

УДК 512.4

МОДУЛИ ЧЕТВЕРНОЙ ГРУППЫ КЛЕЙНА И ИХ КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ¹

© 2008 Л.А. Белова²

Работа посвящена вычислению бирациональных инвариантов типа $H^1(\pi, \text{Pic} X_L)$ алгебраических торов с гладкой проективной моделью X_L , где π — группа типа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Использовалась теорема Клячко, которая позволяет вычислять эти кохомологические инварианты, используя только структуру модуля $\hat{T}$ рациональных характеров тора T . Найдены все торы размерности не более 8 с биквадратичным полем разложения, кохомологический инвариант которых нетривиален. Далее изучался максимальный тор в односвязной полупростой исключительной группе, определяемой системой корней типа E_8 . В соответствующей группе Вейля $W(E_8)$ были найдены подгруппы типа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, соответствующий модуль для которых обладают нетривиальным кохомологическим инвариантом. Тем самым доказана нерациональность максимального тора исключительной полупростой группы типа E_8 .

Ключевые слова: торы с биквадратным полем разложения, нерациональность максимального тора в $W(E_8)$.

Введение

Одной из основных задач алгебраической геометрии является классификация многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности. Важным инструментом в ее решении являются так называемые бирациональные инварианты, т.е. объекты (числовые характеристики, группы, классы эквивалентности и т.д.), связанные с многообразием, но зависящие лишь от класса бирациональной эквивалентности многообразия. В случае алгебраических групп основной бирациональный инвариант — класс Пикара $[\text{Pic} X_L]$ гладкой проективной модели X_L этой группы. Мы изучаем бирациональную геометрию алгебраических торов над *незамкнутым* полем k . В этой

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором В.Е. Воскресенским.

²Белова Любовь Александровна (lubelova@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ситуации имеется мощный инструмент для вычисления основного бирационального инварианта, разработанный В.Е. Воскресенским — это так называемая вялая резольвента для алгебраического тора, которая позволяет найти класс Пикара, а также вычислять серию производных бирациональных инвариантов — групп одномерных когомологий $H^1(\pi, \text{Pic } X_L)$ для любой подгруппы π в Π . Здесь Π — группа Галуа минимального поля разложения тора T . Нетривиальность этих групп позволяет доказать нерациональность алгебраических торов.

Работа посвящена вычислению производных бирациональных инвариантов (точнее, групп одномерных когомологий $\{H^1(\pi, \text{Pic } X_L) : \pi < \Pi\}$) для максимального алгебраического тора в односвязной полупростой исключительной группе, определяемой системой корней типа E_8 . Здесь π — подгруппа типа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ в группе Вейля для системы корней типа E_8 . Среди таких подгрупп были найдены те, которые обладают нетривиальным когомологическим инвариантом. Тем самым доказана нерациональность максимального тора исключительной полупростой группы типа E_8 . Однако, прямой способ подсчета группы когомологий, т.е. построение вялой резольвенты, сопряжен с трудностями технического характера. В данной работе вычисления когомологических инвариантов проводились без построения вялой резольвенты. Мы использовали теорему Клячко, которая позволяет вычислять когомологический инвариант, используя только структуру модуля $\hat{T}$ рациональных характеров.

1. Алгебраический тор. Вялая резольвента алгебраического тора

Напомним определение основного объекта нашего изучения, а также ряд фундаментальных понятий из теории алгебраических групп.

Среди алгебраических групп выделяют важный класс аффинных групповых схем. Простейший пример — это **мультипликативная группа** $G_{m,k}$, которая определяется условием $G_m(B) = B^*$, где B^* — мультипликативная группа обратимых элементов кольца B .

Напомним основные моменты теории схем. Пусть A — k -алгебра, тогда $X = \text{Spec } A$ называется *аффинной схемой*, где $\text{Spec } A$ — множество всех простых идеалов A . Алгебра обладает так называемой когрупповой структурой. В алгебре A есть следующие операции:

$$\begin{aligned} m^* : A &\rightarrow A \otimes_k A \text{ (коумножение),} \\ i^* : A &\rightarrow A \text{ (кообращение),} \\ e^* : A &\rightarrow k \text{ (коединица),} \end{aligned}$$

удовлетворяющие системе аксиом двойственных аксиомат группы. Такие k -алгебры называются *алгебрами Хопфа*.

