УДК 517.51+517.98

РАВНОМЕРНЫЕ ФРЕЙМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^N$ [1]

© 2008 М.А. Лапшина[2]

В данной статье приведена конструкция равномерного фрейма Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^N$ сколь угодно большого объема. Выяснено какие из построенных фреймов являются фреймами Грассмана и равноугольными фреймами.

Ключевые слова: *границы фрейма, оператор анализа, оператор синтеза, фрейм, равномерный фрейм.*

Введение

Основное внимание в данной работе уделяется *равномерным* фреймам для пространства $\mathbb{R}^N$, то есть фреймам, состоящим из элементов одинаковой нормы. В первом параграфе приведена конструкция равномерного фрейма Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^N$ сколь угодно большого объема. Аналогичная конструкция в пространстве $\mathbb{C}^N$ была описана в статье [1] и там же было показано, что стандартный переход к вещественной или мнимой части этой конструкции не приводит к цели.

В работе [2] также были приведены примеры равномерных фреймов Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^N$, однако при проверке обнаружилось, что требование равномерности нарушается. Поэтому первую часть данной работы можно рассмотреть как уточнение работы [2].

Во второй части работы приводятся другие варианты ограничений на фреймы (это так называемые фреймы Грассмана и равноугольные) и выясняется какие из построенных в первой части фреймы удовлетворяют этим ограничениям.

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

[2]Лапшина Мария Александровна (Marijalapshina@rambler.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Построение равномерного фрейма Парсеваля в пространстве $\mathbb{R}^N$

Все рассуждения в работе будем проводить в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^N$, в котором введено стандартное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Пусть M и N — натуральные числа, причем $M \geqslant N$.

Введем понятие фрейма:

Определение 1.1: Набор элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ из $\mathbb{R}^N$ называется *фреймом* для пространства $\mathbb{R}^N$, если существуют положительные числа A и B такие, что для всех x из $\mathbb{R}^N$

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} |<x, \varphi_i>|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Числа A и B называются соответственно нижней и верхней границей фрейма, причем $\inf B$ — оптимальная верхняя граница фрейма, а $\sup A$ — оптимальная нижняя граница фрейма. Если оптимальные верхняя и нижняя границы совпадают, то есть $A = B$, то фрейм называется жестким. Жесткий фрейм, у которого $A = B = 1$, называется фреймом Парсеваля.

Определение 1.2: Фрейм $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ называется *равномерным*, если существует число α такое, что $\|\varphi_i\| = \alpha$ для любого i.

Заметим, что для равномерного фрейма Парсеваля $\alpha = \sqrt{\dfrac{N}{M}}$ [1].

С каждым фреймом связаны три оператора:

1) оператор анализа $F:\ x \mapsto \{<x, \varphi_i>\}_{i=1}^M,\ F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$;

2) оператор синтеза $F^* : \{a_i\} \in \mathbb{R}^M \to \sum\limits_{i=1}^{M} a_i\varphi_i \in \mathbb{R}^N$, сопряженный для оператора анализа;

3) фреймовый оператор $S\,x$:

$$S\,x = F^*F\,x = \sum_{i=1}^{M} <x, \varphi_i>\, \varphi_i.$$

Для каждого x из $\mathbb{R}^N$ справедливо фреймовое представление:

$$x = \sum_{i=1}^{M} <x, S^{-1}\varphi_i>\, \varphi_i.$$

Перечисленные выше факты с доказательствами изложены в книге [3] и в статье [1]. Следующая теорема в статье [1] получена в качестве следствия общей теоремы П. Касацы (P. Cacazza) и его соавторов. В данной работе предлагается конструктивное доказательство для пространства $\mathbb{R}^N$.

Теорема 1.1: В пространстве $\mathbb{R}^N$ существует фрейм Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ с одинаковыми нормами для любого $M \geqslant N$.

Доказательство: Введем в расмотрение следующие $M \times M$ матрицы отдельно для четного и нечетного числа M.

