

УДК 511.2+511.334

## О ТЕОРИИ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ И МОДУЛЯРНЫМИ ФОРМАМИ<sup>1</sup>

© 2008 Г.В. Воскресенская<sup>2</sup>

В статье изучается соответствие между элементами конечных групп и модулярными формами, основанное на использовании комбинаторного рамочного символа. Исследуются возникающие категории. Рассматриваются группы, элементы которых соответствуют мультипликативным эта-произведениям. Вводится и изучается понятие модулярного генетического кода группы.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект №05-01-00313)

**Ключевые слова:** группы, представления групп, модулярные формы, категории.

### Введение

Проблема изучения связей между модулярными формами и представлениями групп является одной из важных тем современной алгебры и теории чисел. Это изучение может вестись с различных точек зрения, в основе наших исследований лежит соответствие между элементами конечных групп и модулярными формами, выражающимися через  $\eta$ -функцию Дедекинда, с помощью некоторого представления и связанного с ним комбинаторного рамочного символа (Frame-shape соответствие).

### 1. Соответствие между элементами конечных групп и модулярными формами

#### 1.1 Соответствие с помощью рамочного символа (Frame-shape-соответствие)

Эта-функция Дедекинда определяется формулой:

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz},$$

<sup>1</sup>Представлена доктором физико-математических наук, профессором В.Е. Воскресенским.

<sup>2</sup>Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где  $z$  принадлежит верхней комплексной полуплоскости.

Пусть  $\Phi$  — такое линейное представление  $G$  в пространстве  $V$ ,  $24 \mid \dim V$ , что для любого элемента  $g \in G$  характеристический многочлен  $P_g(x)$  имеет вид

$$\prod_{j=1}^s (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \quad a_j, t_j \in \mathbf{N}, \quad 24 \mid \sum_{j=1}^s a_j t_j.$$

Тогда каждому элементу  $g$  можно сопоставить функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^s \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Функция  $\eta_g(z)$  является параболической формой из пространства  $S_k(N, \chi)$ , где используется обозначение

$$k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s t_j,$$

минимальный уровень  $N$  определяется из условия

$$24 \mid \sum_{j=1}^s \frac{N t_j}{a_j},$$

характер  $\chi$  — характер Дирихле по модулю  $N$ ,

$$\chi(d) = \left( \frac{\prod_{j=1}^s a_j^{t_j}}{d} \right).$$

Если  $d$  — четно, то  $\chi(d)$  определяется как  $\chi(d + N) = \chi(d)$ ,  $(d, N) = 1$ . Символ  $\prod_{j=1}^s a_j^{t_j}$  называется рамочным символом или рамочным шаблоном. Описанное выше соответствие называется соответствием с помощью рамочного символа (шаблона) (Frame-shape-соответствие).

Такое соответствие можно рассмотреть для любой группы. Например, можно подобрать представление в виде суммы регулярного и нескольких тривиальных.

Возникает интересная задача нахождения для каждой группы минимального  $l$ , обеспечивающего это соответствие,  $\dim V = 24l$ . Так для группы  $Z_5 \times Z_5$  минимальное  $l = 2$ .

### 1.2. Категория G-MF-SET

**Определение:** В дальнейшем  $(G, \Phi)$ -множеством называется множество параболических форм  $\eta_g(z)$ , ассоциированных с элементами группы  $G$  по правилу, описанному в 1.1, с помощью некоторого представления.

**Пример:**

$G \cong S_3$ ,  $\Phi = 4 \cdot T_{\text{reg}}$ ,  $T_{\text{reg}}$  — регулярное представление.

$G \cong \langle a, b : a^3 = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$ .

$$\eta_e(z) = \eta^{24}(z), \quad \eta_a(z) = \eta_{a^2}(z) = \eta^8(3z),$$

$$\eta_b(z) = \eta_{ab}(z) = \eta_{a^2b}(z) = \eta^{12}(2z).$$

$(S_3, T_{reg})$ -множество:  $\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z)\}$ .