Вернемся к нашему простейшему примеру. Группа G_m является простей-

шей аффинной схемой вида: $\mathrm{Spec}k[T, T^{-1}]$, т.к. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(k[T, T^{-1}], B) = B^*$. Когрупповые операции имеют вид:

$$\begin{aligned} m^*(T) &= T \otimes T, \\ e^*(T) &= T^{-1}, \\ i^*(T) &= 1. \end{aligned}$$

Аффинная группа G_m называется *мультипликативной группой*. Имеем матричное представление

$$G_m = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \mid b \in B^* \right\}.$$

Понятно, что наряду с $G_{m,k}$ мы можем рассматривать и ее декартову степень $\underbrace{G_{m,k} \times \dots \times G_{m,k}}_n = G_{m,k}^n$. Это также аффинная групповая схема.

Определим, наконец, алгебраический тор.

Определение 1: *Алгебраический тор* T , определенный над полем k это аффинная k -схема следующего вида $T \otimes_k L \cong G_{m,L}^n$, где L/k — конечное расширение Галуа, n — размерность тора, т.е., алгебраический тор T — это k -форма группы $G_{m,L}^n$, которую можно реализовать как подгруппу диагональных матриц $D(n)$ в $GL(N, k)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.

Поле L называется *полем разложения* тора. Пересечение всех полей разложения называется *минимальным полем разложения* тора T . Всюду в дальнейшем L — это минимальное поле разложения тора T .

Пусть T — алгебраический тор. Рассмотрим мультипликативную абелеву группу $\hat{T} = \mathrm{Hom}_L(G_{m,L}^d, G_{m,L})$ его рациональных характеров. Известно [2], что группа $\hat{T}$ — свободная абелева группа конечного $\mathbb{Z}$ -ранга, равного размерности тора T , на которой точно действует группа Галуа $\Pi = \mathrm{Gal}(L/k)$.

Перейдем к описанию вялой резольвенты тора T . Для любого тора T можно рассмотреть регулярное вложение тора $T \otimes_k L$ в гладкое проективное многообразие: $T_L \subset X_L$, где T_L — открытое подмножество той же размерности, что и X_L . Многообразие X_L называется гладкой *проективной моделью* тора T .

Это вложение индуцирует следующую точную последовательность

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{S} \rightarrow \mathrm{Pic} X_L \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где $\hat{T}$ — модуль рациональных характеров тора T , $\hat{S} = \mathbb{Z}[D_i]$ — пермутационный Π -модуль, порожденный простыми дивизорами на дополнении $X_L \setminus T_L$.

Эта последовательность называется *канонической резольвентой*. Она была введена и изучена В.Е. Воскресенским [2].

Отметим, что Π -модуль $\mathrm{Pic} X_L$ обладает следующим свойством

$$H^{-1}(\pi, \mathrm{Pic} X_L) = 0 : \forall \pi < \Pi.$$

Такой модуль называется *вялым*. Заметим, что многообразие X определяется не однозначно. Если Y — другая проективная модель тора T , то из

теории Хиронаки следует, что $\text{Pic } X_L \sim \text{Pic } Y_L$. Т.е. модуль $\text{Pic } X_L$ определяется с точностью до определенной эквивалентности Π -модулей, называемой подобием. Напомним определение подобия Π -модулей.

Определение 2: Модули A и B называются *подобными*, если существуют пермутационные модули S_1 и S_2 такие, что имеет место изоморфизм Π -модулей

$$A \oplus S_1 \cong B \oplus S_2$$

(Обозначение: $A \sim B$).

Класс подобия $p(T) = [\text{Pic } X_L]$ является основным бирациональным инвариантом алгебраического тора T и однозначно определяется Π -модулем $\hat{T}$ рациональных характеров тора T .

