

УДК 512.7

ДИАГРАММНЫЙ МЕТОД В ИССЛЕДОВАНИИ КОПРИСОЕДИНЕННЫХ ОРБИТ

© 2008 А.Н. Панов¹

В работе по алгебре Ли специального вида строится диаграмма, по которой можно определить индекс и максимальную размерность коприсоединенного представления. Показывается, что расстановка символов в диаграмме зависит от свойств ассоциированной подстановки.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №08-01-00151 и 06-01-00037)

Ключевые слова: алгебра Ли, диаграммный метод, диаграмма, коприсоединенное представление.

Введение

Коприсоединенные орбиты групп Ли интересны, по крайней мере, с двух точек зрения. Согласно методу орбит А.А. Кириллова [1,2], для нильпотентных групп Ли существует взаимно однозначное соответствие между коприсоединенными орбитами и неприводимыми унитарными представлениями в гильбертовых пространствах. Это позволяет решать задачи теории представлений и гармонического анализа в геометрических терминах пространства орбит. С другой точки зрения, коприсоединенные орбиты являются симплектическими многообразиями, и многие гамильтоновы системы классической механики реализуются на этих орбитах [3–5]. Однако сама задача описания всех коприсоединенных орбит для конкретных нильпотентных групп Ли (таких как, например, группа унитарных матриц) является в настоящее время открытой проблемой, интерес к которой не ослабевает [6].

¹Панов Александр Николаевич (apanov@list.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В самой первой работе по методу орбит [2] было получено описание алгебры инвариантов коприсоединенного представления унитарной группы и классификация орбит максимальной размерности. В работе [7] проведена классификация всех коприсоединенных орбит для групп $UT(n, K)$ до порядка меньше или равного семи. В этой же работе получено описание субрегулярных коприсоединенных орбит для произвольного n .

В работе [8] рассматривается семейство орбит, ассоциированных с инволюциями. Частным случаем является семейство орбит максимальной размерности, которой ассоциировано с инволюцией максимальной длины. Получена формула для размерности таких орбит, найдены образующие элементы в определяющем идеале орбиты, для канонической формы на орбите построена поляризация.

Настоящая работа является продолжением работы [9], в которой по каждой алгебре Ли \mathcal{L} , определенной в конце введения, строится некоторая диаграмма $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$. По этой диаграмме можно легко вычислить максимальную размерность коприсоединенной орбиты и определить индекс для \mathcal{L} .

Напомним, что индекс алгебры Ли — минимальная размерность стабилизатора линейной формы на этой алгебре Ли. Для нильпотентных алгебр Ли поле инвариантов коприсоединенного представления является чисто трансцендентным расширением основного поля степени, равной индексу этой алгебры Ли [10].

В [9] диаграмма $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ строится индуктивным методом, который удобен в конкретных примерах и очень не удобен для доказательства каких-либо общих теорем. Хотелось бы иметь некоторую формулу, указывающую какой символ в диаграмме окажется на каждом месте.

Эта задача решается в настоящей работе. По каждой алгебре Ли рассматриваемой алгебре Ли \mathcal{L} строится подстановка $w_{\mathcal{L}}$. Основные результаты работы формулируются в терминах разложения подстановки $w_{\mathcal{L}}$ в произведение отражений и ее действия на отрезке натурального ряда $[1, n]$ (см. теоремы 2.2, 2.6 и 2.7). В заключении работы сформулирована гипотеза о строении поля инвариантов коприсоединенного представления для алгебры Ли \mathcal{L} .

Перейдем к изложению содержания работы. Пусть $N = UT(n, K)$ — группа нижнетреугольных матриц размера $n \times n$ с единицами по диагонали и с элементами из поля K нулевой характеристики. Алгебра Ли $\mathfrak{n} = \mathfrak{ut}(n, K)$ этой группы состоит из нижнетреугольных матриц размера $n \times n$ с нулями по диагонали. Группа N действует на сопряженном пространстве \mathfrak{n}^* по формуле $\text{Ad}_g^* f(x) = f(\text{Ad}_g^{-1} x)$. Это представление называют коприсоединенным представлением. Отождествим симметрическую алгебру $S(\mathfrak{n})$ с алгеброй регулярных функций $K[\mathfrak{n}^*]$ на сопряженном пространстве \mathfrak{n}^* . Отождествим также \mathfrak{n}^* с подпространством верхнетреугольных матриц с нулями по диагонали. Спаривание \mathfrak{n} и \mathfrak{n}^* реализуется с помощью формы Киллинга $(a, b) = \text{Tr}(ab)$, где $a \in \mathfrak{n}$, $b \in \mathfrak{n}^*$. При таком отождествлении коприсоединен-

ное представление имеет вид $\text{Ad}_g^* b = P(\text{Ad}_g b)$, где P — естественная проекция пространства $n \times n$ -матриц на \mathfrak{n}^* .

Напомним, что для любой алгебры Ли \mathfrak{g} алгебра $K[\mathfrak{g}^*]$ является алгеброй Пуассона относительно скобки, для которой $\{x, y\} = [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Симплектические листы этой скобки Пуассона совпадают с орбитами присоединенного представления [1]. Соответственно, алгебра элементов Казимира из $K[\mathfrak{g}^*]$ совпадает с алгеброй инвариантов $K[\mathfrak{g}^*]^L$ коприсоединенного представления. Добавим, что коприсоединенные орбиты произвольной нильпотентной группы Ли являются замкнутыми в топологии Зарисского подмножествами в \mathfrak{g}^* [10, 11.2.4].