$(G, \Phi)$ -множества образуют категорию, если фиксировать  $G$  и менять  $\Phi$ . Пусть  $A$  —  $(G, \Phi)$ -множество,  $B$  —  $(G, \Psi)$ -множество. Морфизм определяется следующим образом:  $f_1(z) = \eta_{g,\Phi}(z) \in A$  переходит в  $f_2(z) = \eta_{g,\Psi}(z) \in B$  для любого элемента  $g \in G$ .

**Пример:**

Пусть  $G \cong S_3$ ,  $T_1(a) = T_1(b) = 1$ ,  $T_2(a) = 1$ ,  $T_2(b) = -1$ ,  $T_3$  — двумерное неприводимое представление;  $\Phi = 4 \cdot T_{reg}$ ,  $\Psi = 8T_1 \oplus 4T_2 \oplus 6T_3$ .

$A = \{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z)\}$  —  $(G, \Phi)$ -множество,

$B = \{\eta^{24}(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^8(2z)\eta^8(z)\}$  —  $(G, \Psi)$ -множество,

Действие морфизма:

$$\begin{aligned} \eta_{g,\Phi}(z) &= \eta^8(3z) \rightarrow \eta_{g,\Psi}(z) = \eta^6(3z)\eta^6(z), & g &= a, \quad a^2, \\ \eta_{g,\Phi}(z) &= \eta^{12}(2z) \rightarrow \eta_{g,\Psi}(z) = \eta^8(2z)\eta^8(z), & g &= b, \quad ab, \quad a^2b, \\ \eta_{g,\Phi}(z) &= \eta^{24}(z) \rightarrow \eta_{g,\Psi}(z) = \eta^{24}(z). \end{aligned}$$

Тождественный морфизм:

$$\eta_{g,\Phi}(z) \rightarrow \eta_{g,\Phi}(z).$$

Эту категорию можно обозначить  $G - MF - SET$ .

### 1.3 Категория GR-MF-SET

Эта категория определится, если не фиксировать конечную группу  $G$  и рассматривать морфизм  $(G, \Phi)$ -множества  $A$  в  $(H, \Psi)$ -множество  $B$  следующим образом: пусть  $\phi$  — гомоморфизм группы  $G$  в группу  $H$ , тогда

$$\eta_{g,\Phi}(z) \rightarrow \eta_{\phi(g),\Psi}(z).$$

При определении композиции морфизмов учитывается область определения (также как и при определении гомоморфизмов групп).

### 1.4 $(G, \Phi)$ -множества как элементы полугруппы

Можно определить композицию множеств:  $(G, \Phi_1)$ -множества  $A$  и  $(G, \Phi_2)$ -множества  $B$  как  $(G, \Phi_1 \oplus \Phi_2)$  множество. Если множество  $A = \{\eta_{g,\Phi_1}\}_{g \in G}$ ,  $B = \{\eta_{g,\Phi_2}\}_{g \in G}$  то их композиция  $C = \{\eta_{g,\Phi_1}\eta_{g,\Phi_2}\}_{g \in G}$ . Это задает структуру полугруппы.

### 1.5 Редуцированные $(G, \Phi)$ -множества

Во многих задачах удобно рассматривать множества, получающихся из  $(G, \Phi)$ -множеств удалением повторяющихся параболических форм. Мы будем называть такие множества редуцированными.

Например, редуцированное  $(S_3, T_{reg})$ -множество:

$$\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\}.$$

Интересной проблемой является определение соответствующих групп по заданным редуцированным  $(G, \Phi)$ -множествам.

### 1.6 Вложения групповых алгебр в прямые суммы пространств модулярных форм

В случае, когда определено  $(G, \Phi)$ -множество, групповую алгебру  $\mathbf{C}[G]$  можно интерпретировать как подпространство в

$$\bigoplus_{g \in G} S_{k,g}(N, \chi) = \bigoplus m_g S_{k,g}(N, \chi),$$

где  $\eta_g(z) \in S_{k,g}(N, \chi)$ . Во второй сумме мы собрали вместе одинаковые пространства. Каждому элементу  $g \in G$  сопоставляется линейное пространство, порожденное  $\eta_g(z)$  ( $\mathbf{C}\eta_g(z)$ ).