Известно [2], что если

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{S} \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0$$

каким-либо образом построенная точная последовательность, обладающая тем свойством, что $\hat{S}$ — пермутационный модуль, а $\hat{N}$ — вялый, то $[\text{Pic } X_L] = [\hat{N}]$. Таким образом, мы можем построить вялую резольвенту для тора T любым удобным для нас способом.

Кроме основного бирационального инварианта $p(T)$, для алгебраического тора T существует серия производных бирациональных инвариантов. Один из них — это группа одномерных когомологий $H^1(\pi, \hat{N}) : \pi < \Pi$. Здесь $[\hat{N}] = [\text{Pic } X_L]$. В частности, нетривиальность этого инварианта влечет нерациональность соответствующего тора.

Напомним, что $H^1(\pi, A) = Z^1(\pi, A)/D^1(\pi, A) : \pi < \Pi$ — фактор-группа скрещенных гомоморфизмов $Z^1(\pi, A)$ (1-коциклов) по подгруппе главных скрещенных гомоморфизмов $D^1(\pi, A)$. Скрещенный гомоморфизм — это отображение $\varphi : \Pi \rightarrow A$, удовлетворяющее соотношению $\varphi(g_1 g_2) = g_1 \varphi(g_2) + \varphi(g_1)$, $D^1(\Pi, A) = \{\varphi : \Pi \rightarrow A : \exists a \in A : \varphi(g) = ga - a\}$ — подгруппа главных скрещенных гомоморфизмов, A — Π -модуль.

Как было отмечено выше, класс подобия Π -модуля $[\hat{N}]$ однозначно определяется Π -модулем $\hat{T} = \text{Hom}(G_{m,L}^d, G_{m,L})$, т.е. не зависит от способа построения вялой резольвенты. Таким образом, мы можем построить резольвенту удобным для нас способом. Возникает вопрос о способах построения канонической последовательности. Имеется по крайней мере два подхода к ее построению: первый основан на теории целочисленных моделей Демазюра [2], а второй использует рассмотрение двойственного модуля и его пермутационного накрытия. Подробно этот способ описан в [2]. Имеется много работ, посвященных построению вялых резольвент как для конкретных торов, так и для некоторых серий алгебраических торов [2], [5], [7], [9]. Трудоемкость вычислений возрастает при переходе к следующей размерности. Так для двумерных торов можно обойтись рассмотрением представителей $[\text{Pic } X_L]$ рангов до шести включительно, трехмерные торы дают примеры вялых модулей ранга 15, наконец, некоторые частные вычисления для торов

размерности 4 приводят к рассмотрению вялых модулей ранга 44. Цель нашей работы — вычисление кохомологических бирациональных инвариантов. С одной стороны, они — это производные основного бирационального инварианта, а с другой — они полностью определяются модулем рациональных характеров $\hat{T}$, а значит, могут быть вычислены, минуя построение вялой резольвенты. В следующем параграфе нашей работы мы опишем, как это можно сделать.

2. Теорема А.А. Клячко и классификация модулей четверной группы Л.А. Назаровой

Пусть T — алгебраический тор над полем k ,

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{S} \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0$$

— вялая резольвента для тора T . Здесь $\hat{T}$ — модуль рациональных характеров тора T , $\hat{S}$ — пермутационный модуль, а $\hat{N}$ — вялый, причем $[\text{Pic} X_L] = [\hat{N}]$.

Кроме основного бирационального инварианта $p(T) = [\text{Pic} X_L]$, для алгебраического тора T существует серия производных бирациональных инвариантов. Один из них — это группа одномерных кохомологий $H^1(\pi, \hat{N}) : \pi < \Pi$. Здесь $[\hat{N}] = [\text{Pic} X_L]$. В частности, нетривиальность этого инварианта влечет нерациональность соответствующего тора.

