УДК 519.999

РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА—БАКСТЕРА ДЛЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$[1]

© 2008 Е.И. Коновалова[2]

В работе приводятся основные понятия теории классических r-матриц. На основе классификации подалгебр $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, получена классификация тех решений MYBE, которые можно представить в виде разности двух проекторов. Кроме того, получена классификация тех решений MYBE, которые не представимы в виде разности двух проекторов. Таким образом, получена полная классификация решений MYBE для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Ключевые слова: *модифицированное уравнение Янга—Бакстера, классическая r-матрица, алгебра $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, классификация подалгебр $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, решения MYBE.*

Введение

Метод классической r-матрицы играет важную роль в теории интегрируемых систем. В самой общей постановке определение классической r-матрицы может быть дано следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — линейный оператор.

Определение 1.1 ([1]): Говорят, что R — классическая r–матрица, если скобка

$$[x, y]_R := \frac{1}{2}([Rx, y] + [x, Ry]) \tag{1}$$

удовлетворяет тождеству Якоби.

Классическая r-матрица задает на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ структуру алгебры Ли $\mathfrak{g}_R$ с коммутатором $[x, y]_R$. Алгебру Ли $\mathfrak{g}$ вместе с классической r-матрицей называют двойной алгеброй Ли.

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором А.Н. Пановым.

[2]Коновалова Елена Игоревна (lenita@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Модифицированным классическим уравнением Янга—Бакстера (MYBE) называется уравнение

$$[Rx, Ry] - R([Rx, y] + [x, Ry]) = -[x, y]. \tag{2}$$

Уравнение MYBE является достаточным условием для того, чтобы R являлся классической r–матрицей. Положим $R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm I)$, где I — тождественный оператор. Обозначим через $\dot{+}$ — прямую сумму подпространств, $\mathfrak{g}_\pm = \mathrm{Im} R_\pm$, $\mathfrak{i}_\pm = \mathrm{Ker} R_\mp$, $\mathfrak{m}_\pm$ — дополнительные подпространства к $\mathfrak{i}_\pm$ в $\mathfrak{g}_\pm$. Поскольку $\mathfrak{m}_\pm$ как линейное пространство изоморфно $\mathfrak{g}_\pm/\mathfrak{i}_\pm$, то будем считать $\mathfrak{m}_\pm$ алгеброй Ли относительно коммутатора из $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}_\pm$. Отображение $\theta_R : \mathfrak{m}_+ \to \mathfrak{m}_-$, для которого $\theta_R((R+I)x) = (R-I)x$ называют преобразованием Кэли. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.2 ([1]): **1.** Если R — решение MYBE, то выполнены свойства:

1) $\mathfrak{i}_+$ идеал в $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{i}_-$ идеал в $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{i}_+ \cap \mathfrak{i}_- = \emptyset$;

2) $\dim \mathfrak{g}_\pm + \dim \mathfrak{i}_\mp = \dim \mathfrak{g}$;

3) $\theta_R : \mathfrak{m}_+ \to \mathfrak{m}_-$ есть изоморфизм алгебр Ли без неподвижных точек (т.е. для всякого $x \in \mathfrak{m}_+$, $x \neq 0$ выполняется: $(x + \mathfrak{i}_+) \cap (\theta_R(x) + \mathfrak{i}_-) = \emptyset$);

4) $(1 - \theta_R)\mathfrak{m}_+ \dot{+} \mathfrak{i}_+ \dot{+} \mathfrak{i}_- = \mathfrak{g}$.

2. Обратно, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{g}_\pm$ — ее подалгебры и выполнены условия 1)–4). Тогда формула $R(x) = (1+\theta_R)x_0 + x_+ - x_-$, где $x \in \mathfrak{g}$, $x_0 \in \mathfrak{m}_+$, $x_\pm \in \mathfrak{i}_\pm$, задает решение модифицированного классического уравнения Янга—Бакстера (2).

Цель настоящей работы — найти все решения MYBE для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ с точностью до эквивалентности. Основной результат сформулирован в теореме 4.2.

Важные для приложений решения MYBE строятся следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}$ представлена в виде прямой суммы двух своих подалгебр как линейных подпространств: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$, P_i — проектор на $\mathfrak{g}_i$ параллельно дополнительной подалгебре, тогда $R = P_1 - P_2$ — решение уравнения MYBE. Теорема классификации таких решений для алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ сформулирована в теореме 3.3. Более подробно, этот случай изложен в работе [2].