В случае, когда все  $\eta_g(z)$  являются мультипликативными  $\eta$ -произведениями

$$\mathbf{C}[G] \cong \bigoplus_{g \in G} S_{k,g}(N, \chi).$$

Например,

$$\mathbf{C}[S_3] \cong S_{12}(1) \bigoplus 2 S_4(9) \bigoplus 3 S_6(4),$$

или

$$\mathbf{C}[S_3] \cong S_{12}(1) \bigoplus 2 S_6(3) \bigoplus 3 S_8(2).$$

Интересной малоизученной проблемой является нахождение условий, при которых вложение  $\mathbf{C}[G]$  в прямую сумму пространств параболических форм является изоморфизмом в случаях, когда пространства  $S_{k,g}(N, \chi)$  не одномерны, а также подробное изучение вложений (дополнительные элементы базиса, можно ли их разумным образом дополнить до  $(G, \Phi)$ -множества).

### 1.7 Множества эта-произведений, независимые относительно группы

**Определение:** Назовем множество  $S$ , состоящее из эта-произведений, независимым относительно группы, если не существует такой группы  $G$ , что  $S$  содержится в некотором  $(G, \Phi)$ -множестве  $M$ .

В противном случае множество  $S$  будем называть зависимым относительно группы.

В следующем утверждении мы приведем пример к этому определению.

**Предложение 1:** Множество  $S = \{\eta^{24}(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^2(5z)\eta^{14}(z)\}$  является независимым относительно группы.

**Доказательство:** Если бы  $S$  содержалось бы в некотором  $(G, \Phi)$ -множестве  $M$ , то в группе  $G$  имела бы силовская 5 – подгруппа  $G_5$ . В  $G_5$  должна содержаться подгруппа  $Z_5 \times Z_5$ , так как в  $G$  имеются по крайней мере 2 элемента порядка 5, не лежащие в одной циклической группе. Но как отмечалось в 1.1 не существует  $(Z_5 \times Z_5, \Psi)$ -множеств, если  $\dim \Psi = 24$ .

## 2. Конечные группы, с элементами которых ассоциируются мультипликативные $\eta$ -произведения

### 2.1 Мультипликативные $\eta$ -произведения

Мы рассмотрим специальный класс модулярных форм, которые называются мультипликативными  $\eta$ -произведениями. Они находят различные при-

менения в теории модулярных форм и ее приложениях. Мы в 2.2 обсудим их роль в теории Frame-shape соответствия.

**Теорема 1:** Существует в точности 28 функций, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) они являются параболическими формами целого веса с характером;
- 2) они не имеют нулей вне параболических вершин и порядок нуля в каждой вершине равен 1.

Эта теорема доказана в статье [6].

Заранее не предполагается, что эти функции являются собственными относительно всех операторов Гекке, но фактически это так. Следовательно, коэффициенты таких функций мультипликативны. Линейные пространства  $S_k(N, \chi)$ , содержащие функцию, являющуюся мультипликативным  $\eta$ -произведением, для минимального  $N$  одномерны.

С другой стороны, американские математики Д. Даммит, Х. Кисилевски и Дж. МакКей доказали, что существует в точности 30 функций вида

$$\prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j, \quad t_j \in \mathbf{N}, \quad \sum_{j=1}^s a_j t_j = 24,$$

с мультипликативными коэффициентами.

Число  $s$  не фиксировано, в этом произведении перебираются все возможные разбиения числа 24.

В работе [1] в отличие от теоремы 1, заранее предполагается, что исследуемая функция является  $\eta$ -произведением.

Эти 30 функций содержат все функции, определяемые теоремой 1, и две функции полуцелого веса:  $\eta^3(8z)$ ,  $\eta(24z)$ .

Эти параболические формы приведены в таблице (см. следующую страницу) с указанием весов и характеров (их мы будем далее называть мультипликативными  $\eta$ -произведениями.)

## 2.2 $M\eta P$ -группы

В следующем предложении доказывается свойство, позволяющее определить группы некоторого нового специального типа. Подгруппы такого типа содержатся в любой группе.

