНКА КОМПОНЕНТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ КОЛЕБАНИЯ В ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ¹

© 2008 А.С.Рябенко²

Рассматривается начально-краевая задача, описывающая в линейном приближении малые акустическо-гравитационные колебания вязкой стратифицированной жидкости. На основе принципа локализации получена оценка скорости стабилизации решения задачи при $t \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: *начально-краевая задача, линейное приближение, вязкость, сжимаемость, стратифицированная жидкость.*

1. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho_0(x)} \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0(x)} \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0(x)} q(t, x) &= F(t, x), \\ \frac{\partial q(t, x)}{\partial t} - \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2} \right) \rho_0(x) V(t, x) + \rho_0(x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial q(t, x)}{\partial t} - c^{-2} \frac{\partial P(t, x)}{\partial t} - \frac{N^2(x)}{g} \rho_0(x) V(t, x) &= 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$V(t, x)|_{t=0} = P(t, x)|_{t=0} = q(t, x)|_{t=0} = 0, \quad V(t, x)|_{x=0} = V(t, x)|_{x=\infty} = 0. \quad (2)$$

Система дифференциальных уравнений (1) описывает в линейном приближении малые одномерные (в направлении однородного поля тяготения) акустическо-гравитационные колебания вязкой жидкости (см. [1]).

Использованы следующие обозначения: $V(t, x)$ — скорость движения частицы, находящейся в момент $t > 0$ в точке $x > 0$; $q(t, x)$, $P(t, x)$ — отклонения

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором И.А.Блатовым.

²Рябенко Александр Сергеевич (alexr-83@yandex.ru), кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей Воронежского государственного университета, 394006, Россия, г.Воронеж, Университетская пл., 1.

от стационарной плотности и давления; $\rho_0(x)$ — стационарная плотность; ν — коэффициент вязкости; c — скорость распространения звука; g — ускорение свободного падения; $N^2(x) = -(\rho'_0(x)\rho_0^{-1}(x) + gc^{-2})g$ — частота Вейсяля—Брента.

Модель (1) отличается от рассмотренной в работах [2–4] наличием переменных коэффициентов, обусловленным отказом от предположения Буссинеска относительно стационарной плотности $\rho_0(x)$.

2. Основной целью работы является получение оценки скорости стабилизации решения при $t \rightarrow \infty$ на основе принципа локализации, развитого в работах [4–6] для систем уравнений гидродинамического типа с постоянными коэффициентами и в работах [7, 8] для начально-краевой задачи уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. Результаты получены на основе установления связи между скоростью убывания решения задачи и геометрией области аналитичности образа Лапласа $(L_{t \rightarrow \gamma})$ решения. Аналитичность образа решения устанавливается на основе априорных оценок образа решения. На этой же основе доказана однозначная разрешимость как исходной задачи (1)–(2), так и задачи в образах. В работе приводятся оценки скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ компоненты решения $V(t, x)$.

Сформулируем условия, используемые в работе.

Условие 1: Будем говорить, что функция $\rho_0(x)$ удовлетворяет условию 1, если $\rho_0(x) \in C^2[0, \infty)$ и существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2, c_1 > 0$ такие, что при $x \in [0, \infty)$ выполнены неравенства $\varepsilon_1 \leq \rho_0(x) \leq \varepsilon_2, |\rho'_0(x)| \leq c_1$.

Условие 2: Будем говорить, что функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 2, если $F(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных $x \in [0, \infty), t > 0$ и $F(t, x)e^{\delta t} \in L_1(R_{++}^2)$ при некотором $\delta > 0$.

Условие 3: Будем говорить, что функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, если для функций $\frac{\partial^k F(t, x)}{\partial t^k}$, где $k = 0, 1, 2$, выполнено условие 2,

$F(t, x)|_{t=0} = 0, \frac{\partial F(t, x)}{\partial t}|_{t=0} = 0$ и $(1+x) \int_0^\infty \left| \frac{\partial^k F(t, x)}{\partial t^k} \right| e^{\delta t} dt \in L_2[0, \infty)$, где $k = 0, 1, 2$.

