УДК 517.518

СТРУКТУРА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКЕ ХАОСОВ РАДЕМАХЕРА[1]

© 2008 К.В. Лыков, Т.А. Морозова, Р.С. Суханов[2]

В работе исследуются вопросы, связанные с существованием и полным описанием непрерывных функций на $[0,1]$, которые можно получить как сумму ряда, состоящего из функций Радемахера или их произведений (хаосов). Исчерпывающие ответы представлены в двух теоремах. В случае ряда Радемахера имеется единственная с точностью до множителя непрерывная функция. В случае хаосов такие функции образуют бесконечномерное пространство.

Работа первого из авторов поддержана РФФИ (проект №07-01-96603)

Ключевые слова: *функция Радемахера, ряд Радемахера, хаос Радемахера, непрерывная функция, сходимость почти всюду, функция Вейерштрасса*

Введение

Работа посвящена непрерывным функциям, представимым рядами Радемахера и хаосами.

Мы исследуем вопросы, связанные с существованием и полным описанием непрерывных функций на $[0,1]$, которые можно получить как сумму ряда, состоящего из функций Радемахера или их произведений (хаосов):

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(t) \text{ или } f(t)=\sum_{1\leqslant i<j<\infty} c_{ij} r_i(t) r_j(t) \text{ почти всюду на } [0,1].$$

Заметим, что наш вопрос отличен от вопроса непрерывности ряда Радемахера почти всюду (хотя и может иметь одинаковый ответ).

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

[2]Лыков Константин Владимирович (alkv@list.ru), Морозова Татьяна Андреевна, Суханов Роман Сергеевич, кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Близкие задачи рассмотрены в статье Стечкина и Ульянова [1]. В частности, там доказано, что если ряд Радемахера сходится на множестве положительной меры к аналитической на $(0,1)$ функции $F(t)$, то

$$F(t) = At + B.$$

В параграфе 2 мы покажем, что наш вопрос, в котором мы освобождаемся от требования аналитичности, но требуем непрерывность на отрезке и сходимость почти всюду, имеет аналогичный ответ.

В параграфе 3 аналогично исследованы суммы хаосов. Здесь, чтобы получить законченый результат, нам пришлось потребовать дополнительно абсолютную сходимость ряда. Дело в том, что в случае рядов Радемахера абсолютная сходимость следует из равномерной ограниченности функции-суммы. С хаосами ситуация иная. Из ограниченности суммы следует лишь принадлежность коэффициентов $\{c_{ij}\}_{1\leqslant i<j<\infty}$ пространству $l^{\frac{4}{3}}$, т.е. условие

$$\sum_{1\leqslant i<j<\infty} |c_{ij}|^{\frac{4}{3}} < \infty,$$

что слабее абсолютной сходимости [2, p. 175, Theorem 34].

Но и при дополнительном требовании абсолютной сходимости линейная оболочка хаосов оказалась достаточно богатой непрерывными функциями. Соответсвующее подпространство оказалось бесконечномерным и изометричным пространству l^1, в нем найден соответствующий базис. В качестве примеров функций из этого пространства приведены квадратичная функция и непрерывная функция, нигде не имеющая производной.

1. Предварительные сведения

В работе исследуется вопрос о представлении непрерывных вещественных функций на $[0,1]$ и $\mathbb{R}$ с помощью функций Радемахера. Поэтому мы начнем со следующего определения.

Определение 1: Для целого неотрицательного n функция Радемахера $r_n = r_n(t)$ задается равенством

$$r_n(t) := \begin{cases} \;\;1, \text{ если } t \in \left[\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right), \ i \text{ нечетное целое число;} \\ -1, \text{ если } t \in \left[\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right), \ i \text{ четное целое число.} \end{cases}$$

Значения функций Радемахера в двоично-рациональных точках будут для нас несущественны, так как нас будет интересовать сходимость почти всюду. С учетом этого замечания можно дать более компактное и эквивалентное определение функций Радемахера:

$$r_n(t) = \operatorname{sign}(\sin(2^n \pi t)), \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Функция Радемахера r_n периодическая с периодом 2^{1-n} и нечетная. Из определения 1 очевидным образом следуют соотношения

$$r_k(t) = r_0(2^k t), \quad r_k(t) = r_i(2^{k-i} t). \tag{1.1}$$

Напомним следующее важнейшее в теории вероятностей понятие.