Этот пример показывает, что поиск решений MYBE для $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ следует начинать с изучения ее подалгебр. Классификация подалгебр $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ приведена в предложении 2.2.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$, $A = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$;

$\mathfrak{g}^x = \{y \in \mathfrak{g} : [y, x] = 0\}$ — централизатор элемента x в алгебре $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{g}^K = \{y \in \mathfrak{g} : [y, K] = 0\}$ — централизатор подпространства K в алгебре $\mathfrak{g}$;

$G_x = \{g \in G : \mathrm{Ad}_g(x) = x\}$ — централизатор элемента x в группе G;

$\mathrm{norm}_{\mathfrak{g}}(K) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, K] \subset K\}$ — нормализатор подпространства K алгебры $\mathfrak{g}$;

$A_{\mathfrak{f}} = \{\Phi \in A : \Phi(\mathfrak{f}) \subset \mathfrak{f}\}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{f}$ в группе A;

$G_{\mathfrak{f}} = \{g \in G : g\mathfrak{f}g^{-1} \subset \mathfrak{f}\}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{f}$ в группе G;

$F(X) = -X^t$ — автоморфизм Картана ($X \in \mathfrak{g}$);
$\check{F}(X) = -\check{X}$, где $\check{X}$ — транспонирование относительно побочной диагонали);
$\mathfrak{f}$ — подалгебра $\mathfrak{g}$, $\check{\mathfrak{f}}$ — подалгебра, сопряженная $\mathfrak{f}$ относительно $\check{F}$;
$\mathfrak{f}_i^k$ — верхний индекс означает размерность подалгебры;
$\{e_{ij}\}_{i,j=1}^3$ – стандартный базис в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$, $h_{12} = e_{11} - e_{22}$, $h_{13} = e_{11} - e_{33}$, $h_{23} = e_{22} - e_{33}$;
$\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана;
$\mathfrak{n}_\pm$ — подалгебра верхне (нижне) треугольных нильпотентных матриц;
$\mathfrak{b}_\pm$ — подалгебра верхне (нижне) треугольных матриц (подалгебра Бореля);
$\mathfrak{m} = \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}e_{23}$ — нильпотентная подалгебра;
$\check{\mathfrak{m}} = \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{13}$ — подалгебра, сопряженная $\mathfrak{m}$ относительно $\check{F}$;
$\mathfrak{A}_1 = \mathbb{C}h_{12} + \mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}$ и $\mathfrak{A}_1' = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) + \mathbb{C}(e_{21} + e_{32})$ — изоморфны $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$;
$\mathfrak{p}' = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\check{\mathfrak{p}}' = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ — подалгебра, сопряженная $\mathfrak{p}'$ относительно $\check{F}$;
$\widetilde{\mathfrak{p}'} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$ — подалгебра, сопряженная $\mathfrak{p}'$ относительно F;
$\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ — параболическая подалгебра;
$\check{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ — параболическая подалгебра, сопряженная $\mathfrak{p}$ относительно $\check{F}$;
E — единичная матрица, E' — матрица с единицами по побочной диагонали.

1. Классификация подалгебр $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

Определение 2.1: Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{f}$ сопряжена подалгебре $\mathfrak{f}'$, если существует $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$ такой, что $\mathfrak{f} = \varphi(\mathfrak{f}')$.

Классификация подалгебр $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ с точностью до сопряжения вытекает из [3] и может быть сформулирована в виде предложения:

Предложение 2.2: Всякая подалгебра $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $\dim\mathfrak{f} \geqslant 2$ сопряжена в смысле определения 2.1 одной из следующих подалгебр (в обозначении $\mathfrak{f}_i^k$ верхний индекс означает размерность подалгебры):
1. $\mathfrak{h}$;
2. $\mathfrak{f}_1^2 = \mathbb{C}(h_{12} - h_{23}) \dotplus \mathbb{C}e_{13}$;
3. $\mathfrak{m} = \mathbb{C}e_{13} \dotplus \mathbb{C}e_{23}$;
4. $\mathfrak{f}_2^2 = \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) \dotplus \mathbb{C}e_{13}$.
5. $\mathfrak{f}_3^2 = \mathbb{C}(\lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \lambda_3 e_{33}) \dotplus \mathbb{C}e_{13}$, для некоторых λ_i, таких что $\lambda_i \neq \lambda_j$,

$i \neq j$, $\sum \lambda_i = 0$; две подалгебры вида $\mathfrak{f}_3^2$, отвечающие наборам $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3')$, сопряжены, если $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = c(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \lambda_{\sigma(3)})$, где σ или тождественная подстановка, или подстановка $(1,3)$ и c — ненулевая константа;