Пусть $M = 2k + 1$, в этом случае определяем матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{M-2} \\ \varphi_{M-1} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos 2\pi\frac{1}{M} & \cos 2\pi\frac{2}{M} & \dots & \cos 2\pi\frac{M-1}{M} \\ 0 & \sin 2\pi\frac{1}{M} & \sin 2\pi\frac{2}{M} & \dots & \sin 2\pi\frac{M-1}{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos 2\pi\frac{k}{M} & \cos 2\pi\frac{2k}{M} & \dots & \cos 2\pi\frac{k(M-1)}{M} \\ 0 & \sin 2\pi\frac{k}{M} & \sin 2\pi\frac{2k}{M} & \dots & \sin 2\pi\frac{k(M-1)}{M} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что семейство $\{\varphi_i\}_{i=0}^{M-1}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^M$.

Покажем сначала, что $\|\varphi_i\| = 1$ для всех $i = 0, \dots, M-1$.

Если $i = 0$, то $\|\varphi_i\|^2 = \dfrac{2}{M} \times \dfrac{M}{2} = 1$. Если $i = 2q-1$, $q = 1, \dots, k$, то

$$\|\varphi_i\|^2 = \|\varphi_{2q-1}\|^2 = \frac{2}{M}\sum_{l=0}^{M-1} \cos^2 2\pi\frac{ql}{M} = \frac{2}{M}\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{M-1}\left(1 + \cos 4\pi\frac{ql}{M}\right) =$$
$$= \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2} + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{M-1}\cos 4\pi\frac{ql}{M}\right) = \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{l=0}^{M-1}(\omega^{2q})^l\right) =$$
$$= \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1-(\omega^{2q})^M}{1-\omega^{2q}}\right)\right),$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi j}{M}}$, $j^2 = -1$.

Рассмотрим цепочку равенств

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-(\omega^{2q})^M}{1-\omega^{2q}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\exp\dfrac{2\pi j 2qM}{M}}{1-\exp\dfrac{2\pi j 2q}{M}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-\cos 4\pi q - j\sin 4\pi q}{1-\cos\dfrac{4\pi q}{M} - j\sin\dfrac{4\pi q}{M}}\right) =$$
$$= \frac{(1-\cos 4\pi q)\left(1-\cos\dfrac{4\pi q}{M}\right)}{2-2\cos\dfrac{4\pi q}{M}} = \frac{(1-\cos 4\pi q)}{2} = \sin^2 2\pi q = 0$$

для $q = 1, ..., k$. Таким образом, получаем $\|\varphi_{2q-1}\| = 1$ для $q = 1, ..., k$.

Аналогично, если $i = 2q$, $q = 1, ..., k$, то

$$\|\varphi_i\|^2 = \|\varphi_{2q}\|^2 = \frac{2}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\sin^2 2\pi\frac{ql}{M} = \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2} - \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{M-1}\cos 4\pi\frac{ql}{M}\right) = 1.$$

Таким образом, имеем равенство $\|\varphi_{2q}\|^2 = 1$ для всех $q = 1, ..., k$.

Пусть $\omega = \exp\dfrac{2\pi j}{M}$. Покажем, что φ_i — попарно ортогональны для значений $i = 0, ..., M-1$

$$<\varphi_0, \varphi_{2q-1}>= \frac{2}{M\sqrt{2}}\sum_{l=0}^{M-1}\cos 2\pi\frac{(2q-1)l}{M} = \frac{2}{M\sqrt{2}}\mathrm{Re}\sum_{l=0}^{M-1}(\omega^{2q-1})^l = 0,$$

$$<\varphi_0, \varphi_{2q}>= \frac{2}{M\sqrt{2}}\sum_{l=0}^{M-1}\sin 2\pi\frac{2ql}{M} = \frac{2}{M\sqrt{2}}\,\mathrm{Im}\sum_{l=0}^{M-1}(\omega^{2q})^l =$$

$$= \frac{2}{M\sqrt{2}}\mathrm{Im}\frac{1-\omega^{2qM}}{1-\omega^{2q}} = \frac{2}{M\sqrt{2}}\mathrm{Im}\frac{1-\exp\dfrac{2\pi j2qM}{M}}{1-\exp\dfrac{2\pi j2q}{M}} =$$