**Предложение 2:** Если  $g$  — такой элемент в группе  $G$ , что функция  $\eta_g(z)$ , ассоциированная с  $g$  с помощью некоторого представления, является мультипликативным  $\eta$ -произведением, то функция  $\eta_h(z)$ ,  $h = g^k$ , также является мультипликативным  $\eta$ -произведением.

Этот факт приводит к рассмотрению интересной открытой проблемы: *проблема нахождения всех таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами группы с помощью некоторого точного представления через рамочный символ, являются мультипликативными  $\eta$ -произведениями.*

Будем называть такие группы  $M\eta P$ -группами.

Очевидно, что подгруппа  $M\eta P$ -группы сама является  $M\eta P$ -группой.

Таблица 1

| $f(z)$                                    | $k$           | $N$ | $\chi(d)$                    |
|-------------------------------------------|---------------|-----|------------------------------|
| $\eta(23z)\eta(z)$                        | 1             | 23  | $\left(\frac{-23}{d}\right)$ |
| $\eta(22z)\eta(2z)$                       | 1             | 44  | $\left(\frac{-11}{d}\right)$ |
| $\eta(21z)\eta(3z)$                       | 1             | 63  | $\left(\frac{-7}{d}\right)$  |
| $\eta(20z)\eta(4z)$                       | 1             | 80  | $\left(\frac{-5}{d}\right)$  |
| $\eta(18z)\eta(6z)$                       | 1             | 108 | $\left(\frac{-3}{d}\right)$  |
| $\eta(16z)\eta(8z)$                       | 1             | 128 | $\left(\frac{-2}{d}\right)$  |
| $\eta^2(12z)$                             | 1             | 144 | $\left(\frac{-1}{d}\right)$  |
| $\eta^4(6z)$                              | 2             | 36  | 1                            |
| $\eta^3(8z)\eta^2(4z)$                    | 2             | 32  | 1                            |
| $\eta^2(10z)\eta^2(2z)$                   | 2             | 20  | 1                            |
| $\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$       | 2             | 24  | 1                            |
| $\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$        | 2             | 15  | 1                            |
| $\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$        | 2             | 14  | 1                            |
| $\eta^2(9z)\eta^2(3z)$                    | 2             | 27  | 1                            |
| $\eta^2(11z)\eta^2(z)$                    | 2             | 11  | 1                            |
| $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$                    | 3             | 12  | $\left(\frac{-3}{d}\right)$  |
| $\eta^6(4z)$                              | 3             | 16  | $\left(\frac{-1}{d}\right)$  |
| $\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$     | 3             | 8   | $\left(\frac{-2}{d}\right)$  |
| $\eta^3(7z)\eta^3(z)$                     | 3             | 7   | $\left(\frac{-7}{d}\right)$  |
| $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$ | 4             | 6   | 1                            |
| $\eta^4(5z)\eta^4(z)$                     | 4             | 5   | 1                            |
| $\eta^8(3z)$                              | 4             | 9   | 1                            |
| $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$                    | 4             | 8   | 1                            |
| $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$           | 5             | 4   | $\left(\frac{-1}{d}\right)$  |
| $\eta^6(3z)\eta^6(z)$                     | 6             | 3   | 1                            |
| $\eta^{12}(2z)$                           | 6             | 4   | 1                            |
| $\eta^8(2z)\eta^8(z)$                     | 8             | 2   | 1                            |
| $\eta^{24}(z)$                            | 12            | 1   | 1                            |
| $\eta^3(8z)$                              | $\frac{3}{2}$ | 4   | $\left(\frac{-4}{d}\right)$  |
| $\eta(24z)$                               | $\frac{1}{2}$ | 576 | $\left(\frac{12}{d}\right)$  |

Дж. Мейсон показал, что группа Матье  $M_{24}$  является  $M\eta P$ -группой. Это большая и неразрешимая группа, но существуют  $M\eta P$ -группы, не являющиеся подгруппами в  $M_{24}$ . Кроме того во многих случаях для одной и той же  $M\eta P$ -группы возможны различные соответствия между элементами группы и мультипликативными  $\eta$ -произведениями.

