УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

© 2008 Н.В. Бейлина[2]

В работе рассматривается обратная задача для волнового уравнения с неизвестной функцией, входящей в граничное условие. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Для доказательства существования обобщенного решения была построена, с помощью метода Галеркина, последовательность приближенных решений, а затем, с помощью полученной априорной оценки, доказана сильная сходимость построенной последовательности к искомому решению. Доказательство единственности обобщенного решения базируется на полученной априорной оценке.

Ключевые слова: *интегральное условие переопределения, нелокальная задача, обратная задача.*

Введение

К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения. В большинстве работ, посвященных исследованиям в этой области, изучались обратные задачи для уравнений параболического типа. Среди них работы таких авторов, как Кэннона [1, 2], А.И. Прилепко и А.Б. Костина [11, 12], А.И. Прилепко и Д.С. Ткаченко [13, 14], А.И. Кожанова [8], В.Л. Камынина [6, 7], Н.И. Иванчова [4, 5]. В предлагаемой работе рассмотрена обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^2$. Рассмотрим в цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$, $T < \infty$, с боковой поверхностью $S =$

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С.Пулькиной.

[2]Бейлина Наталья Викторовна (natalie@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$= \partial\Omega\times(0,T)$ следующую обратную задачу: найти пару функций $(u(x,t), p(t))$, удовлетворяющих уравнению

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + c(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.2}$$

граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = p(t)h(x,t) \tag{1.3}$$

и интегральному условию переопределения

$$\int\limits_\Omega K(x)u(x,t)dx = E(t). \tag{1.4}$$

Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $K(x)$ заданы в $\bar\Omega$, $h(x,t)$, $c(x,t)$ — в $\bar Q$, $E(t)$ задана на $[0,T]$.

2. Разрешимость поставленной задачи

Теорема: Если $K(x) \in C^2(\bar\Omega)$, $E(t) \in C^3[0,T]$, $c(x,t) \in C^1(\bar Q)$, $\left.\dfrac{\partial K(x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} =$ $= 0$, $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\psi(x) \in L_2(\Omega)$, $h(x,t) \in C^1(\bar Q)$, $\int\limits_{\partial\Omega} h(x,t)K(x)ds \neq 0$, то существует единственное обобщенное решение из пространства W_2^1 задачи (1.1)–(1.4).

Прежде всего уточним, что понимается под обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4). Заметим, что условие (1.4) эквивалентно следующему условию:

$$p(t) = \left(\int\limits_{\partial\Omega} h(x,t)K(x)ds\right)^{-1} \left[E''(t) - \int\limits_\Omega \Delta K(x)u(x,t)dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_\Omega K(x)c(x,t)u(x,t)dx - \int\limits_\Omega K(x)f(x,t)dx\right]. \tag{2.1}$$

Действительно, дифференцируя (1.4) дважды по t и учитывая, что $u(x,t)$ удовлетворяет (1.1), получим (2.1). Обратное показывается прямым вычислением.

Обозначим

$$\hat W_2^1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1(Q), v(x,T) = 0\}.$$

Умножим уравнение (1.1) на функцию $v(x,t) \in \hat W_2^1(Q)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. После интегрирования по частям получим

$$\int_0^T \int_\Omega [\nabla u(x,t) \nabla v(x,t) - u_t(x,t) v_t(x,t) + c(x,t) u(x,t) v(x,t)]\, dxdt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f(x,t) v(x,t) dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} p(t) h(x,t) v(x,t) dsdt + \int_\Omega \psi(x) v(x,0) dx. \tag{2.2}$$

Определение: Пару функций $(u(x,t), p(t))$ будем называть обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4), если $u(x,t) \in W_2^1(Q)$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $p(t) \in W_2^1(0,T)$, $p(0) = 0$ и $(u(x,t), p(t))$ удовлетворяет (2.1) (в смысле равенства функций в L_2) и тождеству (2.2) для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q)$.

Доказательство: Доказательство сформулированной теоремы разобьем на несколько этапов.

1) Построим последовательность приближенных решений;

2) Покажем, что последовательность имеет предел;

3) Покажем, что найденный предел и есть искомое обобщенное решение.