Известно, что если группа разложения тора — циклическая группа, то группа одномерных кохомологий $H^1(<g>, \text{Pic} X_L)$ тривиальна. Так же все торы размерности 1, 2 рациональны [2], т.е. считать кохомологический инвариант в этом случае тоже не имеет смысла. Согласно результатам Шевалле [7], [9] первые случаи нетривиальности групп одномерных кохомологий — это случаи торов размерности 3 с биквадратичным полем разложения. Группа Галуа в этом случае — это четверная группа Клейна $\Pi = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Поэтому естественно было ограничить внимание именно на модулях четверной группы. В этом параграфе мы опишем метод вычисления кохомологических инвариантов, используя действие группы Π на самом модуле рациональных характеров $\hat{T}$, который имеет маленький ранг, а не на вялом модуле $\hat{N}$. Правда, для этого нам придется рассмотреть двумерные кохомологии. В основе метода лежит теорема А.А. Клячко (1992) [3]:

Теорема 2.1:

$$H^1(\pi, \hat{N}) = \text{Ker} \left(H^2(\Pi, \hat{T}) \rightarrow \prod_{g \in \Pi} H^2(<g>, \hat{T}) \right). \quad (2.1)$$

И.В. Кулагина [8] развила эту идею в случае $\Pi = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и получила следующую явную формулу:

Теорема 2.2:

$$H^1(\pi, \hat{N}) = \frac{\text{Ker}((a+e)(b+e))}{\text{Ker}(a+e) + \text{Ker}(b+e) + \text{Ker}(c+e)}, \quad (2.2)$$

здесь a и b — образующие четверной группы, рассматриваемые как операторы из $\mathbb{Z}[\Pi]$, действующие на модуле рациональных характеров $\hat{T}$ тора T . В этой формуле $c = ab$, а $\text{Ker}(x + e) = \{t \in \hat{T} : xt = -t\}$, где $x \in \Pi$.

Итак, чтобы посчитать группу одномерных кохомологий $H^1(\pi, \hat{N}) : \pi < \Pi$ для вялого модуля $\hat{N}$, достаточно применить формулу (2.2). Однако, следует иметь в виду, что все вычисления (нахождение ядра оператора, суммы решеток $\text{Ker}(a+e) + \text{Ker}(b+e) + \text{Ker}(c+e)$ и, наконец, фактор-группы) проводятся над кольцом $\mathbb{Z}$. Существуют стандартные алгоритмы, описанные в книге [6], позволяющие это сделать. Применение этих алгоритмов значительно упрощает вычисления, так как они легко реализуются на компьютере. Для удобства читателя опишем кратко, как это можно сделать. Пусть у нас есть целочисленное матричное представление группы Π , т.е. гомоморфизм $\varphi : \Pi \rightarrow GL(n, \mathbb{Z})$. По аналогии со случаем векторных пространств, если мы рассматриваем матрицу из $GL(n, \mathbb{Z})$, то ее можно привести к эрмитовой нормальной форме (HNF-форме) [6]. Напомним определение эрмитовой нормальной формы матрицы [6].

Определение 2: Мы говорим, что матрица $M = (m_{i,j})$ с целыми коэффициентами приведена к эрмитовой нормальной форме (HNF - форме), если существуют $r \leq n$ и строго возрастающее отображение $f : [r+1, n] \rightarrow [1, m]$, удовлетворяющие следующим условиям:

- Для $r+1 \leq j \leq n$, $m_{f(j),j} = 0$, если $i > f(j)$ и $0 \leq m_{f(k),j} < m_{f(k),k}$, если $k < j$.
- Первые r столбцов матрицы M нулевые.

Причем известно, если матрица $A \in GL(n, \mathbb{Z})$ такова, что ее столбцы — это набор образующих подмодуля L в $\mathbb{Z}^m$, то ее HNF-форма дает целочисленный базис L . Имеет место следующая

Теорема 2.3: Пусть матрица $A \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{Z})$. Тогда существует единственная матрица $B \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{Z})$, такая, что $B = AU$, где матрица $U \in GL(n, \mathbb{Z})$, матрица B имеет HNF-форму.

Таким образом, чтобы найти $\text{Ker}(a+e) + \text{Ker}(b+e) + \text{Ker}(c+e)$ мы строим матрицу, столбцами которой являются базисы решеток $\text{Ker}(a+e)$, $\text{Ker}(b+e)$, $\text{Ker}(ab+e)$ соответственно и приводим ее к HNF-форме. Тогда ненулевые столбцы полученной матрицы образуют базис суммы решеток. Реализация этого алгоритма описана в книге [6]: алгоритм 2.4.5 (Hermite Normal Form).