Все это стимулировало интерес к изучению проблемы классификации  $M\eta P$ -групп. В статьях [7]– [11] автором были найдены абелевы, метациклические  $M\eta P$ -группы,  $M\eta P$ -подгруппы в  $SL(5, C)$ ,  $M\eta P$ -группы порядка  $p^k$ ,  $p$  — нечетное простое число, доказано, что все группы порядка 24 являются  $M\eta P$ -группами.

Так как функция  $\eta^{24}(z)$  является мультипликативным  $\eta$ -произведением, то  $M\eta P$ -подгруппы содержатся в любой группе (такая подгруппа может быть тривиальной).

### 2.3 Ограничения представлений на $M\eta P$ -подгруппы

Если рассматривать ограничение на  $M\eta P$ -подгруппу  $H$  группы  $G$  такого представления  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ , что  $\forall h \in H \quad \eta_{h,\Phi}(z)$  является мультипликативным  $\eta$ -произведением, то ограничение представления  $\Phi$  на другую подгруппу  $F$  может уже не приводить к мультипликативным  $\eta$ -произведениям.

Например, рассмотрим группу

$$D_5 \cong \langle a, b : a^5 = e, \quad b^2 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle.$$

Рассмотрим представление

$$\Phi = 2(T_1 \oplus T_2) \oplus 8(T_3 \oplus T_4),$$

здесь  $T_1, T_2$  — двумерные неприводимые представления,  $T_3, T_4$  — одномерные неприводимые представления.

Далее, рассмотрим подгруппы  $H \cong \langle b \rangle$ ,  $F \cong \langle a \rangle$ .

Функции  $\eta_{b,\Phi}(z) = \eta^{12}(2z)$ ,  $\eta_{e,\Phi}(z) = \eta^{24}(z)$  являются мультипликативными  $\eta$ -произведениями, а функция  $\eta_{a,\Phi}(z) = \eta^2(5z)\eta^{14}(z)$  не является, то есть ограничение представления  $\Phi$  на  $H$  приводит к мультипликативным  $\eta$ -произведениям, а ограничение на  $F$  не приводит.

**Теорема 2:** Пусть  $G$  — такая конечная группа, в которой существует собственная нетривиальная  $M\eta P$ -подгруппа. Если существует такое точное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\dim V = 24$ , что для любой нетривиальной подгруппы  $H$  в  $G$  и для любого  $h \in H$ ,  $\eta_{h,\Phi}(z)$  является мультипликативным  $\eta$ -произведением, то  $G$  сама является  $M\eta P$ -группой.

**Доказательство:** Из вида мультипликативных  $\eta$ -произведений следует, что в группе могут быть элементы только порядков от 1 до 24, исключая 13, 17, 19. Пусть  $g \in G$ ,  $h = g^l$  — элемент простого порядка. Так как при ограничении на подгруппу  $\langle h \rangle$  каждый элемент соответствует мультипликативному  $\eta$ -произведению, то  $h$  соответствует одной из следующих форм:

$$\eta^{12}(2z), \quad \eta^8(2z)\eta^8(z), \quad \eta^8(3z), \quad \eta^6(3z)\eta^6(z),$$

$$\eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^3(7z)\eta^3(z), \quad \eta^2(11z)\eta^2(z), \quad \eta(23z)\eta(z).$$

Можно показать, что в этом случае  $\eta_{g,\Phi}(z)$  является мультипликативным  $\eta$ -произведением. Покажем, например, это в случае, когда  $\text{ord}(g) = 6$ . Характеристические многочлены элементов  $g, g^2, g^3$  равны

$$P_g(x) = \Phi_6^\alpha \Phi_3^\beta \Phi_2^\gamma \Phi_1^\delta, \quad P_{g^2}(x) = \Phi_3^{\alpha+\beta} \Phi_1^{\gamma+\delta}, \quad P_{g^3}(x) = \Phi_2^{2\alpha+\gamma} \Phi_1^{2\beta+\delta}.$$