Не ограничивая общности будем считать, что $\varphi(x) = 0$. Это предположение избавит от излишней громоздкости вычислений.

Будем искать приближенное решение $(u^m(x,t), p^m(t))$ из следующих соотношений

$$\int_0^T \int_\Omega [\nabla u^m(x,t) \nabla v(x,t) - u_t^m(x,t) v_t(x,t) + c(x,t) u^m(x,t) v(x,t)]\, dxdt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f(x,t) v(x,t) dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} p^m(t) h(x,t) v(x,t) dsdt + \int_\Omega \psi(x) v(x,0) dx. \tag{2.3}$$

$$u^m(x,0) = 0. \tag{2.4}$$

$$p^m(t) = \left(\int_{\partial\Omega} h(x,t) K(x) ds \right)^{-1} \left[E''(t) - \int_\Omega \Delta K(x) u^{m-1}(x,t) dx + \right. \\ \left. + \int_\Omega K(x) c(x,t) u^{m-1}(x,t) dx - \int_\Omega K(x) f(x,t) dx \right]. \tag{2.5}$$

$$p^m(0) = 0.$$

Прежде всего заметим, что для каждого m существует единственная функция $u^m(x,t)$, удовлетворяющая тождеству (2.3) и условию (2.4), если $p^m(t)$ известно.

Действительно, тождество (2.3) и равенство (2.4) определяют обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ второй начально–краевой задачи с неоднородными условиями:

$$u_{tt}^m(x,t) - \Delta u^m(x,t) + c(x,t)u^m(x,t) = f(x,t), \tag{2.6}$$

$$u^m(x,0) = 0, \quad u_t^m(x,0) = \psi(x), \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial u^m}{\partial n}\right|_S = H(x,t), \qquad H(x,t) = p^m(t)h(x,t). \tag{2.8}$$

Доказательство разрешимости этой задачи было проведено стандартным методом. Для доказательства единственности обобщенного решения из $W_2^1(Q)$ в тождестве (2.3) с $f(x,t) = 0$, $H(x,t) = 0$, $\psi(x) = 0$ полагается

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau \tilde{u}^m(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t < \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

что позволяет получить неравенство

$$\int\limits_\Omega (\tilde{u}^m(x,\tau))^2\, dx \leqslant 0,$$

из которого и вытекает единственность решения.

Для доказательства существования обобщенного решения поставленной задачи применим метод Галеркина. Пусть $\{w_k(x)\}$ — фундаментальная система в $W_2^1(\Omega)$, причем $(w_k(x), w_l(x))_{L_2(\Omega)} = \delta_{kl}$.

Приближенное решение будем искать в виде

$$u^{m,N}(x,t) = \sum_{k=1}^N d_k(t)w_k(x), \tag{2.9}$$

где $d_k(t)$ подлежат определению, из соотношений

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega \left[u_{tt}^{m,N}(x,t)w_l(x) + \nabla u^{m,N}(x,t)\nabla w_l(x) + c(x,t)u^{m,N}(x,t)w_l(x)\right] dx = \\ = \int\limits_\Omega f(x,t)w_l(x)dx + \int\limits_{\partial\Omega} H(x,t)w_l(x,t)ds, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$d_k(0) = 0, \quad d_k'(0) = \beta_k,$$

где $\beta_k = (\psi, w_k)_{L_2(\Omega)}$.

Подставляя (2.9) в (2.10) и меняя порядок суммирования и интегрирования приходим к выражению:

$$\sum_{k=1}^N \left[d''{}_k(t)\int\limits_\Omega w_k(x)w_l(x)dx + d_k(t)\int\limits_\Omega \nabla w_k(x)\nabla w_l(x)dx + \right.$$

$$\left. + d_k(t)\int\limits_\Omega c(x,t)w_k(x)w_l(x)dx\right] = \int\limits_\Omega f(x,t)w_l(x)dx + \int\limits_{\partial\Omega} H(x,t)w_l(x,t)ds.$$