$$= \frac{2}{M\sqrt{2}}\mathrm{Im}\frac{(1-\cos 4\pi q + j\sin 4\pi q)(1-\cos\dfrac{4\pi q}{M} + j\sin\dfrac{2\pi q}{M})}{2-2\cos\dfrac{4\pi q}{M}} =$$

$$= \frac{2}{M\sqrt{2}}\frac{\sin^2 2\pi q\sin\dfrac{4\pi q}{M}}{1-\cos\dfrac{4\pi q}{M}} = 0,$$

$$<\varphi_{2q-1}, \varphi_{2q}>= \frac{2}{M}\sum_{l=1}^{M-1}\cos\frac{2\pi l(2q-1)}{M}\sin\frac{4\pi ql}{M} =$$

$$= \frac{1}{M}\left[\sum_{l=1}^{M-1}\sin\frac{2\pi l(4q-1)}{M} + \sum_{l=1}^{M-1}\sin\frac{2\pi l}{M}\right] =$$

$$= \frac{1}{M}\mathrm{Im}\left[\sum_{l=1}^{M-1}(\omega^{4q+1})^l + \sum_{l=1}^{M-1}\omega^l\right] = \frac{1}{M}\mathrm{Im}\left[\sum_{l=0}^{M-1}(\omega^{4q+1})^l + \sum_{l=0}^{M-1}\omega^l - 2\right] = 0.$$

Аналогично показывается, что $<\varphi_{2q-1},\ \varphi_{2p-1}>= 0$ и $<\varphi_{2q},\ \varphi_{2p}>= 0$.

Таким образом, мы показали, что матрица ортогональная. Транспонируем матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_{M-2}^T \\ \varphi_{M-1}^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{1}{M} & \sin 2\pi\frac{1}{M} & \dots & \cos 2\pi\frac{k}{M} & \sin 2\pi\frac{k}{M} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{2}{M} & \sin 2\pi\frac{2}{M} & \dots & \cos 2\pi\frac{2k}{M} & \sin 2\pi\frac{2k}{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{M-1}{M} & \sin 2\pi\frac{M-1}{M} & \dots & \cos 2\pi\frac{k(M-1)}{M} & \sin 2\pi\frac{k(M-1)}{M} \end{pmatrix}.$$

Далее применяем универсальный метод построения фреймов Парсеваля [1].

Если N нечетно, то удаляем последние $M - N$ столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^N$. Проверим, что нормы будут одинаковые.

Для $i = 0$, имеет место равенство $\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2}\right) = \frac{N}{M}$.

Для $i = 1, \dots, M-1$ находим

$$\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos^2 2\pi\frac{li}{M} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin^2 2\pi\frac{li}{M}\right) =$$

$$= \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(\cos^2 2\pi\frac{li}{M} + \sin^2 2\pi\frac{li}{M}\right)\right) = \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2}\right) = \frac{N}{M}.$$

Если N четно, то удаляем первые $M-N$ столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^N$. Проверим, что нормы будут одинаковыми.

Для $i = 0$, справедливо равенство $\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M} \cdot \frac{N}{2} = \frac{N}{M}$.

Для $i = 1, \dots, M-1$ имеем равенство

$$\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M}\left(\sum_{l=(M-N-1)/2}^{\frac{M-1}{2}} \cos^2 2\pi\frac{li}{M} + \sum_{l=(M-N-1)/2}^{\frac{M-1}{2}} \sin^2 2\pi\frac{li}{M}\right) =$$

$$= \frac{2}{M}\sum_{l=(M-N-1)/2}^{\frac{M-1}{2}}\left(\cos^2 2\pi\frac{li}{M} + \sin^2 2\pi\frac{li}{M}\right) = \frac{2}{M}\frac{N}{2} = \frac{N}{M}.$$

Примеры:

1) Фрейм Парсеваля с одинаковыми нормами для $N = 3$ и $M = 5$

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \varphi_3^T \\ \varphi_4^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{1}{5} & \sin 2\pi\frac{1}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{2}{5} & \sin 2\pi\frac{2}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{3}{5} & \sin 2\pi\frac{3}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{4}{5} & \sin 2\pi\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

