УДК 512.572

О РОСТЕ НЕКОТОРЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР И АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА[1]

© 2008 С.М. Рацеев[2]

В случае произвольного поля получено асимптотическое поведение роста ассоциативной алгебры верхнетреугольных матриц. Показано, что если идеал тождеств ассоциативного многообразия содержит элемент $[x_1, x_2]...[x_{2s-1}, x_{2s}]$, то экспонента такого многообразия является целой. Также для некоторых алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом получен базис тождеств и оценки роста.

Ключевые слова: *ассоциативная алгебра, алгебра Лейбница, многообразие, базис, оценка роста.*

Введение

Пусть $K(X)$ — свободная алгебра над полем K, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через A некоторую PI-алгебру. Совокупность всех тождеств алгебры A образует T-идеал $Id(A)$ в свободной алгебре $K(X)$. Пусть V — многообразие алгебр, порожденное алгеброй A. Тогда алгебра $K(X, V) = K(X)/Id(A)$ является относительно свободной алгеброй многообразия V.

Пусть P_n — подпространство в пространстве $K(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии V содержится в его полилинейных компонентах $P_n(V) = P_n/(P_n \cap Id(A))$, $n = 1, 2, ...$ Асимптотическое поведение последовательности $c_n(V) = dim\ P_n(V)$, $n = 1, 2, ...,$ называют ростом многообразия V.

Для произвольного многообразия V можно определить нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{\mathrm{Exp}}(V) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \qquad \overline{\mathrm{Exp}}(V) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Рацеев Сергей Михайлович (`RatseevSM@rambler.ru`), кафедра информационной безопасности Ульяновского государственного университета, 432700, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

В случае их равенства введем обозначение $\mathrm{Exp}(V) = \underline{\mathrm{Exp}}(V) = \overline{\mathrm{Exp}}(V)$.

1. Рост ассоциативных многообразий, в которых выполнено тождество $[x_1, x_2]...[x_{2s-1}, x_{2s}] = 0$

Хорошо известно (А. Регев [1]), что если в ассоциативной алгебре A выполнено нетривиальное тождество, а значит многообразие V нетривиально, то последовательность $c_n(V)$ экспоненциально ограничена, то есть существуют такие константы α и a, что $c_n(V) \leqslant \alpha a^n$ для любого n. В случае основного поля нулевой характеристики М.В. Зайцев и А. Джамбруно [2–3] доказали, что экспонента произвольного нетривиального ассоциативного многообразия существует и является целым числом.

Под обозначением $[x_1, x_2, ..., x_n]$ будем понимать левонормированную расстановку коммутаторов $[[[x_1, x_2], x_3], ..., x_n]$. Обозначим через V_s ассоциативное многообразие, определенное тождеством

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]...[x_{2s-1}, x_{2s}] = 0. \tag{1.1}$$

Пусть $UT_s = UT_s(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка s над полем K. Очевидно, что $UT_s \in V_s$. Более того, для данной алгебры имеют место следующие свойства (см. [4–5. С. 52]).

Теорема 1: (i) В случае произвольного поля K базис полилинейной компоненты $P_n(UT_s)$ состоит из элементов вида

$$x_{i_1}...x_{i_k}[x_{11}, ..., x_{1a_1}]...[x_{c1}, ..., x_{ca_c}], \tag{1.2}$$

где $\{x_{i_1}, ..., x_{i_k}, x_{ij}\} = \{x_1, ..., x_n\}$, $x_{i_1} < ... < x_{i_k}$, $k \geqslant 0$, $a_1, ..., a_c \geqslant 2$, $c \leqslant s-1$ и переменные в каждом коммутаторе $[x_{j1}, ..., x_{ja_j}]$ упорядочены следующим образом:

$$x_{j1} > x_{j2} < x_{j3} < ... < x_{ja_j}.$$

(ii) Если поле K бесконечно, то полилинейное тождество (1.1) порождает идеал тождеств алгебры UT_s.

В работе [6] показано, что в случае поля нулевой характеристики ассоциативное многообразие V имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда $G, UT_2 \notin V$, где G — бесконечномерная алгебра Грассмана.