В целях упрощения языка будем называть корнем произвольную пару (i, j) , где i, j — натуральные числа от 1 до n и $i \neq j$. Группа подстановок S_n действует на множестве корней по формуле $w(i, j) = (w(i), w(j))$.

Если $i > j$, то корень (i, j) назовем положительным. Соответственно, если $i < j$, то корень отрицательный. Множество положительных корней обозначим через A .

Для любого корня $\eta = (i, j)$, то через $-\eta$ обозначим корень (j, i) . На множестве положительных корней определим частичную операцию сложения: если $\eta = (i, j) \in A$ и $\eta' = (j, m) \in A$, то $\eta + \eta' = (i, m)$.

Рассмотрим стандартный базис $\{y_{ij} : (i, j) \in A\}$ в алгебре \mathfrak{n} . Будем также использовать обозначение y_ξ для y_{ij} , где $\xi = (i, j)$.

Зафиксируем некоторое подмножество $M \subset A$, удовлетворяющее условию: если $\eta \in M$, $\eta' \in A$ и $\eta + \eta'$ определено, то $\eta + \eta' \in M$. Обозначим через \mathfrak{m} подпространство, натянутое на $\{y_{ij} : (i, j) \in M\}$. Из определения M , подпространство \mathfrak{m} является идеалом в алгебре Ли \mathfrak{n} .

Обозначим через \mathcal{L} факторалгебру Ли $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}$ и через L соответствующую факторгруппу N по нормальной подгруппе $\exp(\mathfrak{m})$. Отметим, что сопряженное пространство \mathcal{L}^* является подпространством в \mathfrak{n}^* , состоящим из тех $f \in \mathfrak{n}^*$, которые аннулируются на \mathfrak{m} . Коприсоединенная L -орбита для $f \in \mathcal{L}^*$ совпадает с ее N -орбитой.

1. Метод построения диаграммы

Как было сказано, в работе [9] по всякой алгебре Ли \mathcal{L} была построена диаграмма $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$. Изложим метод построения диаграммы $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ и сформулируем основные утверждения работы [9].

Рассмотрим отношение порядка $>$ на множестве пар A , для которого

$$(n, 1) > (n - 1, 1) > \dots > (2, 1) > (n, 2) > \dots > (3, 2) > \dots > (n, n - 1).$$

По идеалу \mathfrak{m} построим диаграмму, представляющая собой $n \times n$ -матрицу, в которой места (i, j) , $i \leq j$ не заполняются, а остальные места (т.е. места из A) заполняются символами \otimes , \bullet , "+" и "-" по изложенным ниже правилам. Места $(i, j) \in M$ заполняются символом \bullet . Назовем эту процедуру нулевым шагом в построении диаграммы.

На наибольшее в смысле отношения $>$ место из $A \setminus M$ ставим символ \otimes . Заметим, что этот символ будет стоять в первом столбце, если множество пар вида $(i, 1)$ из $A \setminus M$ не пусто. Предположим, что мы поставили символ \otimes на место (k, t) , $k > t$. Далее, на все места (k, a) , $t < a < k$, ставим символ $-$, и на все места (b, t) , $1 < b < k$, ставим символ $+$. На этом завершается первый шаг в построении диаграммы.

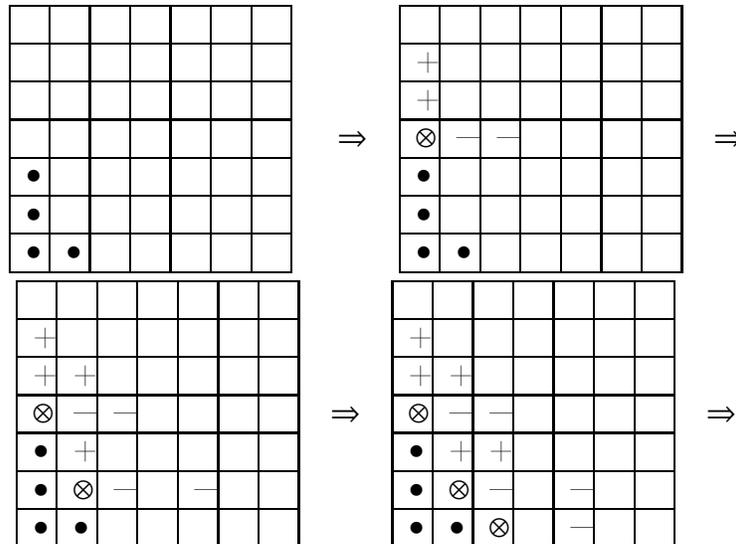
Если после этой процедуры часть клеток из A остаются незаполненными, то мы снова ставим символ \otimes на наибольшее (в смысле отношения $>$) свободное место из A . Далее, мы расставляем символы $+$ и $-$ на свободные места по тому же правилу с учетом следующего замечания: символы $+$ и $-$ расставляются парами, если оба места (k, a) и (a, t) , где $k > a > t$, свободны, то на первое ставится $-$, а на второе $+$; если же одно из мест, (k, a) или (a, t) , уже занято, то второе место не заполняется. После расстановки плюсов и минусов завершается очередной шаг, которому мы даем номер 2.

