УДК 621.396.98

ОБ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ, КОРРЕКТИРУЕМЫХ ПО РАДИАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ[1]

© 2008 А.С. Девятисильный, К.А. Числов[2]

В представленной работе показана возможность построения асимптотически устойчивых инерциальных навигационных систем, корректируемых с использованием радиальной информации и обладающих гравиметрическим свойством. Приводятся результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: *инерциальная навигационная система, численный эксперимент, асимптотически устойчивые ИНС.*

Введение

Известно, что использование информации о модуле (r) радиус-вектора места объекта при коррекции инерциальной навигационной системы (ИНС) меняет только свойства ее динамической компоненты, описываемой уравнениями Ньютона (так называемая динамическая группа уравнений — ДГУ — модели ИНС (см. [1])). При этом возможны следующие варианты: 1) исходно неустойчивая при любом движении объекта трехкомпонентная (по числу функциональных ньютонометров, или акселерометров [2]) ИНС, или 3D-ИНС, становится неасимптотически устойчивой по ДГУ, если указанная информация (далее r-информация) при движении объекта по сфере, концентрической с Землей, используется в алгоритме работы 3D-ИНС исключительно для формирования модели напряженности гравитационного поля Земли (GE-поля); 2) 3D-ИНС становится асимптотически устойчивой по ДГУ при произвольном движении объекта [3], если задача коррекции

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Девятисильный Александр Сергеевич (devyatis@iacp.dvo.ru), Числов Кирилл Александрович (kirillche@rambler.ru), Институт автоматики и процессов управления, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 5.

ставится как обратная задача, например, в форме уравнений "состояние-измерение"; 3) 3D-ИНС преобразуется в 2D-ИНС с горизонтируемой приборной платформой в случае $r = \mathrm{const}$ и использования r-инфомации для формировании модели GE-поля, при этом 2D-ИНС унаследует от 3D-ИНС только свойство неасимптотической устойчивости [1].

В настоящей работе дается дальнейшее развитие представлений о роли r-инфомации в задаче коррекции ИНС.

1. Основные модели

Обратимся к уравнениям функционирования 3D-ИНС в гамильтоновой форме, ограничиваясь, как и в [3], только ДГУ

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= -e_{ikj}\omega_k q_j + p_i, \quad q_i(0) = q_{i,0}, \\ \dot{p}_i &= -e_{ikj}\omega_k p_j + G_i(\mathbf{q}) + F_i, \quad p_i(0) = p_{i,0}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где e_{ikj} — псевдотензор Леви—Чивита, $\mathbf{q} = (q_i)$, $\mathbf{p} = (p_i)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i)$, $\mathbf{G} = (G_i)$, $\mathbf{F} = (F_i)$ — соответственно векторы координат, импульсов, абсолютной угловой скорости вращения горизонтируемой приборной платформы, напряженности гравитационного поля и удельных сил негравитационной природы в проекциях на оси жестко связанного с платформой приборного трехгранника (обозначим его через $oy = oy_1y_2y_3$). Далее, не нарушая общности, примем, что oy является физической моделью географически ориентированного трехгранника, т.е. в идеальном случае его ось oy_1 направлена на Восток, oy_2 — на Север, oy_3 — по вектору $\mathbf{q}$. Следует также обратить внимание на то, что в (1.1), как и всюду в настоящей работе, устанавливается правило суммирования по повторяющимся индексам.

Напомним [3], что модель обратной 3D-задачи (или задачи коррекции 3D-ИНС), целью решения которой является оценка шести фазовых координат системы (1.1), формируется при условии, что доступна измерению величина $|\mathbf{q}| = q_3 = r$, т.е. имеет место измерение

$$J = r + \epsilon, \tag{1.2}$$

где ϵ — инструментальная погрешность измерителя. Собственно говоря, совокупность уравнений (1.1) и (1.2) и декларирует модель этой задачи.