Пусть $A_c = \{[x_1, x_2]...[x_{2c-1}, x_{2c}]\}^T$ — идеал тождеств многообразия V_c. Очевидно, что $P_n(V_s) \cong \bigoplus_{c=0}^{s-1} P_n(A_c/A_{c+1})$, так как $A_0/A_s \cong K(X, V_s)$, где $A_0 = K(X)$ — свободная ассоциативная алгебра. Пространство $P_n(A_c/A_{c+1})$ есть линейная оболочка следующих элементов:

$$P_n(A_c/A_{c+1}) = < x_{i_1}...x_{i_k}[x_{11}, ..., x_{1a_1}]...[x_{c1}, ..., x_{ca_c}] \mid$$
$$k \geqslant 0, \ a_1, ..., a_c \geqslant 2; \quad \{x_{i_1}, ..., x_{i_k}, x_{ij}\} = \{x_1, ..., x_n\} >_K .$$

Заметим, что элементы $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$, а также элементы $x_{j3}, ..., x_{ja_j}$, $j = 1, ..., c$ можно менять местами, так как, меняя местами два рядом стоящих элемента, мы дополнительно получаем элемент из A_{c+1}. Данное свойство назовем $(*)$.

Теорема 2: Пусть V — подмногообразие в V_s и основное поле произвольно. Тогда существуют такие константы d, N, α и β, причем $d \in \{0, 1, ..., s\}$, что для любого $n \geqslant N$ будет выполняться следующее двойное неравенство:

$$n^{\beta} d^n \leqslant c_n(V) \leqslant n^{\alpha} d^n.$$

Доказательство данной теоремы проходит аналогичным образом, как и доказательство такого же двойного неравенства для многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом (см. [7]), с использованием пространств $P_n(Id(V \cap V_c)/Id(V \cap V_{c+1}))$ и свойства $(*)$.

2. Взаимосвязь алгебры UT_s и многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом

Алгебра Лейбница над полем K — неассоциативная алгебра, которая определяется тождеством

$$(xy)z = (xz)y + x(yz),$$

т.е. правое умножение на элемент алгебры является дифференцированием. Любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

В элементах будем опускать скобки при их левонормированной расстановке, то есть $a_1 a_2 ... a_n = (((a_1 a_2) a_3 ...) a_n)$.

Пусть W_s — многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождеством

$$x_0(x_1x_2)(x_3x_4)...(x_{2s-1}x_{2s}) = 0.$$

В случае если характеристика основного поля равна нулю, то многообразие W_2 имеет почти полиномиальный рост (см. [8]). Более того, в работе [9] было показано, что многообразие алгебр Лейбница V имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда $W_2, N_2A \not\subset V \subset W_s$ для некоторого s, где N_2A — многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) = 0.$$

Обозначим через UT_s^0 алгебру верхнетреугольных $s \times s$ матриц над полем K с нулевым умножением, то есть $a^0 b^0 = 0$ для любых $a^0, b^0 \in UT_s^0$. Рассмотрим прямую сумму векторных пространств UT_s^0 и UT_s:

$$U_s = UT_s^0 \oplus UT_s.$$

В пространстве U_s определим умножение элементов следующим образом:

$$(a^0 + a)(b^0 + b) = (a^0 b)^0 + [a, b].$$

Нетрудно проверить, что $U_s \in W_s$.

Обозначим через X_i оператор правого умножения на элемент x_i:

$$yX_i = yx_i, \quad y(X_iX_j) = (yx_i)x_j,$$

где y, x_i, x_j — элементы свободной неассоциативной алгебры $K(X)$.

Предложение: Пусть поле K бесконечно.

1) В алгебре UT_s выполнено полилинейное тождество

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{2.1}$$

тогда и только тогда, когда в алгебре U_s выполняется полилинейное тождество

$$yf(X_1, X_2, ..., X_n) = 0. \tag{2.2}$$

2) Полиномы

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \quad f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.3}$$

линейно независимы в пространстве $P_n(UT_s)$ тогда и только тогда, когда линейно независимы в пространстве $P_{n+1}(U_s)$ следующие полиномы:

$$x_1 f_i(\widehat{X_1}, X_2, ..., X_{n+1}), ..., x_{n+1} f_i(X_1, X_2, ..., \widehat{X_{n+1}}), \quad i = 1...m, \tag{2.4}$$

где символ $\widehat{\ }$ означает, что соответствующий элемент пропущен.