Определение 2: Набор случайных величин $\{f_k\}_{k=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, называется независимым, если для любых интервалов I_k на прямой $\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k\}.$$

Последовательность случайных величин $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ называют независимой, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ набор $\{f_k\}_{k=1}^n$ независим.

В дальнейшем понятие вероятностной независимости мы будем применять к измеримым функциям на отрезке, которые в этом случае рассматриваются как случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $([0,1], \mathcal{F}, \mu)$, где μ — мера Лебега, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0,1]$.

Теорема 1.1 (см. [3, стр. 22]): Система Радемахера $\{r_i\}_{i=0}^\infty$ — система вероятностно независимых функций на $[0,1]$.

Следствие 1.2: Для произвольного набора знаков $\{\epsilon_i\}_{i=1}^N$, $\epsilon_i = \pm 1$, существует двоичный интервал $\Delta = \left(\dfrac{k}{2^N}, \dfrac{k+1}{2^N}\right) \subset [0,1]$ такой, что для всех точек $t \in \Delta$

$$r_i(t) = \epsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Определение 3: Хаосом порядка k называется произведение k функций Радемахера:

$$r_{n_1 n_2 \ldots n_k}(t) := r_{n_1}(t) r_{n_2}(t) \ldots r_{n_k}(t),\ n_i \in \mathbb{N}.$$

Объединение хаосов всех порядков и r_0 образуют систему Уолша.

2. Непрерывные функции в линейной оболочке системы Радемахера

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании непрерывных функций, которые можно представить в виде суммы ряда по системе Радемахера $\{r_i\}_{i=1}^\infty$. В следующей теореме показано, что такая функция единственна, с точностью до постоянного множителя.

Теорема 2.1: Справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(t) = \frac{1}{2} - t \ \text{ почти всюду.} \tag{2.1}$$

Обратно, если $f(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, и

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(t) \ \text{ почти всюду,} \tag{2.2}$$

то
$$f(t) = c\left(\frac{1}{2} - t\right) \text{ и } c_i = 2^{-i-1}c.$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.2: Пусть
$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(t) \text{ почти всюду на } [0,1] \tag{2.3}$$
и функция $f(t)$ ограничена:
$$|f(t)| \leqslant C.$$
Тогда ряд в (2.3) сходится абсолютно и
$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \leqslant C. \tag{2.4}$$

Доказательство: Абсолютная сходимость ряда в (2.3) следует из условия (2.4), справедливость которого будем доказывать от противного. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| > C + \varepsilon.$$
Рассмотрим множество
$$B = \left\{ t \in [0,1] \,:\, \text{ряд в (4) сходится и } t \neq \frac{k}{2^n} \right\}.$$
В силу условий $\mu B = 1$.

Введем также следующие обозначения:
$$B_j = \left\{ t \in B \,:\, \text{для всех } k \geqslant j \left| \sum_{i=k}^{\infty} r_i(t) \right| < \varepsilon \right\}.$$
Так как для произвольной точки $t \in B$ (в силу сходимости ряда в (2.3)) для всех достаточно больших k
$$\left| \sum_{i=k}^{\infty} r_i(t) \right| < \varepsilon,$$
то
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = B.$$
Следовательно, так как $\mu B = 1 > 0$, найдется номер j_0 такой, что
$$\mu B_{j_0} > 0.$$

Положим $\epsilon_i = \mathrm{sign}\{c_i\}$. Тогда выполняются неравенства
$$\epsilon_i c_i \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i c_i = \sum_{i=1}^{N} |c_i| > C + \varepsilon$$

для достаточно большого N. Можно также считать, что $N > j_0$.

В силу следствия 1.2 существует интервал $\Delta = \left(\frac{m}{2^N}, \frac{m+1}{2^N}\right)$ такой, что

$$r_i(t) = \epsilon_i$$

для всех $t \in \Delta$ и $i \leqslant N$.