6. $\mathfrak{f}_4^2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \dotplus \mathbb{C}e_{13}$;
7. $\mathfrak{f}_5^2 = \mathbb{C}(h_{13} + h_{23}) \dotplus \mathbb{C}e_{13}$;
8. $\mathfrak{f}_6^2 = \mathbb{C}h_{13} \dotplus \mathbb{C}(e_{12} + e_{23})$;
9. $\mathfrak{A}_1 = \mathbb{C}h_{12} \dotplus \mathbb{C}e_{12} \dotplus \mathbb{C}e_{21}$;
10. $\mathfrak{A}_1' = \mathbb{C}h_{13} \dotplus \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) \dotplus \mathbb{C}(e_{21} + e_{32})$;
11. $\mathfrak{n}_+$ - подалгебра верхнетреугольных нильпотентных матриц;
12. $\mathfrak{f}_1^3 = \mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;
13. $\mathfrak{f}_2^3 = \mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}h_0$, где $h_0 \in \mathfrak{h}$, $h_0 \neq 0$ (две подалгебры $\mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}h_0$ и $\mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}h_0'$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}_0 = \sigma h_0'$, где σ подстановка $(1,2)$);
14. $\mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} \dotplus \mathbb{C}e_{13}$;
15. $\mathfrak{f}_4^3 = \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) \dotplus \mathbb{C}e_{13} \dotplus \mathbb{C}h_{13}$;
16. $\mathfrak{f}_1^4 = \mathfrak{h} \dotplus \mathbb{C}e_{12} \dotplus \mathbb{C}e_{21}$;
17. $\mathfrak{f}_2^4 = \mathfrak{m} \dotplus \mathfrak{h}$;
18. $\mathfrak{f}_3^4 = \mathfrak{n}_+ \dotplus \mathbb{C}h_0$, для некоторого $h_0 \in \mathfrak{h}$, $h_0 \neq 0$;
19. $\mathfrak{b}_+$;
20. $\mathfrak{p}'$;
21. $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра.

2. Разложение $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ в прямую сумму двух подалгебр

Изложим общую схему классификации. Пусть имеется два разложения алгебры $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ в прямую сумму двух подалгебр как линейных подпространств: $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1' \dotplus \mathfrak{g}_2'$. Во избежание двойного пересчета везде далее будем считать, что $\dim\mathfrak{g}_1 \leqslant \dim\mathfrak{g}_2$ $(\dim\mathfrak{g}_1' \leqslant \dim\mathfrak{g}_2')$.

Определение 3.1: Будем говорить, что два разложения сопряжены, если существует $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$ такой, что $\Phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1'$ и $\Phi(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2'$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}_1$ одна из подалгебр из формулировки предложения 2.1, такая, что $\dim\mathfrak{g}_1 \leqslant 4$.

Определение 3.2: Подалгебру $\mathfrak{g}_2$ назовем дополнительной к $\mathfrak{g}_1$, если $\mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Обозначим через $X_{\mathfrak{g}_1}$ множество дополнительных подалгебр к $\mathfrak{g}_1$.

Разобьем задачу классификации на следующие две задачи:

Задача A: Выяснить, для каких $\mathfrak{g}_1$ множество $X_{\mathfrak{g}_1}$ пусто. Если $X_{\mathfrak{g}_1} \neq \emptyset$ дать описание $X_{\mathfrak{g}_1}$.

Задача B: Обозначим через $A_{\mathfrak{g}_1} = \mathrm{Norm}_A \mathfrak{g}_1$. Описать орбиты присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \to X_{\mathfrak{g}_1}$.

Множество пар $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$, где $\mathfrak{g}_1$ — одна из подалгебр предложения 2.2 размерности меньше 5, а $\mathfrak{g}_2$ — представитель $A_{\mathfrak{g}_1}$–орбиты в $X_{\mathfrak{g}_1}$, является полным списком всех разложений $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$, $\dim\mathfrak{g}_1 \leqslant \mathfrak{g}_2$ с точностью до сопряжения.

Теорема 3.3 ([2]): Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ – две подалгебры $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$ – прямая сумма подалгебр как линейных подпространств. Утверждается, что:
A. Для всякой подалгебры $\mathfrak{g}_1$ множество $X_{\mathfrak{g}_1}$ не пусто.
B. Для всякой подалгебры $\mathfrak{g}_1$, $\dim\mathfrak{g}_1 = 2$, кроме подалгебры сопряженной $\mathfrak{f}_4^2$, существует ровно одна орбита присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \to X_{\mathfrak{g}_1}$. Если подалгебра $\mathfrak{g}_1$ сопряжена $\mathfrak{f}_4^2$, то существуют две орбиты присоединенного действия на $X_{\mathfrak{g}_1}$.
Если подалгебра $\mathfrak{g}_1$ сопряжена $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{A}_1$ или $\mathfrak{A}_1'$, то существует одна орбита присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \to X_{\mathfrak{g}_1}$. Для всех остальных подалгебр $\mathfrak{g}_1$ размерности 3, существует две орбиты присоединенного действия на $X_{\mathfrak{g}_1}$. Если подалгебра $\mathfrak{g}_1$ сопряжена $\mathfrak{f}_1^4$, то существует две орбиты присоединенного действия $A_{\mathfrak{g}_1} : X_{\mathfrak{g}_1} \to X_{\mathfrak{g}_1}$. Если $\mathfrak{g}_1$ сопряжена $\mathfrak{f}_2^4$ или $\mathfrak{f}_3^4$, то существует три орбиты присоединенного действия на $X_{\mathfrak{g}_1}$.
C. Пусть $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ две подалгебры такие, что $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$. Тогда пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ сопряжена одной из следующих пар или паре, которая получается перестановкой слагаемых:

1. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^2 = \mathbb{C}(h_{12} - h_{23}) \dot{+} \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2^2 = \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) \dot{+} \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E'$;
4. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^2 = \mathbb{C}(\lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \lambda_3 e_{33}) \dot{+} \mathbb{C}e_{13}$, для некоторых λ_i, таких что $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
5. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}_2 = T\widetilde{\mathfrak{p}}T^{-1}$, где $T = E'$;
6. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \dot{+} \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = E'$;
7. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \dot{+} \mathbb{C}e_{13}$, $\mathfrak{g}_2 = T\widetilde{\mathfrak{p}}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_5^2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \dotplus \mathbb{C}e_{13},\ \mathfrak{g}_2 = T\widetilde{\mathfrak{p}}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

9. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_6^2 = \mathbb{C}h_{13} \dotplus \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}),\ \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

10. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^3 = \mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \mathfrak{g}_2 = \widetilde{\mathfrak{p}'}$;

11. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2^3 = \mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix},\ \gamma_0 \neq 0,\ \mathfrak{g}_2 = \widetilde{\mathfrak{p}'}$;

12. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} \dotplus \mathbb{C}e_{13},\ \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}'T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

13. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^3 = \mathbb{C}h_{13} \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13},\ \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{p}'T^{-1}$, где $T = E'$;

14. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_+,\ \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1} = \mathfrak{b}_-$, где $T = E'$;

15. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

16. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{A}_1',\ \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

17. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^3 = \mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{b}_+T^{-1} = \mathfrak{b}_-$, где $T = E'$;

18. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2^3 = \mathfrak{m} \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix},\ \alpha_0 \neq \beta_0,\ \mathfrak{g}_2 = Tb_+T^{-1}$,

где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

19. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} \dotplus \mathbb{C}e_{13},\ \mathfrak{g}_2 = Tb_+T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

20. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_4^3 = \mathbb{C}h_{13} \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \mathbb{C}e_{13},\ \mathfrak{g}_2 = Tb_+T^{-1}$,

где $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

21. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^4 = \mathfrak{h} \dotplus \mathbb{C}e_{12} \dotplus \mathbb{C}e_{21}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_2^4 T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

22. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_2^4 = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_2^4 T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

23. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^4 = \mathfrak{n}_+ \dotplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_2^4 T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

24. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_1^4 = \mathfrak{h} \dotplus \mathbb{C}e_{12} \dotplus \mathbb{C}e_{21}$, $\mathfrak{g}_2 = T\mathfrak{f}_3^4 T^{-1}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

25. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f}_3^4 = \mathfrak{n}_+ \dotplus \mathbb{C}h_1$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{n}_- \dotplus \mathbb{C}h_2$, где $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$, $h_1 \neq \mathbb{C}h_2$.

3. Решения MYBE, не представимые в виде разности проекторов

Определение 4.1: Будем говорить, что решение MYBE R_1 сопряжено решению R_2, если существует $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$ такой, что $R_1 = \varphi R_2 \varphi^{-1}$.

В следующей теореме построены семейства решений MYBE, которые не представимы в виде разности двух проекторов.

Теорема 4.2: Всякое решение $R : \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ модифицированного уравнения Янга—Бакстера для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, не представимое в виде разности двух проекторов, сопряжено одному из следующих решений:

1. $$R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}(3-c)+4ca_{33}}{3(1+c)} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21}-2a_{32} & \dfrac{a_{11}-a_{33}}{3} & a_{23}+2a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} & \dfrac{-4a_{11}+a_{33}(1-3c)}{3(1+c)} \end{pmatrix},$$

где $\sum a_{ii} = 0$, $c \neq 0$, $c \neq -1$.

2. $$R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}(3-c)+4ca_{33}}{3(1+c)} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{32}-a_{21} & \dfrac{a_{11}-a_{33}}{3} & a_{23}-2a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} & \dfrac{-4a_{11}+a_{33}(1-3c)}{3(1+c)} \end{pmatrix},$$

где $\sum a_{ii} = 0$, $c \neq 0$, $c \neq -1$.

3. $$R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & -a_{12} & a_{13}-2a_{23} \\ -a_{21} & a'_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$a'_{11} = \frac{a_{11} - 2a_{21} + c(a_{11} + 2a_{22} + 2a_{21} - 2a_{12})}{1 - 3c},$$

$$a'_{22} = \frac{a_{22} - 2a_{12} + c(4a_{11} - a_{22} + 4a_{12} - 4a_{21})}{1 - 3c},$$

$$a'_{33} = \frac{a_{33} + 2a_{12} + 2a_{21} + c(-4a_{11} + a_{33} + 2a_{21} - 2a_{12})}{1 - 3c},$$

$\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0,\ c \neq \frac{1}{3}.$

4. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} + \frac{a_{33}}{c} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix},$

где $\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0.$

5. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} + \frac{a_{33}}{c-1} & -a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & a_{11} + \frac{c}{c-1}a_{33} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \frac{1+c}{1-c}a_{33} \end{pmatrix},$

где $\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0,\ c \neq 1.$

6. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} + \frac{2\alpha}{\gamma - 2c}a_{33} & -a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} + \frac{2\beta}{\gamma - 2c}a_{33} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \frac{\gamma + 2c}{\gamma - 2c}a_{33} \end{pmatrix},$

