

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА¹

© 2008 И.А. Кузнецова²

В статье рассматривается нелокальная задача для уравнения смешанного типа с краевыми условиями, содержащими операторы дробного интегро-дифференцирования. Доказаны существование и единственность решения.

Ключевые слова: нелокальная задача, обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования, сингулярное интегральное уравнение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0 \quad (1.1)$$

в области D , ограниченной гладкой кривой Γ с концами $A(0,0)$ и $B(1,0)$, лежащей в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками AC и BC в полуплоскости $y \leq 0$:

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

Пусть $D_1 = D \cap (y > 0)$ — эллиптическая часть, $D_2 = D \cap (y < 0)$ — гиперболическая часть смешанной области D , J — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$, $\Theta_0(x)$ — точка пересечения характеристик уравнения (1.1), выходящих из точек $x \in (0, 1)$, с характеристикой AC , $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Примем следующие обозначения: $H^\lambda[0, 1]$ ($0 < \lambda \leq 1$) — пространство функций, удовлетворяющих на отрезке $[0, 1]$ условию Гельдера фиксированного порядка λ [1], $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — обобщенный оператор дробного инте-

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором О.А. Репиным.

²Кузнецова Ирина Анатольевна, кафедра высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

гипергеометрической функцией Гаусса [2]

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt & (\alpha > 0), \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x) & (\alpha \leq 0, \quad n = [-\alpha] + 1). \end{cases}$$

Для исследования гладкости функций, входящих в интегральные уравнения, нам понадобятся леммы из работы [2].

Лемма 1.1: Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\beta < \min[0, \eta + 1]$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, то $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) \in H^{\min[\lambda+\alpha, -\beta]}[0, 1]$.

Лемма 1.2: Пусть $0 < \alpha < \lambda < 1$ и $\lambda - \alpha < 1$, $\rho(x) = x^\mu$, $0 \leq \mu < \lambda - \alpha + 1$. Если $\varphi(x) \in H_0^\lambda(\rho; [0, 1])$, то $(D_{0+}^\alpha \varphi)(x) \in H_0^{\lambda-\alpha}(\rho; [0, 1])$.

Задача 1.1: Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$ — решение уравнения (1.1);

2) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_\Gamma = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$A(I_{0+}^{\alpha, \beta_1, \beta_1+2\beta-1} u[\Theta_0(t)])(x) + B(I_{0+}^{\alpha-\beta+1, \beta_1+2\beta-1, \beta_1+\beta-1} u_y(t, 0))(x) = \psi(x) \quad \forall x \in J \quad (1.2)$$

и условию сопряжения $u_y(x, -0) = u_y(x, +0) \quad \forall x \in J$,

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad -\beta < \alpha < 1 - \varepsilon, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_1 > \max[0, \alpha + \beta_1 + 2\beta], \quad \varepsilon > 0, \quad (1.3)$$

A и B — ненулевые константы разных знаков, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x)$ — такие заданные функции, что $\varphi(x, y) \in C(0, 1)$, $\psi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, $\alpha + \beta_1 < \lambda \leq 1$.

2. Единственность решения

Известно, что в области D_2 решение уравнения (1.1) с начальными данными

$$\lim_{\eta-\xi \rightarrow 0} u(\xi, \eta) = \tau(\xi),$$

$$\lim_{\eta-\xi \rightarrow 0} \left(\frac{m+2}{4}\right)^n 2\beta(\eta-\xi)^{2\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = v_2(\xi),$$

где $\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta = \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$, имеет вид [3]

$$u(\xi, \eta) = \gamma_1 \int_{\xi}^{\eta} \frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta} \tau(t)}{(\eta-t)^{1-\beta} (t-\xi)^{1-\beta}} dt - \gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} \frac{v_2(t)}{(\eta-t)^{\beta} (t-\xi)^{\eta}} dt, \quad (2.1)$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Из равенства (2.1) следует

$$\begin{aligned} u[\Theta_0(x)] &= \gamma_1 x^{1-2\beta} \int_0^x t^{\beta-1} (x-t)^{\beta-1} \tau(t) dt - \gamma_2 \int_0^x t^{-\beta} (x-t)^{-\beta} v_2(t) dt = \\ &= \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1} \tau(t) \right) (x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1} v_2(t) \right) (x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставим (2.2) в краевое условие (1.2) и, преобразовав его с учетом свойств операторов интегро-дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} A\gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{0+}^{\alpha+\beta,\beta_1,\beta_1+\beta-1} \tau(t) \right) (x) + \\ + [B - A\gamma_2 \Gamma(1-\beta)] \left(I_{0+}^{\alpha-\beta+1,\beta_1+2\beta-1,\beta_1+\beta-1} v_2(t) \right) (x) = \psi(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из равенства (2.3) следует соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v_2(x)$ для области D_2