Формальный переход к схеме 2D-ИНС выполним, если объект движется по траектории, для которой $r = \mathrm{const}$ — известная величина, измеряемая в соответствии с (1.2). Тогда, учитывая (1.2) при формировании в (1.1) модели напряженности гравитационного поля (далее будем считать его центральным), а также полагая в (1.1) $i = \overline{1,2}$, получим уравнения функционирования 2D-ИНС, которые, как уже отмечалось выше, неасимптотически устойчивы. Соответствующие уравнения эволюции динамической груп-

пы погрешностей 2D-ИНС принимают вид

$$\begin{aligned} \delta\dot{q}_i &= -e_{ikj}\omega_k\delta q_j + \delta p_i - e_{ikj}\nu_k q_j, \quad \delta q_i(0) = \delta q_{i,0}, \\ \delta\dot{p}_i &= -e_{ikj}\omega_k\delta p_j - \omega_0^2\delta q_i + f_i - e_{ikj}\nu_k p_j, \quad \delta p_i(0) = \delta p_{i,0}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\omega_0 = (\mu/r^3)^{1/2}$ — частота Шулера; μ — гравитационный параметр Земли; $\nu_k, k = \overline{1,3}$ — инструментальные погрешности гироскопических измерителей; $f_i, i = \overline{1,2}$ — инструментальные погрешности ньютонометров. Дополнительно уточним, что в соответствии с вышеизложенной процедурой перехода к схеме 2D-ИНС в уравнениях (1.3) следует считать, что $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 = r$, $\delta q_3 = \epsilon$, $p_1 = \omega_2 r$, $p_2 = -\omega_1 r$, $p_3 = 0$; заметим также, что в силу данного ранее определения трехгранника значения δq_1 и δq_2 связаны с компонентами вектора малого угла $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)^T$, на который плоскость oy_1y_2 (платформа) уклоняется от нормального к вектору $\mathbf{q}$ (горизонтального) положения, следующими соотношениями: $\psi_1 = \delta q_2/r$, $\psi_2 = -\delta q_1/r$.

Изложенным, по сути, исчерпывается существующий взгляд на роль радиальной информации при формировании 2D-ИНС.

Вместе с тем необходимо также отметить, что геометрическое условие на траекторию ($r = \text{const}$), столь важное при трансформировании 3D-ИНС в 2D-ИНС, может быть дополнено не рассматриваемым прежде физическим условием — равенством нулю суммы проекций на радиус-вектор $\mathbf{q}$ всех сил, действующих на объект, что формально записывается следующим образом:

$$W = \delta_{ij}q_i\dot{p}_j = 0, \tag{1.4}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Учет условия (1.4) — это качественно новый взгляд на 2D-ИНС. Действительно воспроизводство условия (1.4) на основе представлений о движении объекта, формируемых 2D-ИНС с учетом измерения (1.2), и представлений о подъемной силе F_3 приводит к текущей невязке вида:

$$\delta W = \omega_2\delta p_1 - \omega_1\delta p_2 + 2\omega_0^2\epsilon + g + f_3 + \omega_1\nu_1 r + \omega_2\nu_2 r, \tag{1.5}$$

которую можно интерпретировать как измерение, что дает основание рассматривать (1.3) и (1.5) в качестве модели обратной задачи для получения текущих оценок динамической группы погрешностей 2D-ИНС. Входящая в (1.5) величина f_3 — погрешность представлений об удельной силе F_3, и это может быть инструментальная погрешность ньютонометра, соосного с инструментальной осью oy_3 и измеряющего F_3 (полагая, что только этим и ограничивается его роль в ИНС, назовем такой ньютонометр нефункциональным), но это может быть и флюктуация значения подъемной силы F_3 около некоторого априорно оцененного ее значения вдоль траектории движения объекта. Кроме того, величина g в (1.5) далее будет отождествляться с аномалией значения напряженности GE-поля.

Для завершения постановки обсуждаемой задачи необходимо принятие адекватных реальным физическим ситуациям гипотез об аномалии g и о погрешностях измерений $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, так как в конечном итоге от этого зависит

вид оцениваемого вектора состояния ($\mathbf{s}$), его размерность, $d(\mathbf{s})$ и сложность алгоритма решения. Из возможных гипотез укажем на две следующие.