где $\sum a_{ii} = 0,\ \alpha + \beta + \gamma = 0,\ c \neq 0,\ c \neq \frac{\gamma}{2}.$

7. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-2c}{1+2c}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & 2a_{12} - a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \frac{2c-1}{1+2c}a_{11} + a_{22} \end{pmatrix},$

где $\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0,\ c \neq -\frac{1}{2}.$

8. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} + \frac{a_{11}}{2c} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & 2a_{12} - a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix},$

где $\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0.$

9. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a_{13} - 2a_{23} \\ -a_{21} & a'_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$

где

$$a'_{11} = \frac{\lambda_1(a_{11} - 2a_{21} + c(2a_{22} - 2a_{12} - a_{11} + 2a_{21})) + \lambda_2(2a_{21} - a_{11} - ca_{11})}{(1-c)(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$a'_{12} = \frac{\lambda_1(-4ca_{22} + 3ca_{12} - a_{12}) + \lambda_2(-4ca_{21} + 4ca_{11} - a_{12}(1-c))}{(1-c)(\lambda_1 - \lambda_2)},$$
$$a'_{22} = \frac{\lambda_1(a_{22} + ca_{22} - 2a_{12}) + \lambda_2(2a_{12} - a_{22} - 2ca_{12} + ca_{22} - 2ca_{11} + 2ca_{21})}{1-3c},$$
$$a'_{33} = \frac{\lambda_1(ca_{11} - 2ca_{21} - 3ca_{22} + 2ca_{12} - a_{11} + 2a_{21}a_{22})}{(1-c)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\ + \frac{\lambda_2(3ca_{11} - 2ca_{21} - ca_{22} + 2ca_{12} - a_{11} + a_{22} - 2a_{12})}{(1-c)(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0,\ c \neq \dfrac{1}{3}.$

10. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a_{13} - 4a_{23} \\ -a_{21} & a'_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$

где

$$a'_{11} = \frac{2ca_{12} + 7ca_{11} - 8ca_{21} + 4ca_{33} + a_{11} - 4a_{21}}{c+1},$$
$$a'_{12} = \frac{a_{12}(5-c)}{1+c} + 8a_{11} - 8a_{21} + 4a_{33},$$
$$a'_{22} = \frac{2ca_{12} + a_{11}(9c+3) + a_{21}(-8c-4) + a_{33}(5c+1)}{1+c},$$
$$a'_{33} = \frac{-4ca_{12} + a_{11}(-16c-4) + a_{21}(16c+8) + a_{33}(-9c-1)}{1+c},$$

$\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0,\ c \neq -1.$

11. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ -a_{21} & a'_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$

где

$$a'_{11} = \frac{-4a_{33} - 5a_{11} - 2a_{23} + 2a_{32}}{3},$$
$$a'_{12} = \frac{(2-4c)a_{33} + (4-2c)(a_{11} + a_{23}) + (2+2c)a_{32} - 3ca_{12}}{3c},$$
$$a'_{13} = \frac{(2-4c)a_{33} + (4-2c)(a_{11} + a_{23}) + (2+2c)a_{32} - 6ca_{12} + 3ca_{13}}{3c},$$
$$a'_{22} = \frac{-a_{33} + a_{11} - 2a_{23} + 2a_{32}}{3},$$
$$a'_{33} = \frac{5a_{33} + 4a_{11} + 4a_{23} - 4a_{32}}{3},$$

$\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0.$

12. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & -a_{12} & a_{13} - 2a_{23} \\ -a_{21} & a'_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$

где

$$a'_{11} = (1+2c)a_{11} - a_{21}(2+c) + 2ca_{12} + ca_{33},$$
$$a'_{22} = a_{11}(2c-1) - ca_{21} + a_{12}(c-2) + (c-1)a_{33},$$
$$a'_{33} = -4ca_{11} + 2a_{21}(1+c) - 2a_{12}(c-1) - a_{33}(2c-1),$$

$\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0.$

13. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & -a_{12} & a_{13} - 2a_{12} \\ -a_{21} & a'_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$

где

$$a'_{11} = \frac{(-5c+2)a_{11} + 2a_{32}(c+2) - 2a_{23}(c-2) - 4ca_{33}}{3c+2},$$
$$a'_{22} = \frac{a_{11}(-2+c) + 2ca_{32} - (4+2c)a_{23} - (2+c)a_{33}}{3c+2},$$
$$a'_{33} = \frac{4ca_{11} - 4a_{32}(c+1) + 4ca_{23} + a_{33}(5c+2)}{3c+2},$$

$\sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0,\ c \neq -\dfrac{2}{3}.$

14. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$

где

$$a'_{11} = \frac{2a_{11}(c_{22} - c_{12} - 1) + a_{33}(c_{22} + c_{21} - c_{12} - c_{11})}{c} - a_{11},$$
$$a'_{22} = \frac{-2a_{11}(c_{22} - 1 + c_{12}) + a_{33}(2 - c_{11} - c_{12} - c_{21} - c_{22})}{c} - a_{22},$$
$$a'_{33} = \frac{4c_{12}a_{11} - 2(1 - c_{11} - c_{12})}{c} - a_{33},$$