Целочисленный базис ядра $\text{Ker}(x+e)$, $x \in \mathbb{Z}[\Pi]$, в свою очередь, находим, используя следующее

Предложение 2.1: Пусть матрица $A \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{Z})$, $B = AU$ и пусть первые r столбцов матрицы B равны 0. Тогда первые r столбцов матрицы U дают $\mathbb{Z}$ -базис ядра A , где A — матрица оператора σ .

Реализация этого алгоритма описана в книге [6]: алгоритм 2.4.10 (Kernel over $\mathbb{Z}$).

Наконец, осталось найти фактор - группу L'/L , где $L' = \text{Ker}(a + e) + \text{Ker}(b + e) + \text{Ker}(c + e)$. Это можно сделать, используя приведение матрицы к нормальной форме Смита [6], (SNF-форме), т.е. форме следующего вида $\{diag(d_1, d_2, \dots, d_n), d_{i+1}|d_i, 1 \leq i < n\}$, $n = rank L'$. Числа d_i , стоящие на диагонали, соответствуют порядкам циклических групп в каноническом разложении $L'/L \cong \bigoplus_{1 \leq i < n} (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})$.

Реализация этого алгоритма описана в книге [6]: алгоритм 2.4.14 (Smith Normal Form).

Итак, алгоритм вычисления 1-когомологий для групп типа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ таков:

- 1) вычисляем базисы $\text{Ker}(a + e)$, $\text{Ker}(b + e)$, $\text{Ker}(ab + e)$,
- 2) находим сумму $\text{Ker}(a + e) + \text{Ker}(b + e) + \text{Ker}(c + e)$,
- 3) находим $\text{Ker}(a + e)(b + e)$,
- 4) вычисляем $H^1(\Pi, \hat{N})$, используя теорему 2.2.

Используя формулу (2.2), были вычислены кохомологические инварианты для неразложимых модулей четверной группы ранга 4 - 8, минуя построение вялой резольвенты. Была написана программа в среде программирования Delphi, реализующая этот алгоритм. Неразложимые модули четверной группы были получены, следуя классификации Л.А.Назаровой [4].

Известно, что если группа Π содержит нециклическую силовскую подгруппу, то имеется бесконечно много неизоморфных неразложимых целочисленных представлений группы Π . В работе [4] описываются все неразложимые представления в случае $\Pi = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, т.е. указаны целочисленные унимодулярные матрицы A и B , такие, что $A^2 = B^2 = E$, $AB = BA$.

Опишем кратко метод построения неразложимых представлений, следуя методу, описанному в [4]. Можно выбрать базис решетки $\hat{T}$ таким образом, что матрицы A и B будут иметь вид:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & & & 0 & & & 0 & & & A_{14} \\ \hline 0 & & & -E & & & A_{23} & & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 & & & E & & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 & & & 0 & & & -E \end{array} \right),$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} E & & & 0 & & & -B_{13} & & & 0 \\ \hline 0 & & & -E & & & 0 & & & B_{24} \\ \hline 0 & & & 0 & & & -E & & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 & & & 0 & & & E \end{array} \right),$$

здесь E — единичная матрица.

Введем в рассмотрение матрицу следующего вида: $D = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & D_4 \\ \hline D_2 & D_3 \end{array} \right)$, где D_1, D_2, D_3, D_4 получены соответственно из $B_{13}, A_{23}, B_{24}, A_{14}$ редукцией по модулю 2. Т.е. рассматриваем матрицу D как матрицу над полем $\mathbb{F}_2$.

Оказывается, что если два представления A, B и A', B' имеют одинаковое разложение на блоки вида $\pm E$ и $D = D'$, то они эквивалентны и преобразование подобия осуществляет матрица вида $C = \left(\begin{array}{c|c} E & C_{12} \\ \hline 0 & E \end{array} \right)$ и, обратно, если два представления эквивалентны с преобразующей матрицей такого вида, то они имеют равные D . Т.е. можно поставить в соответствие Π -модулю $\hat{T}$ матрицу D .