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{A\gamma_2 \Gamma(1-\beta) - B}{A\gamma_1 \Gamma(\beta)} \left(I_{0+}^{1-2\beta} v_2(t) \right) (x) + \\ &+ \frac{1}{A\gamma_1 \Gamma(\beta)} \left(I_{0+}^{-(\alpha+\beta),-\beta_1,\alpha+\beta_1+2\beta-1} \psi(t) \right) (x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

откуда

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \frac{A\gamma_1 \Gamma(\beta)}{A\gamma_2 \Gamma(1-\beta) - B} \left(I_{0+}^{2\beta-1} \tau(t) \right) (x) + \\ &+ \frac{1}{B - A\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} \left(I_{0+}^{-(\alpha-\beta+1),-(\beta_1+2\beta-1),\alpha+\beta_1} \psi(t) \right) (x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Сформулируем принцип экстремума для задачи 1.1.

Лемма 2.1: Пусть $\psi(x) \equiv 0$. Тогда решение $u(x, y)$ задачи 1.1 для уравнения (1.1) положительный максимум (отрицательный минимум) в области $\overline{D_1}$ принимает на кривой Γ .

Доказательство: При $\psi(x) \equiv 0$

$$v_2(x) = \frac{A\gamma_1 \Gamma(\beta)}{A\gamma_2 \Gamma(1-\beta) - B} \left(D_{0+}^{1-2\beta} \tau(t) \right) (x). \quad (2.6)$$

Функция $u(x, y)$ в области D_1 не может достигать экстремума. Предположим, что положительный максимум в области $\overline{D_1}$ достигается в точке $P(x_0, 0)$, $x_0 \in J$. Учитывая, что дробные производные $\left(D_{0+}^{1-2\beta} \tau \right) (x)$ в точке положительного максимума строго положительны (в точке отрицательного минимума строго отрицательны) [4], при выполнении условия $AB < 0$ из равенства (2.5) получаем, что $v_2(x_0) > 0$. Последнее противоречит принципу Заремба—Жиро. Следовательно, функция $u(x, y)$ не может достигать положительного максимума в области $\overline{D_1}$ в точке $P(x_0, 0)$, $x_0 \in J$. Аналогично доказывается, что $u(x, y)$ не может достигать отрицательного минимума в области $\overline{D_1}$. Из принципа экстремума следует, что задача 1.1 не может иметь более одного решения.

3. Существование решения

Положим, что контур Γ является "нормальной кривой"

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4},$$

$x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрическое уравнение кривой Γ ($0 \leq s \leq l$); функции $x(s)$ и $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль на $[0, l]$, где l — длина Γ . Производные $x''(s)$, $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[0, l]$; в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq C^2 y^{(m+1)}(s)$, где $C = \text{const}$.

Решение задачи (1.1) в указанной выше области D_1 записывается следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & ky \int_0^1 \tau(t) \left\{ \left[(x-t)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} \right]^{\beta-1} - \right. \\ & \left. - \left[(x+t-2xt)^2 + (1-2\beta)^2 (1-2t)^2 y^{m+2} \right]^{\beta-1} \right\} dt - \\ & - k(1-\beta)(m+2) \left(\frac{1}{4} - R^2 \right) y \int_0^l \varphi(s) (r_1^2)^{\beta-2} F(1-\beta, 1-\beta; 1-2\beta; 1-\sigma) \frac{d\xi}{ds} ds, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{где } k = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}, \quad R^2 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}.$$

Из равенства (3.1) следует соотношение между функциями $\tau(x)$ и $v_1(x)$:

$$\tau(x) = -k \int_0^1 v_1(t) \left[|x-t|^{-2\beta} - (x+t-2xt)^{-2\beta} \right] dt - \int_0^1 H_1(x, t) v_1(t) dt + \Phi(x), \quad (3.2)$$

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},$$

$$H_1(t, x) = \int_0^l \rho_1(s; t, 0) G_{01}(\xi, \eta; x, 0) ds, \quad \Phi(x) = - \int_0^l \varphi(s) \rho_1(s, x; 0) ds,$$