2) Фрейм Парсеваля с одинаковыми нормами для $N = 4$ и $M = 7$

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \varphi_3^T \\ \varphi_4^T \\ \varphi_5^T \\ \varphi_6^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos 2\pi\frac{2}{7} & \sin 2\pi\frac{2}{7} & \cos 2\pi\frac{3}{7} & \sin 2\pi\frac{3}{7} \\ \cos 2\pi\frac{4}{7} & \sin 2\pi\frac{4}{7} & \cos 2\pi\frac{6}{7} & \sin 2\pi\frac{6}{7} \\ \cos 2\pi\frac{6}{7} & \sin 2\pi\frac{6}{7} & \cos 2\pi\frac{9}{7} & \sin 2\pi\frac{9}{7} \\ \cos 2\pi\frac{8}{7} & \sin 2\pi\frac{8}{7} & \cos 2\pi\frac{12}{7} & \sin 2\pi\frac{12}{7} \\ \cos 2\pi\frac{10}{7} & \sin 2\pi\frac{10}{7} & \cos 2\pi\frac{15}{7} & \sin 2\pi\frac{15}{7} \\ \cos 2\pi\frac{12}{7} & \sin 2\pi\frac{12}{7} & \cos 2\pi\frac{18}{7} & \sin 2\pi\frac{18}{7} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Пусть теперь $M = 2k$. Определяем матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{M-3} \\ \varphi_{M-2} \\ \varphi_{M-1} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos 2\pi\frac{1}{M} & \cos 2\pi\frac{2}{M} & \dots & \cos 2\pi\frac{M-1}{M} \\ 0 & \sin 2\pi\frac{1}{M} & \sin 2\pi\frac{2}{M} & \dots & \sin 2\pi\frac{M-1}{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos 2\pi\frac{k-1}{M} & \cos 2\pi\frac{2(k-1)}{M} & \dots & \cos 2\pi\frac{(k-1)(M-1)}{M} \\ 0 & \sin 2\pi\frac{k-1}{M} & \sin 2\pi\frac{2(k-1)}{M} & \dots & \sin 2\pi\frac{(k-1)(M-1)}{M} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Аналогично случаю $M = 2k + 1$, можно показать что семейство $\varphi_{i\,i=0}^{M-1}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^M$.

Покажем сначала, что $\|\varphi_i\| = 1$ для всех $i = 0, \dots, M - 1$.

Если $i = 0$ и $i = M-1$, то $\|\varphi_i\|^2 = \frac{2}{M} \times \frac{M}{2} = 1$. Если $i = 2q-1$, $q = 1, \dots, k-1$, то

$$\|\varphi_i\|^2 = \|\varphi_{2q-1}\|^2 = \frac{2}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \cos^2 2\pi\frac{ql}{M} = 1.$$

Аналогично, если $i = 2q$, $\quad q = 1, ..., k - 1$.

$$\|\varphi_i\|^2 = \|\varphi_{2q}\|^2 = \frac{2}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sin^2 2\pi\frac{ql}{M} = 1.$$

Можно далее показать, что φ_i — попарно ортогональны для значений индекса $i = 0, ..., M-1$, следовательно

$$<\varphi_0, \varphi_{2q-1}> = \frac{2}{M\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{M-1} \cos 2\pi \frac{(2q-1)l}{M} = 0;$$

$$<\varphi_0, \varphi_{2q}> = \frac{2}{M\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{M-1} \sin 2\pi \frac{2ql}{M} = 0;$$

$$<\varphi_{2q-1}, \varphi_{2q}> = \frac{2}{M} \sum_{l=1}^{M-1} \cos \frac{2\pi l(2q-1)}{M} \sin \frac{4\pi ql}{M} = 0;$$

$$<\varphi_{2q-1}, \varphi_{2p-1}> = 0 \qquad <\varphi_{2q}, \varphi_{2p}> = 0.$$

Таким образом, данная матрица является ортогональной. Транспонируем матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_{M-2}^T \\ \varphi_{M-1}^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{1}{M} & \sin 2\pi \frac{1}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{(k-1)}{M} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{2}{M} & \sin 2\pi \frac{2}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{2(k-1)}{M} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{M-1}{M} & \sin 2\pi \frac{M-1}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{(k-1)(M-1)}{M} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему строим равномерный фрейм Парсеваля.