Далее, в силу теоремы 1.1, системы $\{r_i\}_{i=1}^N$ и $\{r_i\}_{i=N+1}^\infty$ вероятностно независимы. Поэтому для множества

$$D = \Delta \bigcap \left\{ t \in B \, : \, \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} r_i(t) \right| < \varepsilon \right\}$$

имеем

$$\mu D = \mu\Delta \cdot \mu \left\{ t \in B \, : \, \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} r_i(t) \right| < \varepsilon \right\} \geqslant \mu\Delta \cdot \mu B_{j_0} > 0.$$

Для точки $t \in D$ получим

$$|f(t)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(t) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} c_i r_i(t) + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i r_i(t) \right| \geqslant$$
$$\geqslant \left| \sum_{i=1}^{N} c_i r_i(t) \right| - \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i r_i(t) \right| > \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i c_i - \varepsilon > C + \varepsilon - \varepsilon = C.$$

Это противоречит условию $|f(t)| \leqslant C$.

Доказательство теоремы 2.1: Покажем сначала, что равенство (2.1) выполняется во всех двоично-иррациональных точках отрезка $[0, 1]$ и, следовательно, почти всюду.

Пусть $t \in [0, 1]$ — двоично-иррациональное число, т.е. $t \neq \frac{k}{2^n}$. Каждое такое число представимо в виде бесконечной двоичной дроби $0, \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_i \dots$, или, эквивалентно,

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i(t) 2^{-i}, \text{ где } \epsilon_i(t) = 0 \text{ или } 1. \tag{2.5}$$

Из определения функций Радемахера следует, что $\epsilon_i(t) = 0$ для тех и только тех двоично-иррациональных t, для которых $r_i(t) = 1$, и $\epsilon_i(t) = 1$ для тех и только тех двоично-иррациональных t, для которых $r_i(t) = -1$. В итоге

$$r_i(t) = 1 - 2\epsilon_i(t),$$

или

$$\epsilon_i(t) = \frac{1 - r_i(t)}{2}.$$

Подставляя последнее выражение для $\epsilon_i(t)$ в представление (2.5), получим

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i(t) 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - r_i(t)}{2} \cdot 2^{-i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(t),$$

или, выражая сумму Радемахера,

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(t) = \frac{1}{2} - t.$$

Пусть теперь функция $f(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и выполнено (2.2). В силу известной теоремы Вейерштрасса функция $f(t)$ ограничена, что позволяет нам воспользоваться леммой 2.2 и считать выполненым (2.4). Как и при доказательстве леммы 2.2 введем в рассмотрение множество B, состоящее из двоично-ирациональных точек, в которых выполнено (2.2).

Рассмотрим поведение функции $f(t)$ в окрестности точки $t_k = \dfrac{1}{2^k}$. В силу непрерывности

$$f(t_k) = \lim_{s\to t_k-0} f(s) = \lim_{s\to t_k+0} f(s). \tag{2.6}$$

Выберем две последовательности точек s_n^+ и s_n^- такими, что

$$s_n^+, s_n^- \in B, \quad s_n^+ > t_k > s_n^-, \quad \text{и} \quad s_n^+, s_n^- \to t_k \quad \text{при } n\to\infty.$$

При таком выборе будет выполняться

$$f(s_n^+) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(s_n^+), \quad f(s_n^-) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(s_n^-),$$

и, в силу (2.6),

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right) = 0.$$

Выберем $\varepsilon > 0$. В силу условия (2.6) для всех $n \geqslant n_0$

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right)\right| < \varepsilon.$$

Также, пользуясь неравенством (2.4), мы можем выбрать N_0 таким, что для всех $N \geqslant N_0$

$$\sum_{i=N}^{\infty} |c_i| < \varepsilon.$$

Используя последние два неравенства для $n \geqslant n_0$ и $N \geqslant N_0$, получим

$$\left|\sum_{i=1}^{N} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right) - \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right)\right| + \left|\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \left|\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i r_i(s_n^+)\right| + \left|\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i r_i(s_n^-)\right| \leqslant \varepsilon + 2\sum_{i=N+1}^{\infty} |c_i| < 3\varepsilon.$$

В итоге имеем неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{N} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right)\right| < 3\varepsilon, \tag{2.7}$$

в котором устремим n к бесконечности.