Следует рассмотреть 4 случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^8(3z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^{12}(2z); \end{cases} & 2) \quad & \begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^6(3z)\eta^6(z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^{12}(2z); \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^6(3z)\eta^6(3z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^8(2z)\eta^8(z); \end{cases} & 4) \quad & \begin{cases} g^2 \leftrightarrow \eta^8(3z), \\ g^3 \leftrightarrow \eta^8(2z)\eta^8(z). \end{cases} \end{aligned}$$

В каждом из этих случаев мы должны в натуральных числах решить соответствующую систему

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} \alpha + \beta = 8, \\ \gamma + \delta = 8, \\ 2\alpha + \gamma = 12, \\ 2\beta + \delta = 12; \end{cases} & 2) \quad & \begin{cases} \alpha + \beta = 6, \\ \gamma + \delta = 12, \\ 2\alpha + \gamma = 12, \\ 2\beta + \delta = 12; \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} \alpha + \beta = 6, \\ \gamma + \delta = 12, \\ 2\alpha + \gamma = 8, \\ 2\beta + \delta = 16; \end{cases} & 4) \quad & \begin{cases} \alpha + \beta = 8, \\ \gamma + \delta = 8, \\ 2\alpha + \gamma = 8, \\ 2\beta + \delta = 16. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитываем также неравенства

$$\alpha \leq \beta, \quad \alpha \leq \gamma, \quad \alpha \leq \delta, \quad \beta \leq \delta, \quad \gamma \leq \delta.$$

В четвертом случае решений в натуральных числах нет. В остальных случаях получаем единственную возможность в каждом случае:

$$\begin{cases} 1) \quad g \leftrightarrow \eta^4(6z), \\ 2) \quad g \leftrightarrow \eta^3(6z)\eta^3(2z), \\ 2) \quad g \leftrightarrow \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z). \end{cases}$$

Для элементов других порядков доказательство аналогично.

Заслуживающей внимания представляет собой следующая задача: нахождение всех  $M\eta P$ -подгрупп группы  $G$ , и для каждой такой подгруппы  $H$  нахождение всех таких точных представлений  $\Phi$  группы  $G$ , что  $\eta_{h,\Phi}(z)$  является мультипликативным  $\eta$ -произведением  $\forall h \in H$ .

При исследовании  $q$  — рядов, соответствующих элементам группы с помощью рамочного символа хотелось бы получить информацию о коэффициентах этих рядов, выразить их через известные арифметические функции.

**Теорема 3:** Пусть  $G$ -группа порядка  $24l$ ,  $(l, 24) = 1$ ,  $\Phi$  — регулярное представление группы  $G$ , тогда

1)

$$\eta_{g,\Phi}(z) = f(lz), \quad l \mid \text{ord}(g),$$

где  $f$  — мультипликативное  $\eta$ -произведение,

2) для коэффициентов Фурье функции  $\eta_{g,\Phi}(z)$  справедливо:

a)  $b(n) = 0$ , если  $l$  не делит  $n$ ,

b)  $b(n) = a\left(\frac{n}{l}\right)$ ,  $l \mid n$ ,

где  $a(n)$  — коэффициент функции  $f(z)$ ,

c)  $b(lmn) = b(lm)b(ln)$ ,  $(m, n) = 1$ .

**Доказательство:**

Для любого элемента  $g \neq e$  характеристический многочлен  $P_g(x)$  имеет след, равный 0.

Если  $\text{ord}(g) = 2$ , то имеется единственная возможность  $P_g(z) = (x^2 - 1)^{12}$ ,  $g \leftrightarrow \eta^{12}(2z)$ .

Если  $\text{ord}(g) = 3$ , то имеется единственная возможность  $P_g(z) = (x^3 - 1)^8$ ,  $g \leftrightarrow \eta^8(3z)$ .

Из этого следуют приводимые ниже соответствия

Таблица 2

| $\text{ord}(g)$ | модулярная форма |
|-----------------|------------------|
| 4               | $\eta^6(4z)$     |
| 6               | $\eta^4(6z)$     |
| 8               | $\eta^3(8z)$     |
| 12              | $\eta^2(12z)$    |
| 24              | $\eta(24z)$      |

Если  $\text{ord}(h) = l\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ , то элемент  $h$  соответствует функции  $\eta^{\frac{24}{\alpha}}(\alpha z)$ , которая является мультипликативным  $\eta$ -произведением.