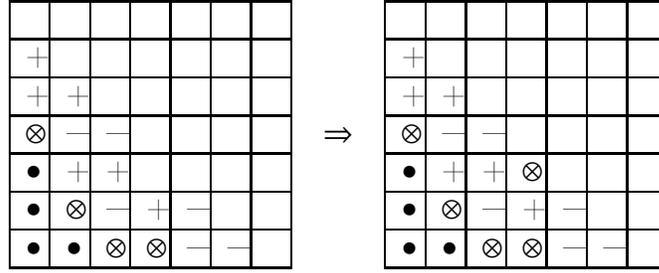
Продолжая процедуру дальше, мы получаем диаграмму. Обозначим построенную диаграмму через $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$. Номер последнего шага совпадает с количеством символов \otimes в диаграмме.

Пример 1: Пусть $n = 7$, $m = Ky_{51} \oplus Ky_{61} \oplus Ky_{71} \oplus Ky_{62}$. Соответствующая диаграмма имеет вид

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & + & & & & & & \\ \hline + & + & & & & & & \\ \hline \otimes & - & - & & & & & \\ \hline \bullet & + & + & \otimes & & & & \\ \hline \bullet & \otimes & - & + & - & & & \\ \hline \bullet & \bullet & \otimes & \otimes & - & - & & \\ \hline \end{array}$$

Диаграмма строится в 5 шагов, начиная с нулевого:





Обозначим через S (соотв. C^+ , C^-) множество пар (i, j) , заполненных на диаграмме символом \otimes (соотв. ”+”, ”-”). Множество A пар (i, j) , $i > j$, разлагается на непересекающиеся подмножества: $A = M \sqcup C^+ \sqcup C^- \sqcup S$.

Обозначим через \mathbf{A}_m алгебру Пуассона $K[p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_m]$, $\{p_i, q_i\} = 1$ и $\{p_i, q_j\} = 0$ для $i \neq j$. Напомним, что алгебра Пуассона \mathcal{A} распадается в тензорное произведение двух алгебр Пуассона $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, если \mathcal{A} изоморфна $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ как коммутативная ассоциативная алгебра и $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\} = 0$. Следующие теоремы 1.1 и 1.2 — основные результаты работы [9].

Теорема 1.1 [9]: Существуют $z_1, \dots, z_s \in K[\mathcal{L}^*]^L$, где $s = |S|$, такие, что
 1) каждое $z_i = y_{\xi_i} Q + P_{>i}$, где Q — некоторое произведение степеней от z_1, \dots, z_{i-1} , а $P_{>i}$ — многочлен от $\{y_\eta\}$, $\eta > \xi_i$;
 2) обозначим через \mathcal{Z} множество знаменателей, порожденное z_1, \dots, z_s ; локализация $K[\mathcal{L}^*]_{\mathcal{Z}}$ алгебры $K[\mathcal{L}^*]$ по множеству знаменателей \mathcal{Z} как алгебра Пуассона изоморфна тензорному произведению $K[z_1^\pm, \dots, z_s^\pm] \otimes \mathbf{A}_m$ для некоторого m .

Теорема 1.2 [9]:

- 1) Поле инвариантов $K(\mathcal{L}^*)^L$ совпадает с полем $K(z_1, \dots, z_s)$.
- 2) Максимальная размерность коприсоединенной орбиты в \mathcal{L}^* равна сумме чисел символов ”+” и ”-” в диаграмме $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.
- 3) Индекс алгебры Ли \mathcal{L} совпадает с числом символов \otimes в диаграмме $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$.

Следует отметить, что в доказательстве теоремы 1.1 элементы $\{z_i\}$ строятся индуктивным путем, что оставляет нерешенным вопрос о нахождении для них явной формулы (например, в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы). К вопросу о явной формуле для образующих поля инвариантов мы вернемся в заключительном параграфе работы.

Сформулируем еще два вспомогательных утверждения из [9], которые будут использованы в этой работе. Обозначим через B_i множество пар (a, b) , $a > b$, которые остаются незаполненными после i -го шага в процедуре заполнения диаграммы. Подмножества B_i образуют цепочку:

$$B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_s = \emptyset,$$

где $s = |S|$. Обозначим $A_i = B_i \sqcup M$, $n_i = \text{span}\{y_\eta : \eta \in A_i\}$, $\mathcal{L}_i = n_i/m$. Здесь $A = A_0$.

Пусть $S = \{\xi_1 > \dots > \xi_s\}$. Напомним, что место $\xi_i \in S$ занято на диаграмме символом \otimes на i -том шаге.

Для $1 \leq i \leq s$ обозначим через C^-_i (соотв. C^+_i) множество пар (a, b) , $a > b$, которые заполняются символом "–" (соотв. "+") на i -том шаге.

Предложение 1.3 [9, Лемма 1]: Подпространство \mathfrak{n}_i (соотв. \mathcal{L}_i) в \mathfrak{n} (соотв. \mathcal{L}) является подалгеброй Ли.