В силу определения функций Радемахера

$$\lim_{s\to t_k-0} r_i(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } i < k; \\ 1, & \text{если } i = k; \\ -1, & \text{если } i > k; \end{cases}$$

и

$$\lim_{s\to t_k+0} r_i(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } i < k; \\ -1, & \text{если } i = k; \\ 1, & \text{если } i > k. \end{cases}$$

Поэтому из (2.7) получаем (можно считать, что $N > k$)

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i + c_k - \sum_{i=k+1}^{N} c_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i - c_k + \sum_{i=k+1}^{N} c_i\right)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{N} c_i \left(r_i(s_n^+) - r_i(s_n^-)\right)\right| \leqslant 3\varepsilon,$$

или

$$\left|c_k - \sum_{i=k+1}^{N} c_i\right| \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Устремляя N к бесконечности, приходим к неравенству

$$\left|c_k - \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i\right| \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего соотношения следует равенство

$$c_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i,$$

которое справедливо для каждого натурального k, или, подробнее,

$$c_1 = \sum_{i=2}^{\infty} c_i, \quad c_2 = \sum_{i=3}^{\infty} c_i, \quad \ldots \quad , \quad c_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i, \quad \ldots .$$

Вычитая из первого уравнения второе, из второго третье, и так далее, получим:

$$\begin{gathered} c_1 - c_2 = c_2 \;\Rightarrow\; c_1 = 2c_2 \\ c_2 - c_3 = c_3 \;\Rightarrow\; c_2 = 2c_3 \\ \vdots \\ c_i - c_{i+1} = c_{i+1} \;\Rightarrow\; c_i = 2c_{i+1} \\ \vdots \end{gathered}$$

Положим $c_1 = c/4$, тогда из выписанных реккурентных соотношений будем иметь:

$$c_2 = c/8,\ c_3 = c/16, \ldots, c_i = c/2^{i+1} \ldots .$$

Таким образом, учитывая (2.1),

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(t) = c \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(t) = c\left(\frac{1}{2} - t\right),$$

и теорема полностью доказана.

Пример 2.3: Пользуясь теоремой 2.1 и тем, что $r_0(t) \equiv 1$ на $(0,1)$, мы можем представить все линейные функции вида $At + B$ по системе $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$At + B = \sum_{i=0}^{\infty} c_i r_i(t) \text{ почти всюду на } [0,1],$$

где

$$c_0 = B + \frac{A}{2},\ c_i = -A2^{-i-1},\ i \geqslant 1.$$

Пример 2.4: Рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(t)$$

на всей прямой $\mathbb{R}$. Это периодическая функция с периодом 1, совпадающая с линейной на интервале $(0,1)$ в силу соотношения (2.1). Из этого замечания и определения функции $r_0(t)$ несложно усмотреть, что функция

$$r_0(t) \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(t)$$

совпадает почти всюду на $\mathbb{R}$ с непрерывной четной периодической функцией с периодом 2. Более точно, имеет место следующее соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_0(t) r_i(t) = \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos(\pi t)) \text{ почти всюду на } \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

3. Непрерывные функции в оболочке хаосов второго порядка

В этом параграфе мы исследуем возможность представления непрерывной функции в виде ряда по хаосам $\{r_i r_j\}_{1 \leqslant i < j < \infty}$.

Из предыдущего параграфа нам известно, что линейная оболочка системы Радемахера содержит линейную функцию $1/2 - t$. Воспользовавший соотношением (2.1) можно получить следующее

$$\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i-1}r_i(t)\right)^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^{-i-1}r_i(t)\right)^2+2\sum_{1\leqslant i<j<\infty}2^{-i-j-2}r_i(t)r_j(t)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-2i-2}+\sum_{1\leqslant i<j<\infty}2^{-i-j-1}r_i(t)r_j(t)$$

или, выражая сумму хаосов,

$$\sum_{1\leqslant i<j<\infty}2^{-i-j-1}r_i(t)r_j(t)=\frac{1}{6}-t+t^2. \tag{3.1}$$