Если N нечетно, то удаляем последние $M-N$ столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^N$. Проверим, что нормы будут одинаковые.

Для $i = 0$ имеем $\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2}\right) = \frac{N}{M}$.

Для $i = 1, \dots, M-1$ имеем

$$\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin^2 2\pi \frac{li}{M}\right) =$$

$$= \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sin^2 2\pi \frac{li}{M}\right)\right) = \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2}\right) = \frac{N}{M}.$$

Если N четно, то удаляем первый и $M-N-1$ последних столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^N$. Проверим, что нормы будут одинаковыми.

Если $i = 0$, то $\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M} \cdot \frac{N}{2} = \frac{N}{M}$.

Для $i = 1, \dots, M-1$

$$\|\varphi_i^T\|^2 = \frac{2}{M}\left(\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}} \cos^2 2\pi\frac{li}{M} + \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}} \sin^2 2\pi\frac{li}{M}\right) =$$

$$= \frac{2}{M}\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}}\left(\cos^2 2\pi\frac{li}{M} + \sin^2 2\pi\frac{li}{M}\right) = \frac{2}{M}\frac{N}{2} = \frac{N}{M}.$$

Теорема доказана.

Примеры:

3) Фрейм Парсеваля с одинаковыми нормами для $N = 3$ и $M = 6$

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \varphi_3^T \\ \varphi_4^T \\ \varphi_5^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{6}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{1}{6} & \sin 2\pi\frac{1}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{2}{6} & \sin 2\pi\frac{2}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{3}{6} & \sin 2\pi\frac{3}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{4}{6} & \sin 2\pi\frac{4}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi\frac{5}{6} & \sin 2\pi\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{3}{6}}$.

4) Фрейм Парсеваля с одинаковыми нормами для $N = 4$ и $M = 6$

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \varphi_3^T \\ \varphi_4^T \\ \varphi_5^T \\ \varphi_6^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{7}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos 2\pi\frac{1}{6} & \sin 2\pi\frac{1}{6} & \cos 2\pi\frac{2}{6} & \sin 2\pi\frac{2}{6} \\ \cos 2\pi\frac{2}{6} & \sin 2\pi\frac{2}{6} & \cos 2\pi\frac{4}{6} & \sin 2\pi\frac{4}{6} \\ \cos 2\pi\frac{3}{6} & \sin 2\pi\frac{3}{6} & \cos 2\pi\frac{6}{6} & \sin 2\pi\frac{6}{6} \\ \cos 2\pi\frac{4}{6} & \sin 2\pi\frac{4}{6} & \cos 2\pi\frac{8}{6} & \sin 2\pi\frac{8}{6} \\ \cos 2\pi\frac{5}{6} & \sin 2\pi\frac{5}{6} & \cos 2\pi\frac{10}{6} & \sin 2\pi\frac{10}{6} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{4}{6}}$.

2. Фреймы Грассмана в пространстве $\mathbb{R}^N$

Для прикладных исследований большой интерес представляют фреймы со специальными свойствами. Рассмотрим, например, фреймы Грассмана [4].

Пусть M и N — натуральные числа, причем $M \geqslant N$.

Определение 2.1: Пусть $X_N^M = \{x_i\}_{i=1}^M$ — набор векторов из $\mathbb{R}^N$ такой, что $\|x_i\| = 1$ для любого i. Максимальную корреляцию в $\mathbb{R}^N$ обозначим $M_\infty(X_N^M)$ и определим как

$$M_\infty(X_N^M) = \max_{i \neq p} |{<}x_i, x_p{>}|.$$

Определение 2.2: Последовательность $\Phi_N^M = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ из $\mathbb{R}^N$ такую, что $\|\varphi_i\| = 1$ для любого i назовем (M, N) — фреймом Грассмана, если она является фреймом и выполнено равенство

$$M_\infty(\Phi_N^M) = \inf M_\infty(X_N^M),$$

где инфинум берется по всем наборам из M единичных векторов.