Для любого $1 \leq i \leq s$ обозначим

$$D^-_i = \{\eta \in \Delta^+ \mid \xi_i > \eta, \eta \in \bigsqcup_{1 \leq j \leq i} C^-_j\},$$

$$D^+_i = \{\eta \in \Delta^+ \mid \xi_i > \eta, \eta \in \bigsqcup_{1 \leq j \leq i} C^+_j\}.$$

Заметим, что места $\eta \in D^+_i$ располагаются, в том же столбце, что и ξ_i .

Через \mathfrak{d}^-_i , где $1 \leq i \leq s$, линейное подпространство в \mathfrak{n} , натянутое на векторы y_η , $\eta \in D^-_i$.

Предложение 1.4 [9, Лемма 2]: Для любого $1 \leq i \leq s$ подпространство \mathfrak{d}^-_i является подалгеброй Ли в \mathfrak{n} .

В примере 1:

$$\xi_1 = (4, 1), \quad \xi_2 = (6, 2), \quad \xi_3 = (7, 3), \quad \xi_4 = (7, 4), \quad \xi_5 = (5, 4);$$

$$\begin{aligned} C^-_1 &= \{(4, 2), (4, 3)\}, & \mathfrak{d}^-_1 &= \text{span}\{y_{42}, y_{43}\}; \\ C^-_2 &= \{(6, 3), (6, 5)\}, & \mathfrak{d}^-_2 &= \text{span}\{y_{42}, y_{43}, y_{63}, y_{65}\}; \\ C^-_3 &= \{(7, 5)\}, & \mathfrak{d}^-_3 &= \text{span}\{y_{43}, y_{63}, y_{65}, y_{75}\}; \\ C^-_4 &= \{(7, 6)\}, & \mathfrak{d}^-_4 &= \text{span}\{y_{65}, y_{75}, y_{76}\}; \\ C^-_5 &= \emptyset, & \mathfrak{d}^-_5 &= \mathfrak{d}^-_4. \end{aligned}$$

2. Ассоциированная подстановка и ее разложения

Алгебре Ли \mathcal{L} поставим в соответствие подстановку, которая определяется следующим образом.

Определение 2.1: Обозначим через $w = w_{\mathcal{L}}$ подстановку из S_n для которой

- 1) $w(1) = \max\{1 \leq i \leq n \mid (i, 1) \notin M\}$;
- 2) $w(t) = \max\{1 \leq i \leq n \mid (i, t) \notin M, i \notin \{w(1), \dots, w(t-1)\}\}$ для всех $2 \leq t \leq n$.

Как обычно обозначим через $l(w)$ — наименьшее число множителей во всевозможных разложениях w в произведение простых отражений. Число $l(w)$ совпадает с числом инверсий в перестановке $(w(1), \dots, w(n))$.

Теорема 2.2: Число $l(w)$ совпадает с $\dim \mathcal{L}$.

Доказательство: Обозначим через $l(w)^{(t)}$ число таких k , что $k > t$ и $w(k) < w(t)$.

Покажем, что $l(w)^{(t)}$ совпадает с $\dim \mathcal{L}^{(t)}$, где $\mathcal{L}^{(t)} = \text{span}\{y_{ii} \mid (i, t) \notin M\}$.

Пусть $a^{(t)}$ — наибольшее число, такое, что пара $(a^{(t)}, t)$ не содержится в M . Очевидно, что $a^{(t)} \geq t$, и $\dim \mathcal{L}^{(t)} = a^{(t)} - t$.

С другой стороны видно, что множество $\{w(1), \dots, w(t)\}$ содержится в отрезке $[1, a^{(t)}]$. Согласно методу построения w , всякий элемент s из отрезка

$[1, a^{(t)}]$, не входящий в $\{w(1), \dots, w(t)\}$, имеет вид $c = w(k)$, для некоторого $k > t$, такого, что $w(k) < w(t)$. Отрезок $[1, a^{(t)}]$ распадается:

$$[1, a^{(t)}] = \{w(1), \dots, w(t)\} \sqcup \{w(k) \mid k > t, w(k) < w(t)\}.$$

Отсюда $l(w)^{(t)} = a^{(t)} - t = \dim \mathcal{L}^{(t)}$. Поскольку

$$l(w) = \sum_{t=1}^n l(w)^{(t)} \quad \text{и} \quad \mathcal{L} = \oplus_{t=1}^n \mathcal{L}^{(t)},$$

то $l(w) = \dim \mathcal{L}$.

Напомним, что $S = \{\xi_1 > \xi_2 > \dots > \xi_s\}$. Положим $w_0 = 1$. Для любого $1 \leq i \leq s$ обозначим

$$w_i = r_{\xi_1} r_{\xi_2} \cdots r_{\xi_i}, \quad (1)$$

Множество $\{\eta \in A \mid \xi_i > \eta\}$ распадается в несвязное объединение

$$B_i \sqcup D_i^- \sqcup D_i^+.$$

Предложение 2.3:

- 1) Если $\eta \in B_i$, то $w_i(\eta) > 0$.
- 2) Если $\eta \in D_i^- \cup D_i^+$, то $w_i(\eta) < 0$.

Доказательство: будем проводить методом индукции по $0 \leq i \leq s$. Для $i = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для всех номеров меньших i . Докажем для номера i .