Введем следующие обозначения. Пусть m — сумма количеств строк и столбцов матрицы D . Назовем ее длиной матрицы. Будем обозначать через $C^m(E_{ij}^\alpha, E_{kl}^\beta)$, $i, j, k, l = \{1, 2\}$, $\alpha, \beta = \{1, \dots, 5\}$ матрицу длины m , у которой на месте i, j стоит матрица E^α , на месте k, l — матрица E^β . Матрица E^α имеет один из следующих видов:

$$E^1 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ - \\ E \end{array} \right), \quad E^2 = \left(\begin{array}{c} E \\ - \\ 0 \end{array} \right), \quad E^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E \end{array} \right),$$

$$E^4 = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \end{array} \right), \quad E^5 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right).$$

Матрицы вида $C^m(E_{ij}^\alpha, E_{kl}^\beta)$ называются цепочками. Существуют следующие типы неразложимых неизоморфных цепочек такого вида [4]:

$$\begin{aligned} m = 4n + 1 : & C^m(E_{11}^3, E_{21}^4), C^m(E_{12}^3, E_{22}^4), C^m(E_{11}^1, E_{12}^2), C^m(E_{21}^1, E_{22}^2), \\ m = 4n + 2 : & C^m(E_{11}^3, E_{22}^2), C^m(E_{12}^3, E_{21}^2), C^m(E_{11}^1, E_{12}^2), C^m(E_{21}^1, E_{12}^4), \\ m = 4n + 3 : & C^m(E_{11}^3, E_{12}^4), C^m(E_{22}^3, E_{21}^4), C^m(E_{12}^1, E_{22}^2), C^m(E_{21}^1, E_{11}^2), \\ m = 4n : & C^m(E_{11}^5), C^m(E_{12}^5), C^m(E_{21}^5), C^m(E_{22}^5). \end{aligned}$$

Наконец, в работе [4] показано, что для получения полной классификации неразложимых $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -модулей достаточно рассматривать матрицу D одного из следующих видов: это либо цепочка вида $C^m(E_{ij}^\alpha, E_{kl}^\beta)$, т.е. на соответствующем месте в матрице D стоит одна из матриц вида E^α .

$$\text{Либо } D = \Phi(f(t)) = \left(\begin{array}{c|c} E & E \\ \hline D' & E \end{array} \right), \text{ где } D' \text{ имеет нормальную форму Фробениуса,}$$

причем ее характеристический полином $f(t)$ неприводим над полем $\mathbb{F}_2$ или есть степень неприводимого.

3. Проблема рациональности для максимальных алгебраических торов исключительных групп

Одной из важнейших подзадач проблемы рациональности алгебраических торов является задача о рациональности максимальных алгебраических торов в односвязных полупростых группах. Случай, когда Π определяется классическими системами корней были изучены В.Е. Воскресенским совместно с Б.Э. Кунявским [2]. Остаются неизученными исключительные группы. Случай G_2 — это случай двумерного максимального тора, а значит, случай рационального тора. Таким образом, нужно рассмотреть $R = \{F_4, E_6, E_7, E_8\}$. Случаю F_4 посвящены работы С.Ю. Попова [5], И.В. Кулагиной [8]. В частности, Кулагина доказала [8], что кохомологические бирациональные инварианты для $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -модуля $\hat{T}_4$ нулевые. (Здесь $\hat{T}_4$ — решетка корней типа F_4 .) Все изучаемые торы имеют размерность, не превосходящую восемь, следовательно $\mathrm{rk} \hat{T} \leq 8$. Как известно, любой модуль есть прямая сумма неразложимых модулей. Классификация Назаровой позволяет нам описать все возможные прямые слагаемые соответствующих модулей и вычислить их кохомологические бирациональные инварианты. Используя классификацию Л.А. Назаровой неразложимых $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -модулей и формулу (2.2), были посчитаны кохомологические инварианты для торов T с биквадратичным полем разложения в случае, когда $\dim T \leq 8$.