$\sum a_{ii} = 0,\ c_{11},\ c_{12},\ c_{21},\ c_{22} \in \mathbb{C},\ c = (1 - c_{11})(c_{22} - 1) + c_{21}c_{12} \neq 0.$

15. $R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c\alpha_1 x + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & 2c\beta_1 x + a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 2c\gamma_1 + a_{33} \end{pmatrix},$

где $\alpha_{1,2},\ \beta_{1,2},\ \gamma_{1,2},\ c \in \mathbb{C},\ \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} + \gamma_{1,2} = 0,\ \sum a_{ii} = 0,\ c \neq 0,\ c \neq 1,$ $x = \dfrac{a_{11}\gamma_2 - \alpha_2 a_{33}}{(1-c)(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)}.$

Доказательство: Найдем подалгебры $\mathfrak{i}_\pm$, $\mathfrak{g}_\pm$ в $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.2. Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{i}_+ = \mathfrak{g}_+$, из п. 2) теоремы 1.2 следует, что $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{i}_-$, и следовательно, из п. 4) теоремы 1.2 вытекает, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \dotplus \mathfrak{g}_-$. Таким образом, $\mathfrak{g}$ представлена в виде суммы двух своих подалгебр, тогда R — разность проекторов. Поэтому случай, когда $\mathfrak{i}_+ = \mathfrak{g}_+$, далее не рассматриваем.

Чтобы избежать двойного пересчета, везде далее будем считать, что $\dim \mathfrak{i}_+ \leqslant \dim \mathfrak{i}_-$. Подалгебра $\mathfrak{i}_+$ может иметь размерность 2, 3 или 4. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

1. Пусть $\mathfrak{i}_+$ — подалгебра размерности 2. Будем считать, что подалгебра $\mathfrak{i}_+$ равна одной из восьми двумерных подалгебр из предложения 2.2. По п. 2) теоремы 1.2 $\dim\mathfrak{g}_- + \dim\mathfrak{i}_+ = \dim\mathfrak{g}$, следовательно, $\dim\mathfrak{g}_- = 6$. По предложению 2.2, подалгебра $\mathfrak{g}_-$ сопряжена параболической подалгебре $\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. Все собственные идеалы подалгебры $\mathfrak{p}$ исчерпываются идеалом размерности два $\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{m} = \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}e_{23}$, идеалом размерности три $\mathfrak{i}_2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \mathfrak{m}$ и идеалом размерности 5 $\mathfrak{i}_3 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{m} = \mathfrak{p}'$. Поскольку $\dim\mathfrak{g}_+ + \dim\mathfrak{i}_- = 8$ (см. п. 2 теоремы 1.2), то подалгебра $\mathfrak{g}_+$ может иметь размерность 3, 5 или 6. Подалгебра $\mathfrak{g}_+$ вкладывается в $\mathrm{norm}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})}(\mathfrak{i}_+)$. Вычислим нормализаторы $\mathfrak{i}_+$, результаты вычислений занесем в таблицу:

1,a). Пусть $\dim\mathfrak{i}_- = 2$, следовательно, $\dim\mathfrak{g}_+ = 6$. Так как $\mathfrak{g}_+ \subset \mathrm{norm}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})}(\mathfrak{i}_+)$,

Таблица

$\mathfrak{i}_+$	$\mathrm{norm}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})}(\mathfrak{i}_+)$	$\dim(\mathrm{norm}(\mathfrak{i}_+))$
$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}$	2
$\mathfrak{f}_1^2 = \mathbb{C}(h_{12} - h_{23}) + \mathbb{C}e_{13}$	$\mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{13}$	3
$\mathfrak{m} = \mathbb{C}e_{13} + \mathbb{C}e_{23}$	$\mathfrak{p}$	6
$\mathfrak{f}_2^2 = \mathbb{C}(e_{12} + e_{23}) + \mathbb{C}e_{13}$	$\mathbb{C}h_{13} + \mathfrak{n}_+$	4
$\mathfrak{f}_3^2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}$	$\mathfrak{f}_3^3 = \mathfrak{h} + \mathbb{C}e_{13}$	3
$\mathfrak{f}_4^2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \mathbb{C}e_{13}$	$\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \check{\mathfrak{m}}$	3
$\mathfrak{f}_5^2 = \mathbb{C}(h_{13} + h_{23}) + \mathbb{C}e_{13}$	$\mathfrak{h} + \check{\mathfrak{m}}$	4
$\mathfrak{f}_6^2 = \mathbb{C}h_{13} + \mathbb{C}(e_{12} + e_{23})$	$\mathfrak{f}_6^2$	2