Пусть $\xi_i = (k, t)$, $k > t$. Разобьем $\{\eta \mid \xi_i > \eta\}$ на четыре подмножества $I \sqcup II \sqcup III \sqcup IV$, где

$$\begin{aligned} I &= \{(b, t) \mid t < b < k\}, \\ II &= \{(k, c) \mid t < c < k\}, \\ III &= \{(b, k) \mid k < b\}, \end{aligned}$$

а в IV входят все остальные пары из $\{\eta \mid \xi_i > \eta\}$, которые не попали в I , II или III .

Если $\eta \in IV$, то $r_{\xi_i}(\eta) = \eta$, и утверждения предложения вытекают из предположения индукции.

Случай 1: Пусть $\eta \in I \cap B_i$. Тогда $\eta = (b, t)$, где $t < b < k$, и место η пусто после i -го шага. Поэтому место (k, b) заполнено (символом "–") до i -го шага (иначе на i -том шаге место (b, t) будет заполнено символом "+"). Из предположения индукции вытекает, что $w_{i-1}(\eta') < 0$ для $\eta' = (k, b)$. Поэтому получаем

$$w_i(\eta) = w_{i-1} r_{\xi_i}(\eta) = -w_{i-1}(\eta') > 0.$$

Случай 2: Пусть $\eta \in I \cap (D_i^- \cup D_i^+)$. В следующих пунктах 2а) и 2б) мы покажем, что $w_i(\eta) < 0$.

2а). Пусть $\eta \in I \cap C_i^+$. Тогда $\eta = (b, t)$, где $t < b < k$, и место η отмечено символом "+" на i -го шаге. Поэтому место (k, b) заполнено символом "–" на i -ом шаге и пусто на предыдущем $(i - 1)$ -ом шаге. Из предположения индукции вытекает, что $w_{i-1}(\eta') > 0$ для $\eta' = (k, b)$. Поэтому

$$w_i(\eta) = w_{i-1} r_{\xi_i}(\eta) = -w_{i-1}(\eta') < 0.$$

2b). Пусть $\eta \in I \cap (D_i^- \cup D_i^+)$ и $\eta \notin C_i^+$. В этом случае место η заполнено одним из символов "+" или "-" на некотором j -том шаге, $j < i$.

Покажем, что место η' , равное $-r_{\xi_i}(\eta) = (k, b)$, свободно после i -го шага (т.е. $\eta' \in B_i$). Предположим противное. Тогда $\eta' \in C_j^-$ для некоторого $j < i$. При этом место ξ_j находится в столбце с номером меньшим, чем t . Поскольку $\eta \in D_i^- \cup D_i^+$, то $\eta \in D_i^-$ или $\eta \in D_i^+$. Из $\eta \in D_i^-$ и $\eta' \in C_j^- \subset D_i^-$, вытекает, что $\xi_i = \eta + \eta' \in D_i^-$ (см. предложение 1.4). Что приводит к противоречию. Остается рассмотреть случай $\eta \in D_i^+$. Тогда $\eta \in C_m^+$ для некоторого $\xi_m = (c, t)$, $c > k$, лежащего в том же t -том столбце, что и ξ_i , только ниже ξ_i . Тогда на m -ном шаге место η , равное (b, t) получает символ "+", а место (c, b) — символ "-". На m -ном шаге место (c, k) уже занято символом "-" (иначе на m -ном шаге (c, k) получит символ "-", а ξ_i , равное (k, t) , символ "+"). Итак, после $(m-1)$ -го шага места (k, b) , равное η' , и (c, k) уже заполнены символом "-", в то время как место (c, b) пусто. Это противоречит тому, что \mathfrak{D}_{m-1}^- — подалгебра.

Итак, $\eta' \in B_i$. Тогда $w_{i-1}(\eta') > 0$ и, следовательно, можно получить, что $w_i(\eta) = -w_{i-1}(\eta') < 0$. Что доказывает 2) для случая $\eta \in I$.

Случай 3: $\eta \in II \cap B_i$. Рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 4: $\eta \in II \cap (D_i^- \cup D_i^+)$. Рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 5: $\eta \in III$. Как в доказательстве теоремы 2.2, обозначим через $a^{(t)}$, наибольшее число, зависящее от t , такое, что $(a^{(t)}, t) \notin M$. Тогда все пары (c, t) , где $c > t$, лежат в M . Напомним, что $III = \{(b, k) \mid k < b\}$. Разобьем III на два подмножества:

$$III_1 = \{(b, k) \in III \mid k < b \leq a^{(t)}\},$$

$$III_2 = \{(b, k) \in III \mid n \geq b > a^{(t)}\}.$$

5а. Пусть $\eta \in III_2$. Из определения $a^{(t)}$ прямоугольник $(a^{(t)}, n] \times [1, t]$ в диаграмме $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ заполнен символом \bullet . Все места ξ_j , $j \leq i$, расположены выше этого прямоугольника. Отсюда $III_2 \subset B_i$ и $w_i(\eta) > 0$. Что доказывает утверждение предложения в этом случае.