Теорема 3.1: Пусть $\hat{T}$ — неразложимый $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -модуль, $\mathrm{rk} \hat{T} \leq 8$. Тогда

- 1) Если $\hat{T} \in \{C^5(E_{11}^4, E_{21}^4), C^6(E_{11}^3, E_{22}^2), C^6(E_{12}^3, E_{21}^2), C^6(E_{21}^1, E_{12}^4), C^6(E_{11}^4, E_{22}^1), C^7(E_{11}^3, E_{21}^4), C^8(E_{11}^5), C^8(E_{12}^5)\}$, то $H^1(\pi, \hat{T}) = \mathbb{Z}_2$,
- 2) Если $\hat{T} \in \{C^8(E_{21}^5), C^8(E_{22}^5), \Phi(f(t)) \mid f(t) = t^2 + t + 1\}$, то $H^1(\pi, \hat{T}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$,
- 3) Для остальных случаев $H^1(\pi, \hat{T}) = 0$.

Мы использовали стандартные обозначения для соответствующего типа решетки, введенные Л.А. Назаровой [4]. Таким образом, среди неразложимых модулей ранга 6, 8 были найдены модули, обладающие кохомологически нетривиальным втятым модулем. Заметим, что в случае модулей ранга 8 появляются первые примеры модулей, одномерные кохомологии которых есть сама четверная группа, а не циклическая группа второго порядка, как было в предыдущих случаях. Но зачастую мы имеем Π -модуль и заранее не знаем его разложение в прямую сумму неразложимых Π -модулей. В частности, с такой ситуацией мы сталкиваемся, когда рассматриваем максимальные торы в односвязных полупростых группах G и изучаем их рациональность. Мы изучим максимальный тор в исключительной группе с системой корней $R = E_8$ и докажем его нерациональность.

Напомним основные факты из теории максимальных алгебраических торов в односвязных полупростых группах. Пусть G — связная полупростая группа, определенная над полем k . $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. R — система корней

в $\mathfrak{g}$. Множество R всех корней конечно, пусть $Q(R)$ — подгруппа в $\hat{T}$, порожденная всеми корнями, $Q(R)$ является решеткой в $\hat{T}$, поэтому $Q(R)$ имеет конечный индекс в $\hat{T}$. Обозначим $P(R)$ решетку весов системы R . Имеет место включение : $Q(R) \subset \hat{T} \subset P(R)$. Вернемся к нашей задаче.

Пусть G — связная полупростая группа, определенная над полем k , с системой корней $R = R(G)$, $T \subset G$ — максимальный тор без аффекта, т.е. $\hat{T} = P(R) = Q(R)$, $\Pi = W(R) = A(R)$, Π — группа Галуа минимального поля разложения L тора T . Все приведенные системы корней классифицированы в [1]. Нас интересует система корней типа E_8 . Выберем в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^8$ стандартный ортонормированный базис $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 8}$. Тогда система корней R содержит векторы следующего вида:

$$\pm e_i \pm e_j, \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{\nu(i)} e_i \quad \text{с четной суммой} \quad \sum_{i=1}^8 \nu(i).$$

Известно [1], что имеется 120 положительных корней.

Базис системы корней имеет следующий вид:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7), \quad \alpha_2 = e_1 + e_2, \quad \alpha_3 = e_2 - e_1, \quad \alpha_4 = e_3 - e_2, \\ \alpha_5 = e_4 - e_3, \quad \alpha_6 = e_5 - e_4, \quad \alpha_7 = e_6 - e_5, \quad \alpha_8 = e_7 - e_6.$$

Группа Вейля $W(R)$ системы корней типа E_8 имеет порядок $2^{14}3^55^27$. Задача состояла в том, чтобы попытаться найти в группе Вейля подгруппу типа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ с нетривиальным кохомологическим инвариантом. Вычисления производились, используя компьютер. А именно: производился поиск коммутирующих инволюций в группе Вейля типа E_8 и к ним применялась формула (2.2) из §2.