Обозначим

$$\tilde{f}_l(t) = \int\limits_{\Omega} f(x,t)w_l(x)dx + \int\limits_{\partial\Omega} H(x,t)w_l(x,t)ds;$$

$$\gamma_{kl}(t) = (\nabla w_k(x), \nabla w_l(x))_{L_2(\Omega)} + (c(x,t)w_k(x), w_l(x))_{L_2(\Omega)},$$

получим

$$d''_l(t) + \sum_{k=1}^{N} d_k(t)\gamma_{kl}(t) = \tilde{f}_l(t), \tag{2.11}$$

$$d_l(0) = 0, \quad d'_l(0) = \beta_l.$$

Заметим, что (2.11) представляет собой задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $d_k(t)$, которая однозначно разрешима и $d_k(t) \in C^2[0,T]$ [10].

Таким образом, для любого натурального N существует единственная функция $u^{m,N}(x,t)$ вида (2.9), удовлетворяющая тождеству (2.10), то есть построена последовательность $\{u^{m,N}(x,t)\}$. Исследуем сходимость этой последовательности. Для этого умножим (2.10) на $d'_k(t)$ и просуммируем по l от 1 до N, а затем проинтегрируем по t от 0 до τ. После преобразований получим

$$\int\limits_{\Omega} \left[\left(u_t^{m,N}(x,\tau)\right)^2 + \left(\nabla u^{m,N}(x,\tau)\right)^2 \right] dx = 2\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} f(x,t)u_t^{m,N}(x,t)dxdt -$$
$$-2\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega} c(x,t)u^{m,N}(x,t)u_t^{m,N}(x,t)dxdt + 2\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\partial\Omega} H(x,t)u_t^{m,N}(x,t)dsdt +$$
$$+\int\limits_{\Omega} \left[\left(u_t^{m,N}(x,0)\right)^2 + \left(\nabla u^{m,N}(x,0)\right)^2 \right] dx.$$

Применяя к первым двум слагаемым в правой части элементарное неравенство $2ab \leqslant a^2 + b^2$, третье слагаемое интегрируя по частям, а затем оценивая интегралы по границе с помощью неравенства [7]

$$\int\limits_{\partial\Omega} v^2(x,t)ds \leqslant \int\limits_{\Omega} \left(\epsilon|\nabla v|^2 + c(\epsilon)v^2\right) dx, \tag{2.12}$$

получим следующую цепочку неравенств:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega}\left[\left(u_t^{m,N}(x,\tau)\right)^2+\left(\nabla u^{m,N}(x,\tau)\right)^2\right]dx \leqslant \\
\leqslant \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f^2(x,t)dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left(u_t^{m,N}(x,t)\right)^2dxdt+ \\
+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega c^2(x,t)\left(u^{m,N}(x,t)\right)^2dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left(u_t^{m,N}(x,t)\right)^2dxdt+ \\
+\int\limits_{\partial\Omega}H^2(x,\tau)ds+\int\limits_\Omega\left[\varepsilon\left|\nabla u^{m,N}(x,\tau)\right|^2+c(\varepsilon)\left(u^{m,N}(x,\tau)\right)^2\right]dx+ \\
+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left[\mu\left|\nabla u^{m,N}(x,t)\right|^2+c(\mu)\left(u^{m,N}(x,t)\right)^2\right]dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}H_t^2(x,t)dsdt+ \\
+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left[\left(u_t^{m,N}(x,0)\right)^2+\left(\nabla u^{m,N}(x,0)\right)^2\right]dx.
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

Заметим, что

$$
u^{m,N}(x,\tau)=\int\limits_0^\tau u_t^{m,N}(x,t)dt,
$$

откуда нетрудно получить неравенство

$$
\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left(u^{m,N}(x,t)\right)^2dxdt \leqslant 2T^2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left(u_t^{m,N}(x,t)\right)^2dxdt. \tag{2.14}
$$

Учитывая (2.14), и полагая в (2.13) $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left[\left(u_t^{m,N}(x,\tau)\right)^2+\left|\nabla u^{m,N}(x,\tau)\right|^2\right]dx \leqslant \\
\leqslant M\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left[\left(u_t^{m,N}(x,t)\right)^2+\left|\nabla u^{m,N}(x,t)\right|^2\right]dxdt+ \\
+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f^2(x,t)dxdt+\int\limits_{\partial\Omega}H^2(x,\tau)ds+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}H_t^2(x,t)dsdt+\int\limits_\Omega\left(u_t^{m,N}(x,0)\right)^2dx.
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