5б. Покажем, что $III_1 \subset \bigcup_{j < i} C_j^-$. Предположим противное, пусть существует $\eta = (b, k) \in III_1$, такой, что

$$\eta \notin \bigcup_{j < i} C_j^-.$$

Тогда место η пусто после i -го шага. Рассмотрим место (b, t) . Поскольку $b > k$, то место (b, t) заполнено ранее i -шага одним из символов " \otimes ", "-", или "+".

С другой стороны, на месте (b, t) не может стоять символ \otimes , поскольку тогда $\eta = \xi_m$ для некоторого $m < i$. И на m -ном шаге место $\xi_i = (k, t)$ будет заполнено символом "+" (соотв. (b, k) — символом "-"). На месте (b, t) не может стоять символ "-", поскольку тогда $(k, t) \in B_{i-1}$, $(b, k) \in B_i \subset B_{i-1}$ и $(b, t) \notin B_{i-1}$, что противоречит предложению 1.3 (подпространство \mathfrak{n}_{i-1} не является подалгеброй).

Остается последнее: на месте (b, t) стоит символ "+". Тогда существует

$\xi_j = (c, t) \in S$, $j < i$, $c > b$, такой, что на j -том шаге на месте (b, t) появляется символ "+" и на месте (c, b) — символ "-". На этом же j -том шаге место (c, k) должно быть уже занято, иначе (k, t) получит символ "+" и будет занято до i -го шага. Согласно процедуре расстановки символов, место (c, k) может быть занято только символом "-". Итак, после $j-1$ -го шага мы получаем, что места (c, b) и (b, k) свободны, а место (c, k) занято символом "-". Это противоречит утверждению, что \mathfrak{n}_{j-1} — подалгебра (см. предложение 1.4). Утверждение пункта 5b) доказано.

5с. Покажем, что $w_i(\eta) < 0$ для любого $\eta = (b, k) \in III_1$. Пусть $\eta = (b, k)$. Тогда $(b, t) = r_{\xi_i}(b, k)$. Пусть m — наибольший номер, такой, что $\xi_m \geq (b, t)$. Возможны следующие два случая.

а) $m = i-1$. Тогда либо $(b, t) = \xi_{i-1}$, либо $(b, t) \in D_{i-1}^+ \sqcup D_{i-1}^-$. В любом случае $w_{i-1}(b, t) < 0$. Получаем

$$w_i(\eta) = w_{i-1}r_{\xi_i}(b, k) = w_{i-1}(b, t) < 0.$$

б) $m > i-1$. Пусть $\xi_{i-1} = (c, t)$. Тогда $b > c$ и

$$r_{\xi_{i-1}}r_{\xi_i}(b, k) = r_{\xi_{i-1}}(b, t) = (b, c).$$

Заметим, что $r_{\xi_p}(b, c) = (b, c)$ для всех $m < p < i-1$. Поэтому

$$w_i(\eta) = w_m r_{\xi_{m+1}} \dots r_{\xi_{i-1}} r_{\xi_i}(b, k) = w_m(b, c). \quad (2)$$

Осталось показать, что $w_m(b, c) < 0$.

Поскольку в паре ξ_m номер столбца меньше или равен t , а $c > t$, то место (b, c) после m -го шага может быть либо свободно, либо занято символом "-". Из предположения индукции, неравенство $w_m(b, c) < 0$ равносильно тому, что место (b, c) занято после m -го (символом "-").

Предположим, что место (b, c) свободно после m -го шага. Место (b, t) заполнено после i -го шага, поскольку $b > k$. Из определения m , место (b, t) заполнено после m -го шага (одним из символов \otimes , "+", "-"). Итак, после m -шага места (b, t) занято, а места (b, c) и (c, t) свободны. Это противоречит утверждению, что \mathfrak{n}_m — подалгебра. Итак, (b, c) занято после m -го шага символом "-" и, поэтому, $w_m(b, c) < 0$. Что доказывает $w_i(\eta) < 0$.

Следствие 2.4: Если $\eta \in B_i$, то $w_j(\eta) > 0$ для любого $1 \leq j \leq i$.

Доказательство вытекает из включения $B_i \subset B_j$.

Обозначим через $w^{(t)}$ произведение в порядке убывания индекса (в смысле отношения $>$) отражений r_{ξ} относительно корней $\xi \in S$ вида (a, t) , где $a > t$. Построим систему подстановок

$$w^{[t]} = w^{(1)} \dots w^{(t)}. \quad (3)$$

Заметим, что $w^{[t]}$ совпадает с w_i , если ξ_i наименьший в смысле отношения $>$ корень среди корней, лежащих в первых t столбцах.

Пусть, как и выше, $a^{(t)} = \max\{1 \leq c \leq n \mid (c, t) \notin M\}$.

Предложение 2.5: Утверждается, что

- 1) $w^{[t]}(\eta) > 0$ для любого $\eta = (b, t)$, $a^{(t)} < b \leq n$.
- 2) $w^{[t]}(\eta) < 0$ для любого $\eta = (b, t)$, $t < b \leq a^{(t)}$.

Доказательство: Из определения $a^{(t)}$ прямоугольник $(a^{(t)}, n] \times [1, t]$ в диаграмме $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ заполнен символом \bullet . Все места ξ_j , $j \leq i$, расположены выше этого прямоугольника. Отсюда вытекает утверждение пункта 1).