Последнее соотношение аналогично (2.1). Но, в отличие от случая системы Радемахера (системы хаосов первого порядка), в линейной оболочке хаосов второго порядка представленная непрерывная функция не единственна. Более того, непрерывные функции в оболочке хаосов сами образуют бесконечномерное пространство. Соответствующий базис описан далее в теореме 3.2. Сформулируем сначала следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.1: Для любого натурального j справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i-1}r_j(t)r_{j+i}(t)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\cos(2^j\pi t)\right)\quad\text{почти всюду на } \mathbb{R}.$$

Доказательство: Для доказательства воспользуемся равенством (2.8). Учитывая связь между функциями Радемахера (1.1), получим

$$\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i-1}r_j(t)r_{j+i}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i-1}r_0(2^jt)r_i(2^jt)=\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\cos(2^j\pi t)\right)$$

почти всюду на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.2: Пусть

$$f(t)=\sum_{1\leqslant i<j<\infty}c_{ij}r_i(t)r_j(t)\quad\text{почти всюду на } [0,1], \tag{3.2}$$

функция $f(t)$ непрерывна, и

$$\sum_{1\leqslant i<j<\infty}|c_{ij}|<\infty. \tag{3.3}$$

Тогда

1) $\sum_{i=1}^{\infty}|c_{ii+1}|<\infty$;
2) $c_{ij}=2^{-j+i+1}c_{ii+1},\ j>i$.

Обратно, если выполнены условия 1) и 2), то имеет место равенство (3.2) для непрерывной функции f и выполняется (3.3). Кроме того, для этой функции справедливо следующее представление:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_{ii+1}f_i(t),\quad\text{где } f_i(t)=f_0(2^it),\ f_0(t)=\frac{4}{\pi}\arcsin(\cos\pi t). \tag{3.4}$$

Доказательство: Пусть функция $f(t)$ непрерывна, и выполнены условия (3.2) и (3.3). Покажем, что в этом случае выполняется 1) и 2).

Докажем сначала, что при справедливости 2) условия 1) и (3.3) равносильны. Для этого выполним преобразования с суммами.

$$\sum_{1\leqslant i<j<\infty} |c_{ij}| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j>i} |c_{ij}| = [\text{используем 2)}] = v$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j+i+1} |c_{ii+1}| = [k = j-i-1] =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} |c_{ii+1}| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2\sum_{i=1}^{\infty} |c_{ii+1}|,$$

т.е., при условии 2),

$$\sum_{1\leqslant i<j<\infty} |c_{ij}| = 2\sum_{i=1}^{\infty} |c_{ii+1}|,$$

и из сходимости одного из рядов следует сходимость другого.

Итак, в предположении (3.2) и (3.3), нам достаточно проверить выполнение условия 2).

Так как функция $f(t)$ непрерывна, то для любой точки $t_0 \in [0,1]$

$$\lim_{t\to t_0-0} f(t) = \lim_{t\to t_0+0} f(t).$$

Обозначим через A множество точек из отрезка $[0,1]$, в которых выполняется равенство (3.2). Тогда из предыдущего получим для произвольных последовательностей $s_n^- \uparrow t_0$ и $s_n^+ \downarrow t_0$ таких, что $s_n^-, s_n^+ \in A\backslash\{t_0\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i<j<\infty} c_{ij} r_i(s_n^-) r_j(s_n^-) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i<j<\infty} c_{ij} r_i(s_n^+) r_j(s_n^+) = f(t_0). \tag{3.5}$$

Рассмотрим точку $t_0 \in (0,1)$ вида

$$t_0 = t_{km} = \frac{k}{2^m},\ k = 2l-1,\ l \in \mathbb{N}.$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Из (3.5) следует, что для всех $n > n_0$

$$\left| \sum_{1\leqslant i<j<\infty} c_{ij}(r_i(s_n^-) r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+) r_j(s_n^+)) \right| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Так как ряд $\sum c_{ij}$ сходится абсолютно, для всех $N > N_0$

$$\sum_{N<j<\infty} |c_{ij}| < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства и (3.6) для $n > n_0$ и $N > N_0$ следуют оценки

$$\left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))\right| =$$

$$= \left|\sum_{1\leqslant i<j<\infty} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+)) - \right.$$

$$\left. - \sum_{N<j} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{1\leqslant i<j<\infty} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))\right| +$$

$$+ \left|\sum_{N<j} c_{ij} r_i(s_n^-)r_j(s_n^-)\right| + \left|\sum_{N<j} c_{ij} r_i(s_n^+)r_j(s_n^+)\right| < 3\varepsilon,$$