Определение: Будем говорить, что функции $V_1(t, x), q_1(t, x), P_1(t, x)$ принадлежат классу T_a , если справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k V_1(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq c_2 e^{at} \quad (k = 0, 1), \\ \left| \frac{\partial^k V_1(t, x)}{\partial x^k} \right| &\leq c_2 e^{at} \quad (k = 1, 2), \\ \left| \frac{\partial^k q_1(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq c_2 e^{at} \quad (k = 0, 1), \\ \left| \frac{\partial^k P_1(t, x)}{\partial t^k} \right| &\leq c_2 e^{at} \quad (k = 0, 1), \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right| \leq c_2 e^{at} \quad (k = 0, 1).$$

Ниже преобразования Лапласа ($L_{t \rightarrow \gamma}$) функций $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$, $F(t, x)$ будем обозначать $v(\gamma, x)$, $\rho(\gamma, x)$, $p(\gamma, x)$, $f(\gamma, x)$ соответственно.

После применения преобразования Лапласа ($L_{t \rightarrow \gamma}$) к задаче (1)–(2) и некоторых вычислений мы получаем, что

$$\begin{aligned} \rho(\gamma, x) &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{N^2(x)}{g} + gc^{-2} \right) \rho_0(x) v(\gamma, x) - \frac{\rho_0(x)}{\gamma} \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}, \\ p(\gamma, x) &= c^2 \rho(\gamma, x) - \frac{c^2 N^2(x) \rho_0(x)}{g\gamma} v(\gamma, x), \end{aligned} \quad (3)$$

а функция $v(\gamma, x)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v\gamma + \rho_0(x)c^2}{\gamma} \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right) - \gamma \rho_0(x) v(\gamma, x) &= -f_*(\gamma, x), \\ v(\gamma, x)|_{x=0} &= v(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_*(\gamma, x) = \rho_0(x)f(\gamma, x)$.

3. Справедливы следующие леммы и теоремы.

Теорема 1: Пусть функции $f_*(\gamma, x)$, $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D — это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (4), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\psi_1 > 0, 5\pi$ такое, что при $\gamma \in D \cap ((|\arg \gamma| \geq \varepsilon) \cap (|\arg \gamma| \leq \psi_1)) \cup (|\arg \gamma| \leq \psi_2)$, где $\psi_2 < 0, 5\pi$, справедлива следующая оценка:

$$\left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_3 \|f_*(\gamma, x)\|^2,$$

где $c_3 = c_3(\psi_1, \psi_2) : 0 < \varepsilon_3 < c_3(\psi_1, \psi_2) < \varepsilon_4$.

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью умножения уравнения (4) на $\bar{v}(\gamma, x)$ и интегрирования по x от 0 до ∞ с последующими оценками.

Лемма 1: Пусть функции $f_*(\gamma, x)$, $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D — это некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (4), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для достаточно малых γ , лежащих между кривой $l(\psi) = -\psi^2 v^{-1} \rho_1 c^2 + i b v^{-1} \rho_1 c^2 \psi$ (здесь $\psi \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]$) и мнимой осью (включая точки, лежащие на l и мнимой оси) и принадлежащих D , выполнена оценка

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \sin 0, 5\psi \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 (\sin 0, 5\psi)^2 \|v(\gamma, x)\|^2 &\leq \\ &\leq c_4 \|f_*(\gamma, x)\|^2. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1 проводится на основе теоремы 1.

Лемма 2: Пусть функции $(1+x)f_*(\gamma, x)$, $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном $\gamma \in D$, где D — некоторая область в комплексной плоскости, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (4), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для достаточно малых γ , лежащих между контуром $l(\psi)$ и мнимой осью (включая точки, лежащие на контуре $l(\psi)$ и мнимой оси), верна оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_5 \|f_*(\gamma, x)(1+x)\|^2,$$

а при достаточно малых $\gamma \in D$ и таких, что $|\varphi| < 0,5\pi$, где $\varphi = \arg \gamma$, верны оценки

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + |\gamma| \cos \varphi \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma|^2 (\cos \varphi)^2 \times \\ \times \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_6 (|\gamma| \cos \varphi)^{-1} + (\cos \varphi)^{-2} + 1 \|f_*(\gamma, x)\|^2, \\ \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + |\gamma| \cos \varphi \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_7 \|f_*(\gamma, x)(1+x)\|^2. \end{aligned}$$

Пусть $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В дальнейшем через $l_\delta^{\alpha, \beta}$ будем обозначать контур следующего вида: $l_\delta^{\alpha, \beta} = l_0 \cup l \cup l_1$, где $l = -\xi^2 \alpha + i\xi \beta$ при $\xi \in [-\delta, \delta]$, $l_0 = -\delta^2 \alpha - i(\delta + \xi)\beta$ при $\xi \in [0, \infty)$, $l_1 = -\delta^2 \alpha + i(\delta + \xi)\beta$ при $\xi \in [0, \infty)$.