Рассмотрим разложения в ряды Фурье

$$\eta^{\frac{24}{\alpha}}(\alpha z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n,$$

$$\eta^{\frac{24}{\alpha}}(\alpha z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^{ln} = \eta_{g,\Phi}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n.$$

Следовательно,

a)  $b(n) = 0$ , если  $l$  не делит  $n$ ,

b)  $b(n) = a\left(\frac{n}{l}\right)$ ,  $l \mid n$ .

Так как коэффициенты  $a(n)$  мультипликативны, то при  $(m, n) = 1$

$$b(lmn) = a(mn) = a(m)a(n) = b(lm)b(ln) \quad \forall l.$$

### 3. Модулярный аналог генетического кода группы

В рассматриваемом контексте является содержательной задача нахождения таких наборов редуцированных  $(G, \Phi)$  — множеств, которые *однозначно* определяют группу.

В следующей таблице мы укажем определяющие  $(G, \Phi)$  — множества для групп порядков от 1 до 8.

Дальнейшее исследование модулярных аналогов генетического кода является перспективной темой исследований.

Таблица 2

| группа                      | модулярный генетический код                                                                                                                            |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\{e\}$                     | $\{\eta^{24}(z)\}$                                                                                                                                     |
| $Z_2$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$<br>$\{\eta^{24}(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z)\}$                                                                 |
| $Z_3$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z)\}$                                                                                                                         |
| $Z_2 \times Z_2$            | $\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$<br>$\{\eta^{24}(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}$                                         |
| $Z_4$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$<br>$\{\eta^{24}(z), \eta^5(4z)\eta^2(2z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}$                               |
| $Z_5$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^4(5z)\eta^4(z)\}$                                                                                                                |
| $Z_6$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$<br>$\{\eta^{24}(z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^9(2z)\eta^6(z)\}$ |
| $S_3$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$<br>$\{\eta^{24}(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z)\}$                                |
| $Z_7$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^3(7z)\eta^3(z)\}$                                                                                                                |
| $Z_8$                       | $\{\eta^{24}(z), \eta^3(8z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\}$                                                                                              |
| $Z_4 \times Z_2$            | $\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$<br>$\{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z)\}$                             |
| $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ | $\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\} \wedge$<br>$\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^6(2z)\eta^{12}(z), \eta^4(2z)\eta^{16}(z)\}$     |

Поясним нахождение модулярного генетического кода на примере группы  $G \cong Z_2 \times Z_2$ . Так как для рассматриваемой группы  $G$  существует редуцированное  $(G, \Phi_1)$ -множество  $\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\}$ , то все неединичные элементы этой группы имеют порядок 2. Порядок этой группы равен  $2^n$ . Число  $m_1 = \frac{24}{2^n}$  — кратность тривиального представления в представлении  $\Phi_1$ . Это число должно быть неотрицательным целым. Значит, порядок группы равен 2, или 8.

Теперь рассмотрим второе  $(G, \Phi_2)$ -множество:

$$\{\eta^{24}(z), \quad \eta^{11}(2z)\eta^2(z), \quad \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}.$$

В этом случае в группе есть по крайней мере два несопряженных элемента порядка 2. Покажем, что случай  $|G| = 8$  невозможен.

Пусть в группе  $\alpha$  элементов соответствуют модулярной форме  $\eta^{11}(2z)\eta^2(z)$ , а  $\beta$  элементов соответствуют модулярной форме  $\eta^{10}(2z)\eta^4(z)$ . Так как число  $m_1$  целое, то  $8 \mid 2\alpha + 4\beta$ . Существуют две возможности:  $\alpha = 2, \beta = 5$ ;  $\alpha = 6, \beta = 1$ . Пусть группа порождается элементами  $a, b, c$ .