то $\dim(\mathrm{norm}_{\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})}(\mathfrak{i}_+)) \geqslant 6$. Из таблицы видно, что это возможно только в одном случае $\mathfrak{i}_+ = \mathfrak{m}$. Поскольку $\dim\mathfrak{g}_+ = 6$, то $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{p}$. Итак, $\mathfrak{i}_+ = \mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{p} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. Поскольку $\mathfrak{g}_-$ сопряжена $\mathfrak{p}$, то существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$ такой, что $\mathfrak{g}_- = \varphi(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{i}_- = \varphi(\mathfrak{m})$. Возможны два случая: i) подалгебра $\mathfrak{i}_-$ сопряжена относительно присоединенного действия $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ подалгебре $\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$, т. е. найдется элемент $g \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ такой, что $\mathfrak{i}_- = \mathrm{Ad}_g(\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32})$ и ii) $\mathfrak{i}_-$ сопряжена относительно присоединенного действия $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ подалгебре $\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. найдется элемент $g \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ такой, что $\mathfrak{i}_- = \mathrm{Ad}_g(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31})$. Элемент $g \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ можно представить в виде $g = b_+ w b_-$, где b_+ принадлежит группе верхнетреугольных матриц B_+, $b_- \in \mathrm{B}_-$, w — элемент группы Вейля.

В случае i),

$$\mathfrak{i}_- = \mathrm{Ad}_g(\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32}) = \mathrm{Ad}_{b_+ w b_-}(\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32}) = \mathrm{Ad}_{b_+ w}(\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32}) \qquad (3)$$

Согдасно п. 1) теоремы 1.2, пересечение $\mathfrak{i}_+ \cap \mathfrak{i}_-$ нулевое, следовательно, $\mathfrak{i}_+ \cap \mathrm{Ad}_w(\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32}) = \{0\}$. Это возможно только тогда, когда w принадлежит подгруппе перестановок, порожденных элементом $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Продолжая (3), получаем $\mathfrak{i}_- = \mathrm{Ad}_{b_+ w}(\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32}) = \mathrm{Ad}_{b_+}(\mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32})$. Тогда имеем

$$\mathrm{Ad}_{b_+^{-1}}(\mathfrak{i}_-) = \mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32}, \quad \mathrm{Ad}_{b_+^{-1}}(\mathfrak{i}_+) = \mathfrak{i}_+.$$

Заменяя оператор R на сопряженный $\mathrm{Ad}_{b_+^{-1}}(R)\mathrm{Ad}_{b_+}$, получаем, что $\mathfrak{i}_+ = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{i}_- = \mathbb{C}e_{31} + \mathbb{C}e_{32}$, $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{b}_- + \mathbb{C}e_{12}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_+/\mathfrak{i}_+$, $\mathfrak{g}_-/\mathfrak{i}_-$ равны $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, тогда $\theta_R \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — автоморфизм $\mathfrak{s}l(2,\mathbb{C})$ на $\mathfrak{s}l(2,\mathbb{C})$. Известно, что у автоморфизма простой алгебры Ли есть неподвижная точка, что противоречит условию теоремы 1.2, следовательно, в этом случае оператор R построить нельзя.

В случае ii),

$$\mathfrak{i}_- = \mathrm{Ad}_g(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}) = \mathrm{Ad}_{b_+ w b_-}(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}) = \mathrm{Ad}_{b_+ w}(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}). \qquad (4)$$

Согласно п. 1 теоремы 1.2, пересечение $\mathfrak{i}_+ \cap \mathfrak{i}_-$ нулевое, следовательно, $\mathfrak{i}_+ + \cap \mathrm{Ad}_w(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}) = \{0\}$. Это возможно, когда w принадлежит набору

$$\left(\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Элемент w можно представить как произведение двух перестановок $w = \sigma_+ + \sigma_-$, где σ_+ принадлежит группе $\mathrm{P}_+ = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, σ_- принадлежит группе

$\mathrm{P}_- = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. Продолжая равенство (4), получаем

$$\mathfrak{i}_- = \mathrm{Ad}_{b_+w}(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}) = \mathrm{Ad}_{b_+\sigma_+\sigma_-}(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}) = \mathrm{Ad}_{b_+\sigma_+}(\mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}).$$

Тогда $\mathrm{Ad}_{\sigma_+^{-1}b_+^{-1}}(\mathfrak{i}_-) = \mathbb{C}e_{21}+\mathbb{C}e_{31}$, $\mathrm{Ad}_{\sigma_+^{-1}b_+^{-1}}(\mathfrak{i}_+) = \mathfrak{i}_+$. Заменяя оператор R на сопряженный $\mathrm{Ad}_{\sigma_+^{-1}b_+^{-1}}(R)\mathrm{Ad}_{b_+\sigma_+}$, получаем, что $\mathfrak{i}_+ = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{i}_- = \mathbb{C}e_{21} + \mathbb{C}e_{31}$, $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{b}_- + \mathbb{C}e_{21}$. Следовательно, $\mathfrak{g}_+/\mathfrak{i}_+ = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g}_-/\mathfrak{i}_- = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, $\theta_R : \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, θ_R автоморфизм без неподвижных точек (см. п. 3 теоремы 1.2). Автоморфизм θ_R представим следующим образом:

$$\theta_R\left(\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\theta^*(A)}} \\ 0 & & \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $c \in \mathbb{C}^*$, $A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и $\theta^* : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Алгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, с точностью до присоединенного действия группой $P_+ \cap P_-$, имеет четыре автоморфизма: 1) $\theta^* = id$ — тождественный автоморфизм, 2) $\theta^* = \mathrm{Ad}_w$, где $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 3) $\theta^* = F$, где F — внешний автоморфизм (см. обозначения), 4) $\theta^* = F \cdot \mathrm{Ad}_w$. Заметим, что во втором и третьем случаях у автоморфизма θ_R есть неподвижная точка (например, во втором случае, элемент $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ принадлежит $(x + \mathfrak{i}_+) \cap (\theta(x) + \mathfrak{i}_-)$).