Определение 2.3: Набор нормированных векторов $X_N^M = \{x_i\}_{i=1}^M$ называется *равноугольным*, если существует число $\alpha \in [0, 1]$ такое, что выполняется равенство $|{<}x_i, x_p{>}| = \alpha$ для $i \neq p$.

В работе [4] доказана **Теорема 2.1** [4, th IV.2].

Пусть $X_N^M = \{x_i\}_{i=1}^M$ — набор нормированных векторов пространства $\mathbb{R}^N$ и пусть $N_0 = \dim(\mathrm{span}\,(X_N^M))$. Тогда справедливо неравенство

$$M_\infty(X_N^M) \geqslant \sqrt{\frac{M - N_0}{N_0(M-1)}},$$

причем равенство в указанном неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда справедливы два следующих условия:

1) набор векторов X_N^M — равноугольный;

2) набор векторов X_N^M — жесткий фрейм с границей $A = B = \dfrac{M}{N_0}$.

Кроме того, если $M > \dfrac{N(N+1)}{2}$, то набор X_N^M не может быть равноугольным и, следовательно, равенство в рассматриваемом неравенстве невозможно.

Имея ввиду данную теорему становится естественным следующее определение.

Определение 2.4: Положим, что M, $N \in \mathbb{N}$ и выполняются неравенства $N \leqslant M \leqslant \dfrac{N(N+1)}{2}$. Пусть $\Phi_N^M = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ — фрейм в $\mathbb{R}^N$ и $\|\varphi_i\| = 1$ для любого i. Фрейм Φ_N^M называется оптимальным фреймом Грассмана, если Φ_N^M удовлетворяет равенству $M_\infty(\Phi_N^M) = \sqrt{\dfrac{M-N}{N(M-1)}}$.

Пронормируем построенный фрейм из теоремы 1 и проверим, что он является оптимальным фреймом Грассмана для $M = N + 1$.

1) Пусть M четно. Рассмотрим $<\varphi_i, \varphi_p>$ для $i, p = 0, \ldots, M-1$

$$
\begin{aligned}
<\varphi_i, \varphi_p> &= \frac{2}{N}\left[\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(\cos\frac{2\pi il}{M}\cos\frac{2\pi pl}{M} + \sin\frac{2\pi il}{M}\sin\frac{2\pi pl}{M}\right)\right] = \\
&= \frac{2}{N}\left[\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}}\cos\frac{2\pi l(i-p)}{M}\right] = \frac{2}{N}\left[\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{l=0}^{\frac{N-1}{2}}\omega^{(i-p)l} - 1\right)\right] = \\
&= \frac{2}{N}\left[\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{1-\omega^{(i-p)\frac{N+1}{2}}}{1-\omega^{i-p}} - 1\right)\right] = \frac{2}{N}\left[\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{a-jb}{c-jd}\right)\right] = \\
&= \frac{2}{N}\left[\frac{1}{2} + \frac{ac-bd-2c}{2c}\right] = \frac{1}{N} + \frac{1}{N}(-1-\cos\pi(i-p)),
\end{aligned}
$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi j}{M}}$ и $j^2 = -1$, $a = 1 - \cos\dfrac{2\pi(i-p)(N+1)}{2M}$, $b = \sin\dfrac{2\pi(i-p)(N+1)}{2M}$, $c = 1 - \cos\dfrac{2\pi(i-p)}{M}$, $d = \sin\dfrac{2\pi(i-p)}{M}$. Таким образом, $|<\varphi_i, \varphi_p>| = \dfrac{1}{N}$ для любых $i, p = 0, \ldots, M-1$.