Доказательство: 1) Пусть в UT_s выполнено тождество (2.1). Тогда полином $f(x_1, ..., x_n)$ есть линейная комбинация элементов следующего вида (теорема 1):

$$...[x_{i_1}, x_{i_2}]...[x_{i_3}, x_{i_4}]...[x_{i_{2s-1}}, x_{i_{2s}}]... \ .$$

Подействовав эндоморфизмом $...[X_{i_1}, X_{i_2}]...[X_{i_3}, X_{i_4}]...[X_{i_{2s-1}}, X_{i_{2s}}]...$ на элемент y, получим такой элемент:

$$y...[X_{i_1}, X_{i_2}]...[X_{i_3}, X_{i_4}]...[X_{i_{2s-1}}, X_{i_{2s}}]... = y...(x_{i_1} x_{i_2})...(x_{i_3} x_{i_4})...(x_{i_{2s-1}} x_{i_{2s}}),$$

который принадлежит идеалу тождеств алгебры U_s. Поэтому в алгебре U_s выполнено тождество $yf(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$.

Обратно, пусть в алгебре U_s выполнено тождество (2.2). Предположим, что тождество (2.1) не выполнено в алгебре UT_s. Тогда найдутся такие элементы $a_1, ..., a_n \in UT_s$, что $f(a_1, ..., a_n) = b \neq 0$. Произведем следующую подстановку в (2.2):

$$y \to E^0, \ \ x_1 \to a_1, \ \ x_2 \to a_2, ..., x_n \to a_n,$$

где E^0 — единичная матрица из алгебры UT_s^0. Получаем, что

$$yf(X_1, X_2, ..., X_n) \,|_{y \to E^0, \ \ x_1 \to a_1, ..., x_n \to a_n} = b^0 + c,$$

где $0 \neq b^0 \in UT_s^0$, $c \in UT_s$. Поэтому тождество (2.2) не выполнено в алгебре U_s. Противоречие. Таким образом, тождество (2.2) в алгебре U_s влечет тождество (2.1) в алгебре UT_s.

2) Пусть элементы (2.3) линейно независимы в $P_n(UT_s)$. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m, \ \ 1 \leqslant j \leqslant n+1} \alpha_{ij} x_j f_i(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., X_{n+1}) = 0.$$

Предположим, что $\alpha_{ij} \neq 0$ для некоторых i и j. Подставим в данную линейную комбинацию элемент x_j^2 вместо элемента x_j. Применяя тождество

$y(xx) = 0$, которое справедливо в любой алгебре Лейбница, получим такую линейную комбинацию:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \alpha_{ij} x_j^2 f_i(X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., X_{n+1}) = 0.$$

В силу пункта 1), приходим к выводу, что $\alpha_{ij} = 0$. Поэтому элементы (2.4) линейно независимы в пространстве $P_{n+1}(U_s)$.

Если же элементы (2.3) линейно зависимы в $P_n(UT_s)$, то по пункту 1) элементы

$$y f_i(X_1, X_2, ..., X_n), \quad i = 1, ..., m,$$

будут линейно зависимыми в $P_{n+1}(U_s)$, что означало бы линейную зависимость элементов (2.4). Предложение доказано.

Теорема 3: Пусть K — произвольное поле. Тогда верно следующее.

(i) Базис полилинейной компоненты $P_n(U_s)$ состоит из элементов вида

$$x_m x_{i_1} ... x_{i_k} (x_{11} ... x_{1a_1}) ... (x_{c1} ... x_{ca_c}), \tag{2.5}$$

где $m = 1, 2, ...n$, $\{x_m, x_{i_1}, ..., x_{i_k}, x_{ij}\} = \{x_1, ..., x_n\}$, $k \geqslant 0$, $a_1, ..., a_c \geqslant 2$, $c \leqslant s - 1$, $x_{i_1} < ... < x_{i_k}$ и переменные в каждой скобке $(x_{j1} ... x_{ja_j})$ упорядочены следующим образом:

$$x_{j1} > x_{j2} < x_{j3} < ... < x_{ja_j}.$$

(ii) Если $char\ K = 0$, то тождество $x_0(x_1x_2)(x_3x_4)...(x_{2s-1}x_{2s}) = 0$ порождает идеал тождеств алгебры U_s.

Доказательство: Покажем справедливость пункта (i). Сначала установим, что пространство $P_n(W_s)$ является линейной оболочкой элементов вида (2.5). Для упрощения записей рассмотрим только случаи $s = 1$ и $s = 2$.