$G_{01}(\xi, \eta; x_0, y_0)$ — функция Грина задачи Неймана (задачи N). Приведем явный вид функции Грина задачи N для нормальной области [3].

$$G_{01}(x, y; x_0, y_0) = q_1(x, y; x_0, y_0) - (2r_0)^{-2\beta} q_1 \left(x - \frac{1}{2}, y; \overline{x_0}, \overline{y_0} \right),$$

$$\overline{x_0} = \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{4r_0^2}, \quad \overline{y_0}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y_0^{\frac{m+2}{2}}}{4r_0^2},$$

$$q_1(x, y; x_0, y_0) = k_1(r_1^2)^{-\beta} F(\beta, \beta, 2\beta, 1 - \sigma), \quad r_0^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y_0^{m+2}.$$

Исключим $\tau(x)$ из равенств (2.4) и (3.2), положив $v(x) = v_1(x) = v_2(x)$.

После преобразований с учетом свойств операторов дробного интегрирования дифференцирования получим

$$\begin{aligned} & \frac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)-B}{A\gamma_1\Gamma(\beta)}v(x) + D_{0+}^{1-2\beta} \left(k_1 \int_0^1 v(t) [|x-t|^{-2\beta} - (x+t-2xt)^{-2\beta}] dt \right) + \\ & + D_{0+}^{1-2\beta} \left(\int_0^1 H_1(x, t) v(t) dt \right) = -\frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta)} (D_{0+}^{1-2\beta} g)(x) + (D_{0+}^{1-2\beta} \Phi)(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $g(x) = (I_{0+}^{-(\alpha+\beta), -\beta_1, \alpha+\beta_1+2\beta-1} \psi)(x)$.

После стандартных вычислений уравнение (3.3) можно привести к сингулярному интегральному уравнению

$$c_1 \rho(y) + \frac{c_2}{\pi} \int_0^1 \frac{\rho(\tau)}{\tau - y} d\tau = F(y), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)-B}{A\gamma_1\Gamma(\beta)} + \frac{k_1}{\Gamma(2-2\beta)} \frac{\pi(1-\cos 2\pi\beta)}{\sin 2\pi\beta}, \\ c_2 &= \frac{k_1}{\Gamma(2-2\beta)} \pi, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\rho(y) = x^{-2\beta} (1 - 2x + 2x^2) v(x), \quad (3.6)$$

$$F(y) = x^{-2\beta} F_1(y), \quad F_1 = (f_1(y) + f_2(y) + f_3[v])(1 - 2x + 2x^2), \quad (3.7)$$

$$f_1(y) = -\frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta)} (D_{0+}^{1-2\beta} g)(x), \quad (3.8)$$

$$f_2(y) = (D_{0+}^{1-2\beta} \Phi)(x), \quad (3.9)$$

$$f_3[v] = -\frac{1}{\Gamma(2-2\beta)} \int_0^1 K_1(x, t) v(t) dt, \quad (3.10)$$

$$K_1(x, t) = \int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-2\beta}} \frac{\partial H_1(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi.$$

Исследуем правую часть уравнения (3.4), следуя леммам 1.1 и 1.2. Учитывая, что $\psi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, при выполнении условия (1.3) согласно лемме 1.1 имеем

$$g(x) \in H^{\lambda_0}[0, 1], \quad \lambda_0 = \min[\lambda - (\alpha + \beta), \beta_1].$$

Далее, следуя лемме 1.2, делаем вывод о том, что

$$f_1(y) \in H^{\lambda_0-(1-2\beta)}[0, 1], \quad (3.11)$$

так как $0 < 1 - 2\beta < \lambda_0 < 1$, $\lambda_0 - (1 - 2\beta) < 1$.