Опишем алгоритм поиска коммутирующих инволюций. Пусть σ_α — отражение относительно гиперплоскости, ортогональной к корню α . Ясно, что любая инволюция может быть записана в виде $\omega = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \cdots \sigma_{\alpha_k}$, причем $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $i \neq j$. Если $\omega_1 = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \cdots \sigma_{\alpha_k}$, $\omega_2 = \sigma_{\beta_1} \sigma_{\beta_2} \cdots \sigma_{\beta_r}$ — две инволюции, то $\omega_1 \omega_2 = \omega_2 \omega_1 \Leftrightarrow (\alpha_i, \beta_j) = 0$. Поэтому был произведен поиск коммутирующих инволюций пока не обнаружился модуль с нетривиальным кохомологическим инвариантом. Таким является, например следующий модуль:

$$\hat{T} = \langle a, b \rangle, \quad a = \sigma_1 \sigma_{14} \sigma_{23}, \quad b = \sigma_1 \sigma_{14} \sigma_{28},$$

$$H^1(\pi, \hat{N}) = \mathbb{Z}_2.$$

Здесь $\alpha_1 = e_1 + e_2$, $\alpha_{14} = e_3 + e_4$, $\alpha_{23} = e_5 + e_6$, $\alpha_{28} = e_7 + e_8$.

Таким образом, доказана

Теорема 3.2: Максимальный тор исключительной полупростой группы, определяемой системой корней R типа E_8 не является рациональным.

Литература

- [1] Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней / Н. Бурбаки. М.: Мир, 1972. – 334 с.
- [2] Воскресенский, В.Е. Алгебраические торы / В.Е. Воскресенский. М.: Наука, 1977. – 224 с.
- [3] Клячко, А.А. Прямые слагаемые перестановочных модулей и бирациональная геометрия / А.А. Клячко // Арифметика и геометрия многообразий. – Самара, 1992. – С. 78–92.
- [4] Назарова, Л.А. Представления четвериады / Л.А. Назарова // Известия АН СССР, серия математическая. – 1967. – №31. – С. 1361–1378.
- [5] Попов, С.Ю. Решетки Галуа и их бирациональные инварианты / С.Ю. Попов // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 1998. – №4(10). – С. 71–83.
- [6] Cohen, Н. // A Course in Computational Algebraic Number Theory / Н. Cohen Berlin: Springer, 1996. – 563 pp.
- [7] Кунявский, Б.Э. О трехмерных алгебраических торах / Б.Э. Кунявский // Исследования по теории чисел. Саратов: Изд-во ун-та, 1987. – С. 90–111.
- [8] Кулагина, И.В. Бирациональные инварианты модулей четверной группы / И.В. Кулагина // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2005. – №5(39). – С. 71–78.
- [9] Kunyavskii, В. Algebraic tori – thirty years after / В. Kunyavskii // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №7(57). – Р. 198–214.

Поступила в редакцию 20/VI/2008;
в окончательном варианте — 20/VI/2008.

THE KLEIN FOUR-GROUP MODULES AND THEIR COHOMOLOGICAL INVARIANTS ³

© 2008 L.A. Belova⁴

The paper is dedicated to calculation induced birational invariants of algebraic torus T so called *cohomological invariants* $\{H^1(\pi, \text{Pic } X_L)\}_{\pi < \Pi}$. Here X_L is a smooth projective model of T , π is Klein four-group. We use the result of A.A. Klyachko which allows to calculate these invariants without calculation of $\text{Pic } X_L$ in terms of the group H^2 . The structure of the module $\hat{T}$ of rational characters of T only is used. The cohomological birational invariants of algebraic tori with biquadratic splitting field of $\dim \hat{T} \leq 8$ and find all tori which have nontrivial cohomological birational invariant is calculated. Also, a maximal torus T of the connected semisimple group of type E_8 is studied. The four-subgroups of the Weil's group $\Pi = W(E_8)$ which have nontrivial cohomological invariant $\{H^1(\pi, \text{Pic } X_L)\}_{\pi < \Pi}$ are found. Therefore the maximal torus T of the connected semisimple group of type E_8 is nonrational.

Keywords and phrases: *torus with biquadratic splitting field, nonrational maximal torus in $W(E_8)$.*

Paper received 20/VI/2008.

Paper accepted 20/VI/2008.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

⁴Belova Lubov Alexandrovna (lubelova@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.