Теорема 2: Пусть функция $f_*(\gamma, x)$ принадлежит пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при $\operatorname{Re} \gamma \geq -\varepsilon$, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда найдется контур $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$ такой, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$, у задачи (4) существует единственное решение из $H^2[0, \infty)$.

Доказательство: Обозначим $\rho_\varepsilon(x) = \rho_0(\varepsilon x)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v\gamma + \rho_\varepsilon(x)c^2}{\gamma} \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right) - \gamma \rho_\varepsilon(x) v(\gamma, x) = -f_*(\gamma, x), \\ v(\gamma, x)|_{x=0} = v(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При $\varepsilon = 1$ задача (5) переходит в задачу (4). При $\varepsilon = 0$ существует контур $l_{\delta_1}^{\alpha_1, \beta_1}$ такой, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_1}^{\alpha_1, \beta_1}$, у задачи (5) существует единственное решение из $H^2[0, \infty)$ (см. [4]). Из теоремы 1, лемм 1 и 2 следует, что существует контур $l_{\delta_2}^{\alpha_2, \beta_2}$ такой, что равномерно по $\varepsilon \in [0, 1]$ при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_2}^{\alpha_2, \beta_2}$, для решения задачи (5) выполнена оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 v_\varepsilon(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\| + \left\| \frac{\partial v_\varepsilon(\gamma, x)}{\partial x} \right\| + \|v_\varepsilon(\gamma, x)\| \leq c_8 \|f_*(\gamma, x)\|.$$

При помощи метода продолжения по параметру из последней оценки получаем, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее некоторого контура $l_{\delta_3}^{\alpha_3, \beta_3}$, задача (4) разрешима в $H^2[0, \infty)$.

Теорема 3: Пусть функции $f(\gamma, x)$, $\frac{\partial f(\gamma, x)}{\partial \gamma}$, $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)$ по переменной x при каждом фиксированном γ , лежащем правее некоторого контура $l_{\delta}^{\alpha, \beta}$, функция $v(\gamma, x)$ является решением задачи (4), для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда существует контур $l_{\delta_4}^{\alpha_4, \beta_4}$ такой, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_4}^{\alpha_4, \beta_4}$, функции $v(\gamma, x)$, $\frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2}$ аналитичны по γ при каждом $x \in [0, \infty)$.

Доказательство: Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} & (v\gamma + \rho_0(x)c^2)\frac{\partial^2 w(\gamma, x)}{\partial x^2} + c^2\rho'_0(x)\frac{\partial w(\gamma, x)}{\partial x} - \gamma^2\rho_0(x)w(\gamma, x) = \\ & = -\rho_0(x)f(\gamma, x) - \gamma\rho_0(x)\frac{\partial f(\gamma, x)}{\partial \gamma} - v\frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} + 2\gamma\rho_0(x)v(\gamma, x), \\ & w(\gamma, x)|_{x=0} = w(\gamma, x)|_{x=\infty} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из теоремы 1, лемм 1 и 2 следует, что существует контур $l_{\delta_4}^{\alpha_4, \beta_4}$ такой, что при каждом фиксированном γ , лежащем правее контура $l_{\delta_4}^{\alpha_4, \beta_4}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 \widetilde{v}(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \widetilde{v}(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + \|\widetilde{v}(\gamma, x)\|^2 \leq c_9 \left(|\Delta\gamma| \times \right. \\ & \times \|f(\gamma + \Delta\gamma, x)\|^2 + \|f(\gamma + \Delta\gamma, x) - f(\gamma, x)\|^2 + \\ & \left. + \left\| \widehat{f}(\gamma, x) - \frac{\partial f(\gamma, x)}{\partial \gamma} \right\|^2 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\widetilde{v}(\gamma, x) = \frac{v(\gamma + \Delta\gamma, x) - v(\gamma, x)}{\Delta\gamma} - w(\gamma, x)$, $\widehat{f}(\gamma, x) = \frac{f(\gamma + \Delta\gamma, x) - f(\gamma, x)}{\Delta\gamma}$. Из (7) следует утверждение теоремы.