Функцию $f_2(y)$, определяемую равенством (3.9), представим в виде

$$f_2(y) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \Phi'(t) dt.$$

Согласно результатам, полученным в работе [3],

$$f_2(y) \in H^\mu[0, 1], \quad \mu > \beta, \quad (3.12)$$

при условии, что $|\varphi(s)| < C_1(l-s)^{1+2\beta}$, $|\varphi(s)| < C_2s^{1+2\beta}$. Из известных свойств функции $H(t, x)$, приведенных в работе [3], следует, что ядро $K_1(x, t)$ является ограниченной в квадрате $0 \leq x, t \leq 1$ функцией и удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \varepsilon < 1$. Тогда можно утверждать, что

$$\int_0^1 K_1(x, t) v(t) dt \in C^{(0, \varepsilon)}[0, 1] \cap C^\infty(0, 1). \quad (3.13)$$

Из условий (3.11)–(3.13) следует, что

$$F_1(y) \in H^h[0, 1], \quad h = \min(\lambda_0 - (1 - 2\beta), \mu).$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (3.4) построим в соответствии с теорией, изложенной в работе [1]. Для определения индекса χ уравнения (3.4) рассмотрим функцию $G(x) = \frac{c_1 - ic_2}{c_1 + ic_2}$, $\Theta(x) = \arg G(x) = 2\pi n - 2 \arctg \frac{c_2}{c_1}$. Выберем

$$0 \leq \Theta(0) < 2\pi,$$

т.е. $\Theta(0) = 2\pi - 2 \arctg \frac{c_2}{c_1}$. Решение уравнения будем искать в классе функций, ограниченных в точке $x = 1$ и неограниченных в точке $x = 0$, следовательно, $n_0 = 1$, а $n_1 = 0$. Таким образом, индекс уравнения есть

$$\chi = \left[\frac{\Theta(1)}{2\pi} \right] + n_0 + n_1 - 1 = \left[1 - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{c_2}{c_1} \right] + 1 + 0 - 1 = 0.$$

Согласно утверждению теоремы 3.2 из работы [1] уравнение (3.4) безусловно разрешимо и его общее решение дается формулой

$$\rho(y) = \frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2} F(y) - \frac{c_2}{\pi(c_1^2 + c_2^2)} \int_0^1 \left(\frac{x}{t} \right)^{\mu_0} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\mu_1} \frac{F(t)}{t-x} dt, \quad (3.14)$$

$$\mu_0 = 1 - n_0 - \frac{\Theta(0)}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{c_2}{c_1} - 1,$$

$$\mu_1 = \frac{\Theta(1)}{2\pi} - \left[\frac{\Theta(1)}{2\pi} \right] - n_1 = 1 - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{c_2}{c_1}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1: Пусть

- 1) на "нормальной кривой" Γ в окрестности точек A и B выполняется условие $\left| \frac{dx}{ds} \right| \leq C^2 y^{(m+1)}(s)$, где $C = \text{const}$;
- 2) $\varphi(x, y) \in C(0, 1)$, $|\varphi(s)| < C_1(l - s)^{1+2\beta}$, $|\varphi(s)| < C_2 s^{1+2\beta}$;
- 3) $\psi(x) \in H^l[0, 1]$, $\alpha + \beta < \lambda \leq 1$;
- 4) $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, $-\beta < \alpha < 1 - \varepsilon$, $\beta_1 > 0$, $\beta_1 > \max[0, \alpha + \beta_1 + 2\beta]$, $\varepsilon > 0$,

$AB < 0$. Тогда задача 1.1 имеет единственное решение $u(x, y)$, определяемое равенствами (3.1) и (2.1) для областей D_1 и D_2 , $v(x)$ определяется равенством (3.6), а функция $\rho(y)$ — формулой (3.14), c_1 , c_2 , $F(y)$ удовлетворяют условиям (3.5) и (3.7)–(3.10).

Литература

- [1] Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск, — 1987. — 688 с.
- [2] Saigo, M. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces / M. Saigo, A.A. Kilbas // Transform Methods and Special Functions, Sofia 94 Proceeding of International Workshop). Sci. Cult. Tech. Publ. — Singapore, — 1995. — P. 282–293.
- [3] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М.: Высш. школа, 1985. — 304 с.
- [4] Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. — М.: Высш. школа, 1995. — 301 с.

Поступила в редакцию 20/IX/2008;

Paper received 20/IX/2008.

в окончательном варианте — 20/IX/2008.

Paper accepted 20/IX/2008.

ON SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GELLERSTEDT'S EQUATION³

© 2008 I.A. Kuznetsova⁴

In the paper a nonlocal problem for mixed type equations with boundary value conditions containing integro-differentiation operators is considered. Existence and uniqueness of the solution are proved.

Keywords and phrases: *non-local problem, operators of fractional integro-differentiation, singular integral equation.*

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) O.A. Repin.

⁴Kuznetsova Irina Anatolievna, Dept. of High Mathematics, Samara State Architect and Construction University, Samara, 443001, Russia