или

$$\left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))\right| < 3\varepsilon. \tag{3.7}$$

Рассмотрим поведение функции $r_i r_j$ в окрестности точки $t_{km} = k/2^m$, $k = 2l - 1$. Для этого вспомним, что

$$\lim_{s\to t_{km}-0} r_i(s) = \begin{cases} \epsilon_{ikm}, & \text{если } i < m; \\ 1, & \text{если } i = m; \\ -1, & \text{если } i > m; \end{cases}$$

$$\lim_{s\to t_{km}+0} r_i(s) = \begin{cases} \epsilon_{ikm}, & \text{если } i < m; \\ -1, & \text{если } i = m; \\ 1, & \text{если } i > m, \end{cases}$$

где $\epsilon_{ikm} = \pm$ зависит от i, k и m. Перемножая значения r_i и r_j, получим

$$\lim_{s\to t_{km}-0} r_i(s)r_j(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant i < j < m; \\ \epsilon_{ikm}, & \text{если } 1 \leqslant i < m = j; \\ -\epsilon_{ikm}, & \text{если } 1 \leqslant i < m < j; \\ -1, & \text{если } i = m < j; \\ 1, & \text{если } m < i < j. \end{cases}$$

Аналогично

$$\lim_{s\to t_{km}+0} r_i(s)r_j(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant i < j < m; \\ -\epsilon_{ikm}, & \text{если } 1 \leqslant i < m = j; \\ \epsilon_{ikm}, & \text{если } 1 \leqslant i < m < j; \\ -1, & \text{если } i = m < j; \\ 1, & \text{если } m < i < j. \end{cases}$$

Устремляя в (3.7) n к бесконечности и подставляя найденные предельные значения $r_i r_j$, получим (можно считать, что $N > m$):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{1\leqslant i<j<m} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))+\right.$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j=m} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))+$$

$$+\sum_{1\leqslant i<m<j\leqslant N} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))+$$

$$+\sum_{i=m<j\leqslant N} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))+$$

$$\left.+\sum_{m<i<j\leqslant N} c_{ij}(r_i(s_n^-)r_j(s_n^-) - r_i(s_n^+)r_j(s_n^+))\right| =$$

$$= \left|0 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\epsilon_{ikm}c_{im} - 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=m+1}^{N}\epsilon_{ikm}c_{ij} + 0 + 0\right| \leqslant 3\varepsilon.$$

Устремляя теперь N к бесконечности, приходим к неравенству

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1}\epsilon_{ikm}c_{im} - \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=m+1}^{\infty}\epsilon_{ikm}c_{ij}\right| \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon,$$

откуда, воспользовавшись произвольностью $\varepsilon > 0$, получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{m-1}\epsilon_{ikm}c_{im} = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=m+1}^{\infty}\epsilon_{ikm}c_{ij}. \tag{3.8}$$

Меняя значение $k = 2l-1$ в числителе точки $t_{km} = k/2^m$, можно добиться попадания точки t_{km} в произвольный интервал вида $\left(\frac{z}{2^{m-1}}, \frac{z+1}{2^{m-1}}\right)$, $z = 0, 1, \ldots, 2^{m-1}-1$. Согласно следствию 1.2 таким образом мы можем получить любой набор знаков $\{\epsilon_{ikm}\}_{i=1}^{m-1}$. В частности, наборы $\{1, 1, \ldots, 1, 1\}$ и $\{1, 1, \ldots, 1, -1\}$, отличающиеся последним знаком. Подставляя эти наборы в (3.8), получим

$$\sum_{i=1}^{m-2}c_{im} + c_{m-1m} = \sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=m+1}^{\infty}c_{ij} + \sum_{j=m+1}^{\infty}c_{m-1j}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m-2}c_{im} - c_{m-1m} = \sum_{i=1}^{m-2}\sum_{j=m+1}^{\infty}c_{ij} - \sum_{j=m+1}^{\infty}c_{m-1j}.$$

Вычитая теперь из первого второе, получим равенство

$$c_{m-1m} = \sum_{j=m+1}^{\infty}c_{m-1j},$$

справедливое для всех $m = 2, 3, \ldots$.