Применяя к (2.15), неравенство Гроноулла [3], а затем интегрируя по τ от

0 до T приходим к следующей оценке:

$$\int_0^\tau\int_\Omega\left[\left(u_t^{m,N}(x,t)\right)^2+\left|\nabla u^{m,N}(x,t)\right|^2\right]dxdt\leqslant \\ \leqslant e^{2MT}T\left[\|f\|^2_{L_2(Q)}+\|H)\|^2_{L_2(S)}+T\|H_t\|^2_{L_2(S)}+\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}\right]. \tag{2.16}$$

Заметим, что с помощью (2.14) нетрудно получить неравенство

$$\int_0^\tau\int_\Omega\left[\left(u_t^{m,N}(x,t)\right)^2+\left|\nabla u^{m,N}(x,t)\right|^2+\left(u^{m,N}(x,t)\right)^2\right]dxdt\leqslant \\ \leqslant(1+2T^2)\int_0^\tau\int_\Omega\left[\left(u_t^{m,N}(x,t)\right)^2+\left|\nabla u^{m,N}(x,t)\right|^2\right]dxdt. \tag{2.17}$$

Тогда из (2.16) и (2.17) следует оценка

$$\|u^{m,N}\|^2_{W_2^1(Q)}\leqslant M_1(T)\left[\|f\|^2_{L_2(Q)}+\|H\|^2_{L_2(S)}+\|H_t\|^2_{L_2(S)}+\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)}\right],$$

где $M_1(T)=\max\{(1+2T^2)Te^{2MT},2(1+2T^2)T^2e^{2MT}\}$.

Поскольку все нормы справа ограничены, то ясно, что последовательность $\{u^{m,N}(x,t)\}$ ограничена в пространстве $W_2^1(Q)$; следовательно, из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u^{m,N_n}(x,t)\}$ [7]. Покажем, что ее предел при $N\to\infty$ $\{u^m(x,t)\}\in W_2^1(Q)$ и есть искомое обобщенное решение.

Умножим (2.10) на $h_i(t)$, $h_i(t)\in W_2^1(0,T)$ и $h_i(T)=0$, просуммируем по i от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T. Обозначив

$$\eta^N(x,t)=\sum_{i=1}^N h_i(t)w_i(x),$$

а через $\mathcal{N}_N$ — совокупность всех таких η, получим

$$\int_0^T\int_\Omega\left[u_{tt}^{m,N_n}\eta^N+\nabla u^{m,N_n}\nabla\eta^N+c(x,t)u^{m,N_n}\eta^N\right]dxdt= \\ =\int_0^\tau\int_\Omega f(x,t)\eta^N dxdt+\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}H(x,t)\eta^N dsdt.$$

Проинтегрировав первое слагаемое слева по частям, мы для каждой функции $\eta\in\mathcal{N}_N$ получим равенство

$$\int_0^T\int_\Omega\left[\nabla u^{m,N_n}\nabla\eta^N-u_t^{m,N_n}\eta_t^N+c(x,t)u^{m,N_n}\eta^N\right]dxdt= \\ =\int_0^\tau\int_\Omega f(x,t)\eta^N dxdt+\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}H(x,t)\eta^N dsdt+\int_\Omega u^{m,N_n}(x,0)\eta^N(x,0)dx. \tag{2.18}$$

Зафиксировав произвольно выбранную $\eta \in \mathcal{N}_N$, перейдем в (2.18) к пределу при $N_n \to \infty$. Тогда в силу доказанной слабой сходимости будем иметь

$$\int_0^T \int_\Omega \left[\nabla u^m(x,t)\nabla\eta(x,t) - u_t^m(x,t)\eta_t(x,t) + c(x,t)u^m(x,t)\eta(x,t)\right] dxdt =$$
$$= \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} H(x,t)\eta(x,t)dsdt + \int_\Omega \psi(x)\eta(x,0)dx.$$

Таким образом, тождество, определяющее обобщенное решение, выполняется для всех $\eta \in \mathcal{N}_N$. Так как $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathcal{N}_N$ всюду плотно в $\hat{W}_2^1(Q)$, то тождество выполняется для произвольной $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q)$.