В первом случае рассмотрим представление  $T: T(a) = 1, T(b) = -1$ . Здесь мы полагаем, что элементы  $a, b$  соответствуют модулярной форме  $\eta^{11}(2z)\eta^2(z)$ . Кратность вхождения этого представления в  $\Phi_2$  равна числу  $\frac{24}{20}$ , а должна равняться целому числу.

Во втором случае рассмотрим представление  $T: T(a) = 1, T(b) = 1, T(c) = -1$ . Здесь мы полагаем, что элемент  $a$  соответствует модулярной форме  $\eta^{10}(2z)\eta^4(z)$ . Кратность вхождения этого представления в  $\Phi_2$  равна числу  $\frac{24}{18}$ , а должна равняться целому числу.

Итак, остается единственная возможность  $G \cong Z_2 \times Z_2 \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ . Выпишем соответствующие представления. Пусть элементы  $a, b$  соответствуют модулярной форме  $\eta^{11}(2z)\eta^2(z)$ , элемент  $ab$  соответствует модулярной форме  $\eta^{10}(2z)\eta^4(z)$ . Искомые представления

$$\Phi_1 \cong 6 \cdot T_{\text{reg}}; \quad \Phi_2 \cong 8T_1 \oplus 5T_2 \oplus 5T_3 \oplus 6T_4.$$

Здесь

$$T_1(a) = T_2(a) = T_1(b) = T_3(b) = 1; \quad T_3(a) = T_4(a) = T_2(b) = T_4(b) = -1.$$

В остальных случаях доказательство проводится аналогичными рассуждениями.

## Литература

- [1] Dummit, D. Multiplicative products of  $\eta$ -functions / D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay // Contemp. Math. – 1985. – V 45. – P. 89–98.
- [2] Kondo, T. Examples of multiplicative  $\eta$ -products / T. Kondo // Sci. Pap. Coll. Arts and Sci. Univ. – 1986. – V. 35. – P. 133–149.
- [3] Mason, G.  $M_{24}$  and certain automorphic forms / G. Mason // Contemp. Math. – 1985. – V. 45. – P. 223–244.
- [4] Mason, G. Finite groups and Hecke operators / G. Mason // Math. Ann. – 1989. – V. 282. – P. 381–409.

- [5] Ono, K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series / K. Ono, 2004. – 216 pp.
- [6] Voskresenskaya, G.V. One special class of modular forms and group representations / G.V. Voskresenskaya // JTNB. – 1999. – V. 11. – P. 247–262.
- [7] Воскресенская, Г.В. Метациклические группы и модулярные формы / Г.В. Воскресенская // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67. – №2. – С. 163–173.
- [8] Воскресенская, Г.В. Абелевы группы и модулярные формы / Г.В. Воскресенская // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2003. – №2. – С. 21–35.
- [9] Воскресенская, Г.В. Мультипликативные произведения эта-функций Дедекинда и представления групп / Г.В. Воскресенская // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – №4. – С. 282–295.
- [10] Воскресенская, Г.В. / Г.В. Воскресенская // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2004. – №3. – С. 18–38.
- [11] Voskresenskaya, G.V. Multiplicative Dedekind  $\eta$ -functions and representations of finite groups / G.V. Voskresenskaya // JTNB. – 2005. – V. 17. – P. 359–380.

Поступила в редакцию 19/IX/2008;  
в окончательном варианте — 19/IX/2008.

## ON THE THEORY OF CORRESPONDENCE BETWEEN FINITE GROUPS AND MODULAR FORMS<sup>3</sup>

© 2008 G.V. Voskresenskaya<sup>4</sup>

In the paper the correspondence between elements of finite groups and modular forms based on combinatoric Frame-shape is discussed. Categories which are appeared here are investigated. Groups which elements correspond to multiplicative  $\eta$ -products are discussed. The notion of the modular analog of group genetic code is introduced and studied.

**Keywords and phrases:** *groups, group representations, modular forms, categories.*

Paper received 19/IX/2008.

Paper accepted 19/IX/2008.

---

<sup>3</sup>Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

<sup>4</sup>Voskresenskaya Galina Valentinovna, Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.