Лемма 3: Пусть для функции $v(\gamma, x)$ выполнена оценка

$$n \left\| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right\|^2 + A \left\| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right\|^2 + A^2 \|v(\gamma, x)\|^2 \leq c_{10} \|f(\gamma, x)\|^2$$

при $A > 0$, $n = 0; 1$ и некоторых γ , тогда при тех же γ , равномерно по $x \in [0, \infty)$, будут справедливы оценки ($n = 1$)

$$|v(\gamma, x)| \leq c_{11} A^{-3/4} \|f(\gamma, x)\|,$$

$$\left| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right| \leq c_{12} A^{-1/4} \|f(\gamma, x)\|$$

и ($n = 0$)

$$|v(\gamma, x)| \leq c_{13} A^{-1/2} \|f(\gamma, x)\|.$$

Доказательство: Пусть $n = 1$. Воспользуемся неравенством, полученным в [9]:

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \left\{ \left| \frac{\partial^r v(\gamma, x)}{\partial x^r} \right| \right\}^2 \leq \varepsilon^{2s-2r-1} \left\| \frac{\partial^s v(\gamma, x)}{\partial x^s} \right\|^2 + c_{14} \varepsilon^{-2r-1} \|v(\gamma, x)\|^2,$$

где $0 \leq r < s - 0,5$, $\varepsilon > 0$, норма берется в $L_2[0, \infty)$ по переменной x . С помощью последнего неравенства получаем следующие оценки:

$$A^{3/2} \sup_{x \in [0, \infty)} (|v(\gamma, x)|)^2 \leq A^k \left\| \frac{\partial^{2-k} v(\gamma, x)}{\partial x^{2-k}} \right\|^2 + c_{15} A^2 \|v(\gamma, x)\|^2, \quad k = 0, 1. \quad (8)$$

Из (8) следует первая из оценок леммы. Остальные оценки доказываются аналогично.

Лемма 4: Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3. Тогда функция $f(\gamma, x) = L_{t \rightarrow \gamma} [F(t, x)]$ аналитична по γ при $\operatorname{Re} \gamma \geq -\varepsilon$, где $\varepsilon < \delta$, причем верна оценка $\|f(\gamma, x)\| \leq c_{16}(1 + |\gamma|)^{-2}$.

Теорема 4: Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда функции $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ такие, что $V(t, x) = L_{\gamma \rightarrow t}^{-1} [v(\gamma, x)]$, $q(t, x) = L_{\gamma \rightarrow t}^{-1} [\rho(\gamma, x)]$, $P(t, x) = L_{\gamma \rightarrow t}^{-1} [p(\gamma, x)]$, являются классическим решением задачи (1)–(2) и принадлежат классу T_a при любом $a > 0$.

Доказательство: Из теорем 1, 2 и леммы 4 следует, что при $\operatorname{Re} \gamma \geq a$ у задачи (4) существует единственное решение $v(\gamma, x)$ из $H^2[0, \infty)$. Из теоремы вложения $C^1[0; \infty) \subset H^2[0; \infty)$ следует, что $v(\gamma, x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x . Из (4) и условия на функцию $F(t, x)$ следует, что $v(\gamma, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x . Из теорем 1, 3 и леммы 4 следует, что $v(\gamma, x)$ аналитична по γ при $\operatorname{Re} \gamma \geq a$. Из теорем 1, лемм 3 и 4 получаем, что при $\operatorname{Re} \gamma \geq a$ справедливы следующие оценки:

$$|v(\gamma, x)| \leq c_{17}(1 + |\gamma|)^{-11/4}, \quad \left| \frac{\partial v(\gamma, x)}{\partial x} \right| \leq c_{17}(1 + |\gamma|)^{-9/4}. \quad (9)$$

Из (3), (4) и (9) следуют неравенства

$$|p(\gamma, x)| + |\rho(\gamma, x)| \leq c_{18}(1 + |\gamma|)^{-13/4}, \quad \left| \frac{\partial^2 v(\gamma, x)}{\partial x^2} \right| \leq c_{19}(1 + |\gamma|)^{-7/4}. \quad (10)$$

Из оценок (9), (10) следует, что функции $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ (где $a > 0$) принадлежат классу T_a .

Из (9) и предельной теоремы о преобразовании Лапласа следует, что $\lim_{t \rightarrow +0} V(t, x) = \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} |\gamma v(\gamma, x)| = 0$.