Первая гипотеза. Пусть $g = 0$, а погрешности $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{f}$, ϵ — случайные процессы типа Гауссовского белого шума. Последнее может быть принято с тем большим основанием, чем меньше времена корреляции реальных физических процессов по сравнению с шулеровским периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Вектор состояния такой задачи (назовем ее базовой) — $\mathbf{s} = (\delta q_1, \delta p_1, \delta q_2, \delta p_2)^{\mathrm{T}}$ — имеет минимально возможную размерность $d(\mathbf{s}) = 4$. Соответствующая этому случаю ИНС является корректируемой по ДГУ 2D-ИНС с нефункциональным, третьим, ньютонометром, участвующим в формировании невязки (1.5).

Вторая гипотеза. Пусть $\boldsymbol{\nu}$ — вектор некоррелированных между собой гауссовских белых шумов с интенсивностями, равными σ_ν^2; $g = \mathrm{const}_1$, $\epsilon = \mathrm{const}_2$; f_3 — марковский процесс первого порядка со сносом и диффузией, характеризуемыми парой (λ, σ), так что $\dot{f}_3 = -\lambda f_3 + \sqrt{2\lambda}\sigma u$, где u — несмещенный гауссовский белый шум единичной интенсивности; $f_1 = f_2 = 0$. Отметим, что принимаемая модель процесса $f_3(t)$ актуальна для случая, когда в качестве нефункционального ньютонометра используется традиционный гравиметр [4], для которого характерны весьма малые значения параметров λ и σ. В особом комментарии нуждается также модель $f_1 = f_2 = 0$, которая актуальна, строго говоря, в единственном физически реальном случае — неподвижного (относительно Земли) основания, когда из схемы ИНС допустимо исключение и оставшихся двух планарных ньютонометров. Обозначим такую схему, как ZD-ИНС (Z — от английского "zero"). Вводя новую переменную $a = 2\omega_0^2\epsilon + g$, имеем $\dot{a} = 0$, $\mathbf{s} = (\delta q_1, \delta p_1, \delta q_2, \delta p_2, f_3, a)^{\mathrm{T}}$, $d(\mathbf{s}) = 6$.

Следующим за математической постановкой задачи шагом является проверка ее — постановки — корректности, здесь отождествляемой с проверкой выполнения условия наблюдаемости системы (1.3), (1.5). Суть условия в невырожденности калмановской матрицы наблюдаемости [5]. Его выполнение означает возможность построения как вычислительно устойчивых точечных (например, метода наименьших квадратов — МНК), так и асимптотически устойчивых динамических алгоритмов оценивания вектора состояния (например, калмановского фильтра [5]).

Незначительно ограничивая область исследования, далее будем иметь в виду только движение объекта по произвольным географическим параллелям с постоянной относительно Земли линейной скоростью, когда $\omega = \mathrm{const}$. Для этого важного класса движений матрица наблюдаемости $\mathbf{N} = (N_{ij})$ для базовой модели задачи размерности $d(\mathbf{s}) = 4$ представляется следующими элементами:

$$N_{11} = N_{13} = N_{14} = N_{22} = N_{23} = N_{31} = N_{34} = N_{42} = N_{43} = 0;$$

$$N_{12} = \omega_2; \quad N_{21} = -\omega_0^2\omega_2; \quad N_{24} = \omega_2\omega_3; \quad N_{32} = -\omega_2(\omega_0^2 + \omega_3^2);$$

$$N_{33} = -2\omega_0^2\omega_2\omega_3; \quad N_{41} = -\omega_0^2\omega_2(\omega_0^2 - 3\omega_3^2); \quad N_{44} = -\omega_2\omega_3(3\omega_0^2 + \omega_3^2).$$

Анализ калмановской матрицы высвечивает следующие случаи принципиальной неразрешимости рассматриваемой задачи: 1) $\omega_2 = 0$ — объект находится на одном из географических полюсов Земли, при этом измерения (5) не содержат информации о векторе состояния $\mathbf{s}$; 2) $\omega_2 = \omega_3 = 0$ — объект неподвижен в инерциальной системе отсчета с началом в центре Земли; 3) $\omega_3 = \sqrt{2}\omega_0$, или, что эквивалентно, $v + RU\cos\phi = \sqrt{2}V_1 \operatorname{ctg}\phi$, где v — скорость объекта относительно Земли; V_1 — значение первой космической скорости; R — радиус Земли, U — значение угловой скорости собственного вращения Земли; ϕ — географическая широта; как видим, последний случай с учетом того, что для подавляющего большинства морских и воздушных объектов $v < 1000$м/с, возможен только на очень высоких широтах ($\phi > 85°$).