Итак, доказали, что предельная функция является обобщенным решением задачи (2.6)–(2.8).

Заметим, что в силу условий на входные данные решение имеет вторую производную $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$ и $u_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$, а существование $\Delta u(x,t) \in L_2(Q)$ гарантирует условие гладкости границы $\partial\Omega$ [7].

Так как все сказанное выше справедливо для любого m, то, учитывая явное представление функции $p^m(t)$, можно считать, что последовательность $\{u^m(x,t), p^m(t)\}$ построена.

Для обоснования сходимости этой последовательности рассмотрим разности

$$z^m(x,t) = u^m(x,t) - u^{m-1}(x,t), \quad r^m(t) = p^m(t) - p^{m-1}(t).$$

Заметим, что для $z^m(x,t)$ справедливо тождество

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left[z_{tt}^m(x,t)v(x,t) + \nabla z^m(x,t)\nabla v(x,t) + c(x,t)z^m(x,t)v(x,t)\right] dxdt =$$
$$= \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} r^m(t)h(x,t)v(x,t)dsdt.$$

Положим $v(x,t) = z_t^m(x,t)$ и, интегрируя по частям интегралы в левой части, получим

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[(z_t^m(x,\tau))^2 + \left|\nabla z^m(x,\tau)\right|^2\right] dx =$$
$$= \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} r^m(t)h(x,t)z_t^m(x,t)dsdt - \int_0^\tau \int_\Omega c(x,t)z^m(x,t)z_t^m(x,t)dxdt. \tag{2.19}$$

Выполним некоторые преобразования в (2.19), интегрируя по частям:

$$\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} r^m(t)h(x,t)z_t^m(x,t)dsdt = \int_{\partial\Omega} h(x,t)r^m(t)z^m(x,t)\Big|_0^\tau ds-$$
$$-\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(h(x,t)r^m(t)\right)_t z^m(x,t)dsdt = r^m(\tau)\int_{\partial\Omega} h(x,\tau)z^m(x,\tau)ds-$$
$$-\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} h(x,t)r_t^m(t)z^m(x,t)dsdt - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} h_t(x,t)r^m(t)z^m(x,t)dsdt.$$

Оценим полученное выражение, используя неравенство (2.12):

$$2r^m(\tau)\int_{\partial\Omega} h(x,t)z^m(x,\tau)ds \leqslant \delta\left(r^m(\tau)\right)^2 + \frac{|\partial\Omega|}{\delta}\int_{\partial\Omega} h^2(x)\left(z^m(x,\tau)\right)^2 ds \leqslant$$
$$\leqslant \delta\left(r^m(\tau)\right)^2 + \frac{|\partial\Omega|h_1^2}{\delta}\int_\Omega \left[\varepsilon\left|\nabla z^m(x,\tau)\right|^2 + c(\varepsilon)\left(z^m(x,\tau)\right)^2\right]dx,$$

$$2\int_0^\tau r_t^m(t)\int_{\partial\Omega} h(x,t)z^m(x,t)dsdt \leqslant$$
$$\leqslant \delta\int_0^\tau \left(r_t^m(t)\right)^2 dt + \frac{|\partial\Omega|h_1^2}{\delta}\int_0^\tau \int_\Omega \left[\nu\left|\nabla z^m(x,t)\right|^2 + c(\nu)\left(z^m(x,t)\right)^2\right]dxdt,$$

$$2\int_0^\tau r^m(t)\int_{\partial\Omega} h_t(x,t)z^m(x,t)dsdt \leqslant$$
$$\leqslant \delta\int_0^\tau \left(r^m(t)\right)^2 dt + \frac{|\partial\Omega|h_2^2}{\delta}\int_0^\tau \int_\Omega \left[\mu\left|\nabla z^m(x,t)\right|^2 + c(\mu)\left(z^m(x,t)\right)^2\right]dxdt.$$