Аналогично, выбирая наборы знаков $\{1, 1, \ldots, 1, 1\}$ и $\{1, 1, \ldots, -1, \ldots, 1, 1\}$, отличающиеся i-ым знаком, получим равенства

$$c_{im} = \sum_{j=m+1}^{\infty} c_{ij},$$

справедливые для всех $1 \leqslant i < m$. Выпишем подробнее эти равенства для фиксированного i и всех $m > i$:

$$\begin{gathered}
c_{ii+1} = c_{ii+2} + c_{ii+3} + c_{ii+4} + \cdots ;\\
c_{ii+2} = c_{ii+3} + c_{ii+4} + c_{ii+5} + \cdots ;\\
c_{ii+3} = c_{ii+4} + c_{ii+5} + c_{ii+6} + \cdots ;\\
\vdots\\
c_{ii+j} = c_{ii+j+1} + c_{ii+j+2} + c_{ii+j+3} + \cdots ;\\
\vdots
\end{gathered}$$

Вычитая из первого уравнения второе, из второго третье и так далее получим:

$$\begin{gathered}
c_{ii+1} = 2c_{ii+2} \;\Rightarrow\; c_{ii+2} = 2^{-1}c_{ii+1};\\
c_{ii+2} = 2c_{ii+3} \;\Rightarrow\; c_{ii+3} = 2^{-1}c_{ii+2} = 2^{-2}c_{ii+1};\\
\vdots\\
c_{ii+k} = 2c_{ii+k+1} \;\Rightarrow\; c_{ii+k+1} = 2^{-1}c_{ii+k} = 2^{-k}c_{ii+1};\\
\vdots
\end{gathered}$$

Или, заменяя $i + k + 1$ на j,

$$c_{ij} = 2^{-j+i+1}c_{ii+1}, \; j > i,$$

т.е. условие 2).

Предположим теперь, что выполнены условия 1) и 2). Как мы уже знаем, в этом случае справедливо (3.3). Поэтому ряд в (3.2) сходится абсолютно и допускает произвольную группировку слагаемых. Преобразуем (3.2):

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{1\leqslant i<j<\infty} c_{ij}r_i(t)r_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} c_{ij}r_i(t)r_j(t) =\\
&= [\text{используем } 2] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j+i+1}c_{ii+1}r_i(t)r_j(t) =\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} c_{ii+1}\sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j+i+1}r_i(t)r_j(t) = [k = j - i] =\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} c_{ii+1}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}r_i(t)r_{i+k}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ii+1}\cdot\frac{4}{\pi}\arcsin(\cos(2^i\pi t))
\end{aligned}$$

согласно лемме 3.1.

Итак
$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_{ii+1}\cdot\frac{4}{\pi}\arcsin(\cos(2^i\pi t)),$$
т.е. справедливо (3.4). Наконец, функции $c_{ii+1}\cdot\frac{4}{\pi}\arcsin(\cos(2^i\pi t))$ непрерывны, и выполняются неравенства
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|c_{ii+1}\cdot\frac{4}{\pi}\arcsin(\cos(2^i\pi t))\right|\leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}|c_{ii+1}|<\infty$$
согласно 1). Используя известную теорему Вейерштрасса о равномерном пределе непрерывных функций, заключаем, что функция $f(t)$ непрерывна. Теорема доказана полностью.

Пример 3.3: Рассмотрим коэффициенты c_{ij} из формулы (3.1).
$$c_{ij}=2^{-i-j-1}=2^{-j+i+1}c_{ii+1},\ i<j,\ c_{ii+1}=2^{-2i-2}.$$
Мы видим, что выполнены условия 1) и 2) теоремы 3.2. Представление (3.4) дает разложение квадратичной функции по системе f_i:
$$\frac{1}{6}-t+t^2=\sum_{1=i<j<\infty}2^{-i-j-1}r_i(t)r_j(t)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-2i}\cdot\frac{1}{\pi}\arcsin(\cos(2^i\pi t)).$$