2) Пусть M нечетно. Рассмотрим $<\varphi_i, \varphi_p>$ для $i, p = 0, \ldots, M-1$

$$
\begin{aligned}
<\varphi_i, \varphi_p> &= \frac{2}{N}\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}}\left(\cos\frac{2\pi il}{M}\cos\frac{2\pi pl}{M} + \sin\frac{2\pi il}{M}\sin\frac{2\pi pl}{M}\right) = \\
&= \frac{2}{N}\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}}\left(\cos\frac{2\pi l(i-p)}{M}\right) = \frac{2}{N}\mathrm{Re}\left(\sum_{l=0}^{\frac{N}{2}}\omega^{(i-p)l} - 1\right) = \frac{2}{N}\mathrm{Re}\left(\frac{1-\omega^{(i-p)\frac{N+2}{2}}}{1-\omega^{i-p}} - 1\right) = \\
&= \frac{2}{N}\mathrm{Re}\left(\frac{f-jd}{c-jd} - 1\right) = \frac{2}{N}\cdot\frac{fc-gd-2c}{2c} = \frac{2}{N}\cdot\frac{c\left(-1-\dfrac{\cos\pi(i-p)(N+2)}{M}\right) - gd}{2c} = -\frac{1}{N}.
\end{aligned}
$$

где $f = 1 - \cos\dfrac{2\pi(i-p)(N+2)}{2M}$, $g = \sin\dfrac{2\pi(i-p)(N+2)}{2M}$.

Таким образом, $|<\varphi_i, \varphi_p>| = \dfrac{1}{N}$ для любого $i, p = 0, \ldots, M-1$. Получаем, что $M_\infty(\Phi_N^M) = \sqrt{\dfrac{M-N}{N(M-1)}} = \dfrac{1}{N}$ и, значит, построенный фрейм является оптимальным фреймом Грассмана.

Введем понятие 2-равномерного фрейма [5], используя множество матриц D_m:

Определение 2.5: Множество D_m — это множество диагональных матриц, которые имеют m-диагональных элементов равных 1 и остальные $m-n$ элементов равны нулю.

Определение 2.6: Фрейм Φ_N^M называется *2-равномерным*, если Φ_N^M — фрейм Парсеваля с одинаковыми нормами и $\|F^*DF\|$ равно константе для любой диагональной матрицы $D \in D^2$.

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 2.2: Фрейм Парсеваля Φ_N^M является 2-равномерным тогда и только тогда, когда $|\langle\varphi_i, \varphi_p\rangle| = C_{M,N}$ для любого i и p, и

$$C_{M,N} = \sqrt{\frac{N(M-N)}{M^2(M-1)}}.$$

Используя данную теорему и уже проделанные вычисления, легко показать, что построенный нами фрейм Парсеваля является 2-равномерным для $M = N + 1$ с константой $C_{M,N} = \dfrac{1}{M}$.

Литература

[1] Драбкова, Е.С. Объем фрейма Парсеваля / Е.С. Драбкова, С.Я. Новиков. // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №9/1(59) – С. 91–106.

[2] Casazza, P.G. The known equal norm Parseval frames as of – 2005. / P.G. Casazza, N. Leonhard. Preprint – 2006. – Режим доступа: www.math.missouri.edu/~pete/

[3] Christensen, O. An Introduction to Frames and Riesz Bases / O. Christensen. Boston: Birkhäuser, 2002.

[4] Benedetto, J.J. Geometric properties of Grassmannian frames for $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ / J.J. Benedetto, J. Kolesar, EURASIP J. Applied Signal Processing – 2006.

[5] Holmes, R.B. Optimal frames for erasures / R.B. Holmes, V.I. Paulsen. – Linear Algebra and its Applications 377, – 2004.

Поступила в редакцию 10/*VII*/2008;
в окончательном варианте — 10/*VII*/2008.

Paper received 10/*VII*/2008.
Paper accepted 10/*VII*/2008.

UNIFORM PARSEVAL FRAMES FOR THE SPACE $\mathbb{R}^N$ [3]

© 2008 M.A. Lapshina[4]

In the paper a construction of the uniform Parseval frames with arbitrary volume for the space $\mathbb{R}^N$ is obtained. Some of these frames are being Grassman and equiangular are elucidated.

Keywords and phrases: *bounds frame, operations analysis, operations synthesis, frame, steady frame.*

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4]Lapshina Mariya Alexandrovna (Marijalapshina@rambler.ru), Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.