Доказательство пункта 2) проводится в каждом из следующих случаев отдельно.

i) t -ый столбец не содержит корней из S . В этом случае этот столбец весь заполнен символом "–". Получаем $w^{[t]}(\eta) = w^{[t-1]}(\eta)$. Из предложения 2.3, получаем $w^{[t-1]}(\eta) < 0$.

ii) Пусть (b, t) располагается выше всех корней из S , входящих в t -ый столбец. Тогда (b, t) отмечено символом "+" или символом "–". Из предложения 2.3, $w^{[t]}(\eta) < 0$.

iii) (b, t) располагается ниже ξ_i , наименьшего в смысле отношения $>$ корня из t -го столбца или совпадает с ним.

Если $\eta = \xi_i$, то

$$w^{[t]}(\eta) = w_i(\xi_i) = -w_{i-1}(\xi_i) < 0.$$

Пусть $\xi_i = (k, t)$ и $b > k$. Тогда $r_{\xi_i}(b, t) = (b, k)$. Пусть ξ_m — наименьший корень из S , который больше или равен (b, t) в смысле отношения $>$. Из пункта 5b (см. доказательство предложения 2.3) (b, k) заполнено символом "–" до или во время m -го шага. Следовательно, $w_m(b, k) < 0$. Поскольку $r_{\xi_p}(b, k) = (b, k)$ для любого $m < p < i$, то

$$w^{[t]}(\eta) = w_i(\eta) = w_m r_{\xi_{m+1}} \dots r_{\xi_i}(b, t) = w_m r_{\xi_{m+1}} \dots r_{\xi_{i-1}}(b, k) = w_m(b, k) < 0.$$

Предположим как и выше, что $S = \{\xi_1 > \dots > \xi_s\}$. Напомним также, что $(k, t) \in S$ тогда и только тогда, когда место (k, t) заполнено на диаграмме $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ символом \otimes .

Теорема 2.6: Утверждается, что $w = r_{\xi_1} r_{\xi_2} \dots r_{\xi_s}$.

Доказательство: Согласно формуле (2)

$$w^{[n]} = r_{\xi_1} r_{\xi_2} \dots r_{\xi_s}.$$

Докажем, что для любого $1 \leq t \leq n$ выполнено $w^{[n]}(t) = w(t)$, используя индукцию по t . Для $t = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для номеров меньших t . Докажем для номера t .

По определению, $w(t)$ есть наибольшее среди чисел отрезка $[1, n]$ натурального ряда, не лежащих в подмножестве

$$\Lambda_t = \{w(1), \dots, w(t-1)\} \sqcup (a^{[t]}, n].$$

Из предположения индукции, $w(j) = w^{[n]}(j)$ для любого $1 \leq j \leq t-1$. Заметим, что $w^{[n]}(j) = w^{[t]}(j)$, поскольку $r_{\xi}(j) = j$ для всех $\xi \in S$, лежащих в столбцах с номерами большими, чем t . Поэтому $w(j) = w^{[t]}(j)$ для всех $1 \leq j \leq t-1$. Это дает возможность заменить в (3) w на $w^{[t]}$.

Из определения $a^{(t)}$, прямоугольник $(a^{(t)}, n] \times [1, t]$ в диаграмме $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ заполнен символом \bullet . Все места ξ_j , $j \leq i$, расположены выше этого прямоугольника. Поэтому для любого $p \in (a^{[t]}, n]$ имеет место $w^{[t]}(p) = p$.

Множество Λ_t может быть представлено в виде

$$\Lambda_t = \{w^{[t]}(1), \dots, w^{[t]}(t-1)\} \sqcup \{w^{[t]}(p) \mid a^{[t]} < p \leq n\}.$$

Все элементы из отрезка $[1, n]$ натурального ряда, не лежащие в Λ_t имеют вид $w^{[t]}(k)$, где $t \leq k \leq a^{(t)}$.

Из пункта 2) предложения 2.5, $w^{[t]}(t) > w^{[t]}(k)$ для любого $t < k \leq a^{(t)}$. Следовательно, что $w^{[t]}(t)$ есть наибольшее среди чисел отрезка $[1, n]$ натурального ряда, не лежащих в подмножестве Λ_t . Заключаем, что $w^{[t]}(t) = w(t)$. Наконец, $w^{[t]}(t) = w^{[n]}(t)$, так как $r_\xi(t) = t$ для всех $\xi \in S$, лежащих в столбцах с номерами большими, чем t . Окончательно, $w^{[n]}(t) = w(t)$. Обозначим через $A^{(t)}$ множество $\eta \in A$, имеющих вид (b, t) для некоторого $b > t$.

Теорема 2.7: Пусть $\eta \in A^{(t)}$ тогда,

- 1) место η заполнено символом "–" тогда и только тогда, когда $w^{[t-1]}(\eta) < 0$;
- 2) место η заполнено символом "•" тогда и только тогда, когда $w^{[t]}(\eta) > 0$;
- 3) место η заполнено символом "+" или символом \otimes тогда и только тогда, когда $w^{[t-1]}(\eta) > 0$ и $w^{[t]}(\eta) < 0$.

Доказательство непосредственно вытекает из предложений 2.3 и 2.5.

3. Поле инвариантов

В этом параграфе будет сформулирована гипотеза о строении поля инвариантов коприсоединенного представления группы L .