Пример 3.4: Используя вместе с хаосами $\{r_ir_j\}_{1\leqslant i<j}$ функции Радемахера $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ можно получить представление произвольной квадратичной функции At^2+Bt+C на $[0,1]$:
$$At^2+Bt+C=\sum_{1\leqslant i<j<\infty}c_{ij}r_i(t)r_j(t)+\sum_{i=0}^{\infty}c_ir_i(t)\ \text{почти всюду на}\ [0,1].$$
Сответствующие коэффициенты разложения:
$$c_{ij}=2^{-i-j-1}A,\ c_i=2^{-i-1}(A+B),\ i>0,\ c_0=\frac{A}{3}+\frac{B}{2}+C.$$

Пример 3.5: Положим в (3.4) $c_{ii+1}=2^{-i-2}$ для четных i и $c_{ii+1}=0$ для нечетных i. Согласно теореме 3.2 функция
$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}4^{-i}\cdot\frac{1}{\pi}\arcsin(\cos(4^i\pi t))=[\text{почти всюду}]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2i+1}^{\infty}2^{-j-1}r_{2i}(t)r_j(t)$$
непрерывна на $[0,1]$, и даже на $\mathbb{R}$, в силу периодичности и совпадения значений в точках 0 и 1. Покажем, что эта функция нигде не имеет производной.

Обозначим
$$h_i(t)=4^{-i}\cdot\frac{1}{\pi}\arcsin(\cos(4^i\pi t)).$$
График $h_i(t)$ имеет вид "пилы" с шириной "зуба" $2\cdot 4^{-i}$ и наклоном 45 градусов. Поэтому для произвольной точки $t\in\mathbb{R}$ и $\Delta t=\pm 2\cdot 4^{-k}$ справедливо
$$\frac{h_i(t+\Delta t)-h_i(t)}{\Delta t}=0\ \text{при}\ i\geqslant k.$$

Кроме того, знак у Δt может быть выбран таким образом, что

$$\frac{h_i(t+\Delta t)-h_i(t)}{\Delta t}=\epsilon_i,\ |\epsilon_i|=1,\ \text{при}\ i<k.$$

Для выбранного Δt рассмотрим разностное отношение

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h_i(t+\Delta t)-h_i(t)}{\Delta t}=$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{h_i(t+\Delta t)-h_i(t)}{\Delta t}+\sum_{i=k}^{\infty}\frac{h_i(t+\Delta t)-h_i(t)}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_i.$$

Так как последняя сумма является натуральным числом одной четности с k, рассматриваемое разностное отношение не может иметь предела при $k\to\infty$, а значит и при $\Delta t\to 0$.

Первый пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции построил Карл Вейерштрасс. См. также [4, С. 52].

Литература

[1] Стечкин, С.Б. О множествах единственности / С.Б. Стечкин, П.Л. Ульянов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – С. 211–222.

[2] Blei, R. Analysis in integer and fractional dimensions / R. Blei. – Cambridge: Cambridge University Press. 2001. – 556 p.

[3] Кашин, Б.С. Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян М.: АФЦ, 1999. – 550 с.

[4] Гелбаум, Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед – М.: МИР, 1967. – 252 с.

Поступила в редакцию 9/*IX*/2008;
в окончательном варианте — 9/*IX*/2008.

THE STRUCTURE OF CONTINUOUS FUNCTIONS GENERATED BY RADEMACHER CHAOS[3]

© 2008 K.V. Lykov, T.A. Morozova, R.S. Sukhanov[4]

In the paper the properties of continuous functions on $[0,1]$ represented as Rademacher or chaos series are discussed. We prove that all continuous functions generated by Rademacher chaos form a infinite dimensional vector space and a basis in this space is obtained. In particular, we show that this space contains quadratic function and nowhere differentiable function.

Keywords and phrases: *Rademacher function, Rademacher series, Rademacher chaos, continuous function, almost everywhere convergence, Weierstrass function.*

Paper received 9/*IX*/2008.
Paper accepted 9/*IX*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4]Lykov Konstantin Vladimirovich (alkv@list.ru), Morozova Tatyana Andreevna, Sukhanov Roman Sergeevich, Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.