В первом случае, оператор θ^* имеет вид: $\theta^*(A) = A$. Оператор

$$\theta_R\left(\begin{pmatrix} a_{11} + \frac{a_{33}}{2} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + \frac{a_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{a_{33}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} + \frac{a_{33}}{2} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} + \frac{a_{33}}{2} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{33}}{2} \end{pmatrix}$$

не имеет неподвижных точек тогда и только тогда, когда $c \in \mathbb{C}^*$, $c \neq -1$. Алгебру $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ можно представить в следующем виде: $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = (1 - \theta_R)\mathfrak{m}_+ \dot{+} \mathfrak{i}_+ \dot{+} \mathfrak{i}_-$, решение уравнения Янга—Бакстера записывается в виде: $R(x) =$

$= (1+\theta_R)x_0 + x_+ - x_-$, где $x \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $x_0 \in \mathfrak{m}_+$, $x_\pm = \mathfrak{i}_\pm$. Тогда

$$R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}(3-c)+4ca_{33}}{3(1+c)} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21}-2a_{32} & \dfrac{a_{11}-a_{33}}{3} & a_{23}+2a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} & \dfrac{-4a_{11}+a_{33}(1-3c)}{3(1+c)} \end{pmatrix},$$

где $\sum a_{ii} = 0$, $c \neq 0$, $c \neq -1$.

В четвертом случае, оператор θ^* имеет вид: $\theta^*(A) = -\check{A}$, где $\check{A}$ — транспонирование относительно побочной диагонали. Оператор

$$\theta_R\left(\begin{pmatrix} a_{11}+\dfrac{a_{33}}{2} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22}+\dfrac{a_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{a_{33}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{22}-\dfrac{a_{33}}{2} & -a_{12} \\ 0 & -a_{21} & -a_{11}-\dfrac{a_{33}}{2} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{a_{33}}{2} \end{pmatrix}$$

не имеет неподвижных точек тогда и только тогда, когда $c \in \mathbb{C}^*$, $c \neq -1$. Алгебру $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ можно представить в следующем виде: $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = (1-\theta_R)\mathfrak{m}_+ \dotplus \mathfrak{i}_+ \dotplus \mathfrak{i}_-$, решение уравнения Янга—Бакстера записывается в виде: $R(x) = (1+\theta_R)x_0 + x_+ - x_-$, где $x \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, $x_0 \in \mathfrak{m}_+$, $x_\pm = \mathfrak{i}_\pm$. Тогда

$$R\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}(3-c)+4ca_{33}}{3(1+c)} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{32}-a_{21} & \dfrac{a_{11}-a_{33}}{3} & a_{23}-2a_{12} \\ -a_{31} & -a_{32} & \dfrac{-4a_{11}+a_{33}(1-3c)}{3(1+c)} \end{pmatrix},$$

где $\sum a_{ii} = 0$, $c \neq 0$, $c \neq -1$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Литература

[1] Рейман, А.Г. Интегрируемые системы / А.Г. Рейман, М.А. Семенов—тян—Шанский – М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 352 с.

[2] Коновалова, Е.И. Разложение $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ в прямую сумму подалгебр Ли как линейных подпространств / Е.И. Коновалова // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №7(57). – С. 63–72.

[3] Баранник, А.Ф. Подалгебры афинной алгебры $AIGL(3,\mathbb{R})$ / А.Ф. Баранник, Ю.Д. Москаленко, В.И. Фущич Препринт 89–65. – Киев: Математический институт Академии наук Украины, 1989.

SOLUTIONS OF MODIFIED YANG-BAXTER EQUATON OF LIE ALGEBRA $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$[3]

 E.I. Konovalova[4]

In the paper a basic notion of classical r-matrix theory is given. Based on subalgebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ classification of MYBE solves that may be represented as a difference of two projectors is obtained. Thus, a full classification of MYBE solves for the Lie algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ is given.

Keywords and phrases: *modified Yang–Baxters equation (MYBE), classical r-matrix, Lie algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, classification of subalgebras $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, MYBE solves.*

Поступила в редакцию 18/*VIII*/2008;
в окончательном варианте — 18/*VIII*/2008.

Paper received 18/*VIII*/2008.
Paper accepted 18/*VIII*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. A.N. Panov.

[4]Konovalova Elena Igorevna (lenita@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.