Таким образом, исключая четыре указанных случая, можно говорить о том, что базовая задача размерности $d(\mathbf{s}) = 4$ разрешима.

Аналогичный вывод о разрешимости имеет место и для сформированной выше задачи размерности $d(\mathbf{s}) = 6$; ее весьма существенная особенность проявляется в том, что в число наблюдаемых состояний всегда входят величины и f_3. В частности, это означает, что аномалия GE-поля, т.е. величина g, может быть оценена с погрешностью порядка $2\omega_0^2\epsilon$, например, если $\epsilon = 0.5$ м, то $2\omega_0^2\epsilon \approx 1.5 \cdot 10^{-6}$ м/с^2.

2. Имитационное моделирование

С целью оценки возможностей ИНС, модели которых представлены выше в рамках рассмотренных двух гипотез, были выполены имитационные вычислительные эксперименты, в которых для решения соответствующих обратных задач (или, что то же самое, задач коррекции ИНС) использовался метод динамического обращения в форме калмановского алгоритма [5,6]. Эти эксперименты подтвердили теоретические ожидания относительно разрешимости (наблюдаемости) задач в связи как с определенно выраженной сходимостью (асимптотической устойчивостью), так и достаточно высокой функциональной точностью их численных решений.

В связи с очевидной методологической близостью обеих задач, но большей функциональной полнотой второй из них, представляемой моделью гравиметрической, по сути, ИНС с размерностью вектора состояния $d(\mathbf{s}) = 6$, ниже предложены графические материалы эксперимента (рис.1-4), относящиеся только к ней.

Эксперимент выполнен в вычислительной среде Matlab (версия 7.5) с относительной точностью представления чисел $\epsilon_1 \approx 10^{-16}$. Условия, для которых получен предлагаемый графический материал, характеризуются следующими данными: $\phi = 85°$ — географическая широта места ZD-ИНС; $r = 6371$ км; $\lambda = 0.008$ c^{-1}, $\sigma = 10^{-6}$ м/с^2 [4], $f_3 = 10^{-4}$ м/с^2; $\nu_1 = \nu_2 =$