Равенства $\lim_{t \rightarrow +0} \rho(t, x) = \lim_{t \rightarrow +0} P(t, x) = 0$ доказываются аналогично. Также из оценки (9) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что $V(t, x)|_{x=0} = V(t, x)|_{x=\infty} = 0$.

Теорема 5: Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда решение $V(t, x)$, $q(t, x)$, $P(t, x)$ задачи (1)–(2) единственно в классе функций T_a при произвольном $a > 0$.

Доказательство проводится при помощи априорной оценки из теоремы 1.

Теорема 6: Пусть функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию 3, для функции $\rho_0(x)$ выполнено условие 1. Тогда для компоненты $V(t, x)$ решения задачи (1)–(2) справедлива при $t \rightarrow \infty$ оценка $|V(t, x)| \leq c_{21}t^{-1/4}$ с постоянной $c_{21} > 0$, равномерной по $x \in [0; \infty)$.

Доказательство: Из интегральной теоремы Коши, теорем 1–3 и лемм 1–4 следует, что справедливо представление

$$V(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{\delta_4}^{\alpha_4, \beta_4}} e^{\gamma t} v(\gamma, x) d\gamma. \quad (11)$$

После параметризации контура $l_{\delta_4}^{\alpha_4, \beta_4}$ с учетом представления (11) и оценок, полученных в теореме 1 и леммах 1–4, имеем, что

$$|V(t, x)| \leq c_{20} \left(\int_0^{\delta} e^{-a\xi^2 t} \xi^{-1/2} d\xi + O(e^{-\varepsilon_5 t}) \right) \leq c_{21}t^{-1/4},$$

где $a > 0$, $\varepsilon_5 > 0$.

Литература

- [1] Бреховских, Л.М. Введение в механику сплошной среды / Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
- [2] Глушко, А.В. Асимптотические колебания и интрузия в вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости / А.В. Глушко // Доклады РАН. – 1999. – Т. 365. – №1. – С. 26–30.
- [3] Глушко, А.В. О малых одномерных акустических колебаниях стратифицированной жидкости в полупространстве / А.В. Глушко, А.С. Рябенко // Вестн. ВГУ Сер.: Физика, Математика. – 2008. – №1. – С. 226–231.
- [4] Глушко, А.В. Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А.В. Глушко — Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2003. – 300 с.
- [5] Глушко, А.В. Теорема о локализации для задачи динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости / А.В. Глушко, С.О. Рыбаков // Сибирский математический журнал. – 1992. – Т. 33. – №1. – С. 32–43.
- [6] Глушко, А.В. Асимптотика по времени решения начально-краевой задачи в полупространстве для уравнения динамики вращающейся вязкой сжимаемой жидкости / А.В. Глушко, С.О. Рыбаков // Сибирский математический журнал. – 1992. – Т. 33. – №4. – С. 43–58.
- [7] Рябенко, А.С. Оценка при $t \rightarrow \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности / А.С. Рябенко // Вестн. ВГУ. Сер.: Физика, Математика. – 2007. – №1. – С. 95–99.

- [8] Рябенко, А.С. Оценка при $t \rightarrow \infty$ решения задачи о распределении тепла в полосе с переменным коэффициентом теплопроводности / А.С. Рябенко // Труды математического факультета. – Воронеж, 2007. – Вып. 11. – С. 175–185.
- [9] Глушко, В.П. Неравенства для норм в пространствах L_p с весом / В.П. Глушко, С.Г. Крейн // Сиб. мат. журн. – 1960. – Т. 1. – №3. – С. 343–382.

Поступила в редакцию 29/VIII/2008;
в окончательном варианте — 29/VIII/2008.

COMPONENTS ESTIMATION FOR THE SOLUTION OF COMPRESSIBLE STRATIFIED VISCOUS FLUID OSCILLATIONS PROBLEM³

© 2008 A.S. Ryabenko⁴

Initial boundary-value problem for small acoustical-gravitational oscillations of stratify fluid in linear approximation is discussed. Due to localization principle the estimation of stabilization rate of the solution while $t \rightarrow \infty$ is obtained.

Keywords and phrases: *initial boundary-value problem, linear approximation, viscosity, compressibility, stratify fluid.*

Paper received 29/VIII/2008.

Paper accepted 29/VIII/2008.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) I.A. Blatov.

⁴Ryabenko Alexandr Sergeevich, Dept. of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russia.