Пусть $s = 1$. В этом случае в многообразии W_1 выполнено тождество $y x_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)} ... x_{\sigma(n)} = y x_1 x_2 ... x_n$, где $\sigma \in S_n$. Поэтому $P_n(W_1)$ есть линейная оболочка таких элементов: $x_i x_1 ... \widehat{x_i} ... x_n$, $i = 1, ..., n$.

Пусть $s = 2$. Применяя правило дифференцирования, будем передвигать переменные в элементе $x_m x_{i_1} ... x_{i_{n-1}}$, начиная со второй позиции. При этом будут получаться элементы вида

$$x_m x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_p} (x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_q}),$$

где $q \geqslant 2$. Меняя местами переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_p}$, будем дополнительно получать элемент из идеала тождеств многообразия W_2, поэтому можно считать, что $i_1 < i_2 < ... < i_p$. В скобке $(x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_q})$ можно менять местами переменные $x_{j_3}, ..., x_{j_q}$, поскольку также будем дополнительно получать элемент из $Id(W_2)$. Применяя тождество $x(yz) = -x(zy)$, которое выполняется в любой алгебре Лейбница, можно менять местами переменные x_{j_1} и x_{j_2}. Далее, применяя тождество

$$y(x_3x_2x_1) = -y(x_1(x_3x_2)) = -y(x_1x_3x_2) + y(x_1x_2x_3) = y(x_3x_1x_2) - y(x_2x_1x_3),$$

получим, что пространство $P_n(W_2)$ есть линейная оболочка элементов требуемого вида.

Покажем линейную независимость элементов (2.5) в пространстве $P_n(U_s)$. Предположим, что для некоторого n элементы вида (2.5) линейно зависимы по модулю идеала тождеств алгебры U_s. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация этих элементов, которая принадлежит $Id(U_s)$:

$$\sum \alpha_{m,i_1,\ldots,i_k,(11,\ldots,1a_1),\ldots,(c1,\ldots,ca_c)} x_m x_{i_1} \ldots x_{i_k} (x_{11} \ldots x_{1a_1}) \ldots (x_{c1} \ldots x_{ca_c}) = 0.$$

Пусть для некоторого набора чисел

$$m, i_1, \ldots, i_k, (11, \ldots, 1a_1), \ldots, (c1, \ldots, ca_c),$$

удовлетворяющего условию (2.5), $\alpha_{m,i_1,\ldots,i_k,(11,\ldots,1a_1),\ldots,(c1,\ldots,ca_c)} \neq 0$. Сделаем следующую подстановку:

$$x_m \to e^0_{11}, \;\; x_{i_1} \to e_{11}, \;\; x_{i_2} \to e_{11}, \ldots, x_{i_k} \to e_{11},$$

$$x_{11} \to e_{12}, \;\; x_{12} \to e_{22}, \;\; x_{13} \to e_{22}, \ldots, x_{1a_1} \to e_{22},$$

$$x_{21} \to e_{23}, \;\; x_{22} \to e_{33}, \;\; x_{23} \to e_{33}, \ldots, x_{2a_2} \to e_{33}, \ldots,$$

$$x_{c1} \to e_{c,c+1}, \;\; x_{c2} \to e_{c+1,c+1}, \;\; x_{c3} \to e_{c+1,c+1}, \ldots, x_{ca_c} \to e_{c+1,c+1}.$$

Тогда получим, что $\alpha_{m,i_1,\ldots,i_k,(11,\ldots,1a_1),\ldots,(c1,\ldots,ca_c)} e^0_{1,c+1} = 0$. Противоречие. Поэтому элементы (2.5) линейно независимы в $P_n(U_s)$ и $P_n \cap Id(U_s) = P_n \cap Id(W_s)$. Тем самым мы установили справедливость пунктов (i) и (ii). Теорема доказана.

Обозначим через N_sA многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)\ldots(x_{2s+1}x_{2s+2}) = 0,$$

а через $UT_s^{(-)}$ — алгебру верхнетреугольных матриц порядка s с умножением $[,]$: $[a,b] = ab - ba$, где $a, b \in UT_s$. Понятно, что $UT^{(-)}_{s+1} \in N_sA$. Аналогично доказательству теоремы 3 проходит доказательство следующей теоремы.