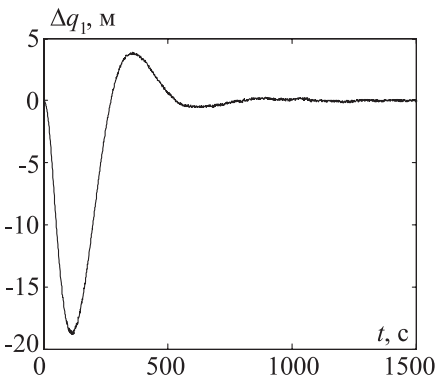

Рис. 1. Эволюция значения Δq_1

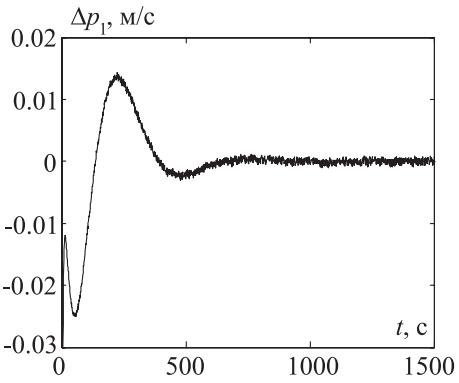

Рис. 2. Эволюция значения Δp_1

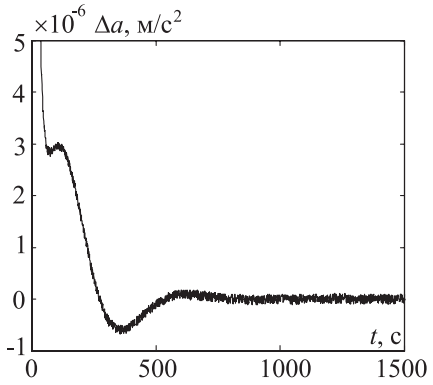

Рис. 3. Эволюция значения Δa

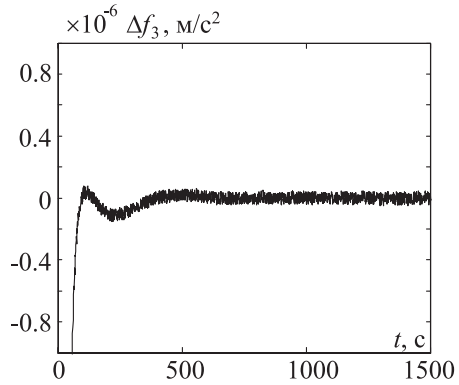

Рис. 4. Эволюция значения Δf_3

$= \nu_3 = 10^{-3}$ град/час; $\epsilon = 1$ м; $g = 10^{-3}$ м/с^2; $\delta q_1(0) = \delta q_2(0) = 100$ м; $\delta p_1(0) = \delta p_2(0) = 0.05$ м/с.

На рисунках через Δq_1, Δp_1, Δa, Δf_3 обозначены погрешности оценивания соответственно величин δq_1, δp_1, a, f_3.

Как видно из рисунков, при периоде Шулера $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 5060$ с и постоянной времени нефункционального ньютонометра (гравиметра) $\tau = \lambda^{-1} = 125$ с установочное время ZD-ИНС $T < 1000$ с, причем при $t > T$ имеют место следующие оценки $|\Delta q_1| \leqslant 0.01$ м (или $|\Delta\psi_2| = |\Delta q_1|/r \leqslant 10^{-7}$), $|\Delta p_1| \leqslant 0.001$ м/с (эти оценки справедливы и для величин $|\Delta q_2|$ и $|\Delta p_2|$), $|\Delta a| \leqslant 10^{-7}$ м/с^2, $|\Delta f_3| \leqslant 10^{-7}$ м/с^2.

Для сравнения приведем также оценки для случая функционирования планарных ньютонометров, когда их инструментальные погрешности являются гауссовскими белыми шумами и интенсивностями $\sigma^2_{f_1} = \sigma^2_{f_2} = 10^{-4}$ м^2/с^4. Тогда $|\Delta q_1| \leqslant 2$ м, $|\Delta p_1| \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$ м/с, $|\Delta a| \leqslant 5 \cdot 10^{-7}$ м/с^2, $|\Delta f_3| \leqslant 10^{-7}$ м/с^2.

Заключение

Таким образом, в работе доказано, что при движении объекта по сфере возможно построение не только устойчивой, но и устойчивой асимптотически по ДГУ 2D-ИНС, дополнительно обладающей и гравиметрическим свойством; более того, на примере случая неподвижного основания показано, что при режиме движения, когда $F_1 = F_2 = 0$, для повышения точности решения целесообразно полное отключение планарных функциональных ньютонометров, т.е. преобразование 2D-ИНС в ZD-ИНС.

Литература

[1] Андреев, В.Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы / В.Д. Андреев. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

[2] Ишлинский, А.Ю. Классическая механика и силы инерции / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

[3] Девятисильный, А.С., Числов К.А. // Изв. РАН. ТиСУ. – 2004. – №5 – С. 149–153.

[4] Справочник геофизика. Гравиразведка / ред. Е.А. Мудрецова. – М.: Недра, 1981. – 608 с.

[5] Kalman, R.E. Topics in Mathematical System Theory / R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib New-York; McGraw-Hill: 1969. – 400 с.

[6] Осипов, Ю.С. Задачи динамического обращения / Ю.С. Осипов, А.В. Кряжемский // Вестник РАН. – 2006. – Т. 76. – С. 615–624.

Поступила в редакцию 18/*VIII*/2008; Paper received 18/*IX*/2008.
в окончательном варианте — 18/*VIII*/2008. Paper accepted 18/*VIII*/2008.

ON INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS CORRECTED BY RADIAL INFORMATION[3]

© 2008 A.S. Devyatisil'niy, K.A. Chislov[4]

A capability of constructing asymptotically stable INS corrected by radial information and has gravimetrical property is shown. The results of numerical experiment are considered.

Keywords and phrases: *inertial navigation system, numerical experiment, asymptotically stable INS.*

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

[4] Devyatisil'niy Alexander Sergeevich (devyatis@iacp.dvo.ru), Chislov Kirill Alexandrovich (kirillche@rambler.ru), Institute of Automation and Control Processes, Vladivostok, 690041, Russia.