По каждому элементу из $\xi \in S$ мы построим многочлен P_ξ . Пусть $\xi = \xi_m = (k, t) \in S$, где $k > t$. Обозначим через w_ξ подстановку $w_m = r_{\xi_1} \dots r_{\xi_m}$.

Случай 1: $w_\xi(t) > t$. Можно показать, что в этом случае $w_\xi(t) = k$. Положим

$$J(\xi) = \{1 \leq j \leq t : w_\xi(j) \geq w_\xi(t)\}, \quad I(\xi) = wJ(\xi).$$

Случай 2: $w_\xi(t) \leq t$. Система $J(\xi)$ определяется как в (3.1). Обозначим

$$I_*(\xi) = \{1 \leq i \leq n : i > t, w_\xi(i) < w_\xi(t)\},$$

$$I(\xi) = [w_\xi(t), t] \sqcup I_*(\xi).$$

Можно показать, что в обоих случаях $|I(\xi)| = |J(\xi)|$.

Как и выше $\{y_{ij}\}$ — стандартный базис в \mathfrak{n} . По диаграмме \mathcal{D}_L построим матрицу Φ_L , в которой на места $\{(i, j) \in A \setminus M\}$ ставятся соответствующие элементы $\{y_{ij}\}$ стандартного базиса; остальные места заполняются нулями. Например, для алгебры Ли \mathcal{L} из примера 1 получаем диаграмму \mathcal{D}_L и матрицу Φ_L :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & \\ \hline + & & & & & & \\ \hline + & + & & & & & \\ \hline \otimes & - & - & & & & \\ \hline \bullet & + & + & \otimes & & & \\ \hline \bullet & \otimes & - & + & - & & \\ \hline \bullet & \bullet & \otimes & \otimes & - & - & \\ \hline \end{array} \quad \Phi_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{52} & y_{53} & y_{54} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{73} & y_{74} & y_{75} & y_{76} & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть λ — переменная. Введем в рассмотрение характеристическую матрицу $\Phi_{\mathcal{L}} - \lambda E$. Всякий минор характеристической матрицы является многочленом от λ с коэффициентами в $S(\mathcal{L}) = K[\mathcal{L}^*]$. Пусть $M_{\xi}(\lambda)$ — минор характеристической матрицы с системой столбцов $J(\xi)$ и системой строк $I(\xi)$, и P_{ξ} — его старший коэффициент.

Гипотеза: Поле инвариантов коприсоединенного представления алгебры Ли \mathcal{L} есть поле рациональных функций от P_{ξ} , $\xi \in S$.

В примере 1 подмножество S состоит из пяти корней $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$P_{\xi_1} = y_{41}, \quad P_{\xi_2} = y_{62}, \quad P_{\xi_3} = y_{73},$$

$$P_{\xi_4} = y_{74}y_{41} + y_{73}y_{31}, \quad P_{\xi_5} = \begin{vmatrix} y_{52} & y_{53} & y_{54} \\ y_{62} & y_{63} & y_{64} \\ 0 & y_{73} & y_{74} \end{vmatrix}.$$

Литература

- [1] Кириллов, А.А. Лекции по методу орбит / А.Н. Кириллов. — Новосибирск: Научная книга, 2002. — 304 с.
- [2] Кириллов, А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли / А.А. Кириллов // УМН. — 1962. — Т. 17. — С. 57-110.
- [3] Переломов, А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А.М. Переломов. — М.: Наука, 1990. — 240 с.
- [4] Трофимов, В.В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений / В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко. — М.: Факториал. — 1995. — 448 с.
- [5] Рейман, А.Г. Интегрируемые системы / А.Г. Рейман, М.А. Семенов—тян—Шанский. — М.;-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 352 с.
- [6] Kirillov, A.A. Two more variations on the triangular theme / А.А. Кириллов // Progress in Math. — 2003. — V. 213. — P. 243–258.
- [7] Панов, А.Н. Коприсоединенные орбиты для группы $UT(n, K)$ / А.Н. Панов, М.В. Игнатъев // Фундаментальная и прикладная математика. — 2007. — Т. 13. — №5. — С. 127-159.

- [8] Панов, А.Н. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединенные орбиты / А.Н. Панов // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2007. – Т. 349. – С. 150–173.
- [9] Панов, А.Н. Об индексе некоторых нильпотентных алгебр Ли / А.Н. Панов // Современная математика и ее приложения. – 2008. – Т. 60. – С. 123–131.
- [10] Диксмье, Ж. Универсальные обертывающие алгебры / Ж. Диксмье. – М: Мир, 1978. – 407 с.

Поступила в редакцию 29/VIII/2008;
в окончательном варианте — 29/VIII/2008.

THE DIAGRAM METHOD IN A STUDY OF COADJOINT ORBITS

© 2008 A.N. Panov²

In the paper to a Lie algebra of special type we correspond a diagram that gives a possibility to calculate index and maximal dimension of the coadjoint representation. We show that a placing of symbols in the diagram depends on the properties of associated permutation.

Keywords and phrases: *Lie algebra, diagram method, diagram, coadjoint representation.*

Paper received 29/VIII/2008.

Paper accepted 29/VIII/2008.

²Panov Alexander Nickolaevich (apanov@list.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.