Теорема 4: (i) В случае произвольного поля K базис полилинейной компоненты $P_n(UT^{(-)}_{s+1})$ состоит из элементов вида

$$x_1 x_m x_{i_1} \ldots x_{i_k} (x_{11} \ldots x_{1a_1}) \ldots (x_{c1} \ldots x_{ca_c}),$$

где $m = 2, 3, \ldots n$, $\{x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{ij}\} = \{x_2, \ldots, x_n\}$, $k \geqslant 0$, $a_1, \ldots, a_c \geqslant 2$, $x_{i_1} < \ldots < x_{i_k}$, $c \leqslant s-1$ и переменные в каждой скобке $(x_{j1} \ldots x_{ja_j})$ упорядочены следующим образом:

$$x_{j1} > x_{j2} < x_{j3} < \ldots < x_{ja_j}.$$

(ii) Если $char\ K = 0$, то тождество $(x_1x_2)\ldots(x_{2s+1}x_{2s+2}) = 0$ порождает идеал тождеств алгебры $UT^{(-)}_{s+1}$.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$.

Следствие: В случае произвольного поля выполнены следующие соотношения:

$$c_n(UT^{(-)}_{s+1}) \approx n^s s^{n-s-1},$$

$$c_n(W_s) = c_n(U_s) \approx n^s s^{n-s},$$

$$c_n(V_s) = c_n(UT_s) \approx n^{s-1} s^{n+1-s},$$

где равенство "=" имеет место для любого $n \geqslant 1$.

Доказательство: В работе [10] показано, что $c_n(N_sA) \approx n^s s^{n-s-1}$. Из теорем 1, 3 и 4 следуют такие равенства для любого $n \geqslant 1$:

$$c_n(N_sA) = c_n(UT_{s+1}^{(-)}), \;\; c_n(W_s) = c_n(U_s), \;\; c_n(V_s) = c_n(UT_s),$$

$$(n+1)c_n(UT_s) = c_{n+1}(U_s), \quad c_{n+1}(UT_{s+1}^{(-)}) = c_n(U_s).$$

Тем самым следствие доказано.

Литература

[1] Regev, A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$ / A. Regev // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 77. – №6. – P. 1067–1069.

[2] Giambruno, A. On codimension growth of finitely generated associative algebras / A. Giambruno, M. Zaicev // Adv. Math. – 1998. – V. 140. – P. 145–155.

[3] Giambruno, A., Zaicev, M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate / A. Giambruno, M. Zaicev // Adv. Math. – 1999. – V. 142. – P. 221–243.

[4] Мальцев, Ю.Н. Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц / Ю.Н. Мальцев // Алгебра и логика. – 1971. – Т. 10. С. 393–400.

[5] Drensky, V. Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra / V. Drensky – Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

[6] Кемер, А.Р. Многообразия конечного ранга / А.Р. Кемер // 15 Всесоюзная алгебраическая конференция. – Красноярск, 1979. – Т.2. – С. 73.

[7] Рацеев, С.М. Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница / С.М. Рацеев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2006. – №8 6(46). – С. 70–77.

[8] Mishchenko, S. A Leibniz variety with almost polynomial growth / S. Mishchenko, A. Valenti // J. Pure Appl. Algebra. – 2005. – V.202. – №1–3. – P. 82–101.

[9] Мищенко, С.П. Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница / С.П. Мищенко, О.И. Череватенко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12. – №8. – С. 207–215.

[10] Петроградский, В.М. Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции / В.М. Петроградский // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – №6. – С. 119–138.

Поступила в редакцию 15/*VIII*/2008;
в окончательном варианте — 15/*VIII*/2008.

ON THE GROWTH OF ASSOCIATIVE AND LEIBNIZ ALGEBRAS[3]

© 2008 S.M. Ratseev[4]

In the paper asymptotic behavior of the growth of the algebra of upper triangular matrices is studied. We prove that the growth exponent of any associative variety satisfying identity $[x_1, x_2]...[x_{2s-1}, x_{2s}] = 0$ is integral. For some Leibniz algebras with nilpotent commutator subalgebra a basis of identities and asymptotic behavior of codimensions is obtained.

Keywords and phrases: *associative algebra, Leibniz algebra, manifold, basis, growth estimate.*

Paper received 15/*VIII*/2008.
Paper accepted 15/*VIII*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

[4]Ratseev Sergey Mihaylovich (RatseevSM@rambler.ru), Dept. of Information Security, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432700, Russia.