Тогда справедлива оценка

$$\int_\Omega \left[\left(z_t^m(x,\tau)\right)^2 + \left|\nabla z^m(x,\tau)\right|^2\right]dx \leqslant \int_0^\tau \int_\Omega \left(z_t^m(x,t)\right)^2 dxdt\ +$$
$$+\int_0^\tau \int_\Omega c^2(x,t)\left(z^m(x,t)\right)^2 dxdt + \int_0^\tau \int_\Omega \left(z_t^m(x,t)\right)^2 dxdt\ +$$

$$+\delta\left(r^m(\tau)\right)^2+\frac{|\partial\Omega|h_1^2}{\delta}\int\limits_{\Omega}\left[\varepsilon\left|\nabla z^m(x,\tau)\right|^2+c(\varepsilon)\left(z^m(x,\tau)\right)^2\right]dx+$$

$$+\delta\int\limits_0^\tau\left(r_t^m(t)\right)^2dt+\frac{|\partial\Omega|h_1^2}{\delta}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\left[\nu\left|\nabla z^m(x,t)\right|^2+c(\nu)\left(z^m(x,t)\right)^2\right]dxdt+$$

$$+\delta\int\limits_0^\tau\left(r^m(t)\right)^2dt+\frac{|\partial\Omega|h_2^2}{\delta}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\left[\mu\left|\nabla z^m(x,t)\right|^2+c(\mu)\left(z^m(x,t)\right)^2\right]dxdt. \tag{2.20}$$

Заметим, что выполняется неравенство

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\left(z^m(x,t)\right)^2dxdt\leqslant 2T^2\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\left(z_t^m(x,t)\right)^2dxdt, \tag{2.21}$$

следовательно, (2.20) примет вид

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(z_t^m(x,\tau)\right)^2+\left|\nabla z^m(x,\tau)\right|^2\right]dx\leqslant A_1\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\left(z_t^m(x,t)\right)^2dxdt+\delta\left(r^m(\tau)\right)^2+$$
$$+\delta\int\limits_0^\tau\left(r^m(t)\right)^2dt+\delta\int\limits_0^\tau\left(r_t^m(t)\right)^2dt+A_2\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\left|\nabla z^m(x,t)\right|^2dxdt, \tag{2.22}$$

где A_1 и A_2 зависят только от входных данных.

Выберем $\varepsilon=\dfrac{\delta}{2|\partial\Omega|h_1^2}$, применим к (2.22) неравенство Гронуолла [3], а затем интегрируя по τ от 0 до T, придем к оценке

$$\|z^m\|_{W_2^1(Q)}\leqslant\sqrt{N_1(T)\delta}\|r^m(t)\|_{W_2^1(0,T)}, \tag{2.23}$$

где $\delta>0$ произвольно.

Оценим теперь значение $r^m(t)$, для которого справедливо равенство

$$r^m(t)=\left(\int\limits_{\partial\Omega}hK ds\right)^{-1}\left[\int\limits_{\Omega}K(x)c(x,t)z^{m-1}dx-\int\limits_{\Omega}\Delta K(x)z^{m-1}dx\right]. \tag{2.24}$$

Возводя (2.24) в квадрат, учитывая условия теоремы, а также что $z^{m-1}(x,t)\in W_2^1(Q)$ нетрудно получить неравенство

$$\|r^m(t))\|_{L_2(0,T)}\leqslant\sqrt{N_2}\|z^{m-1}(x,t)\|_{W_2^1(Q)}. \tag{2.25}$$

Далее продифференцируем (2.24) по t и, повторяя предыдущие рассуждения приходим, к оценке

$$\|r_t^m(t))\|_{L_2(0,T)}\leqslant\sqrt{N_3}\|z^{m-1}(x,t)\|_{W_2^1(Q)}. \tag{2.26}$$

Из (2.23), (2.25) и (2.26) вытекает, что

$$\|z^m(x,t))\|_{W_2^1(0,T)}\leqslant\sqrt{L}\|z^{m-1}(x,t)\|_{W_2^1(Q)}. \tag{2.27}$$

$$\|r^m(t))\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \sqrt{L}\|r^{m-1}(t))\|_{W_2^1(0,T)}, \tag{2.28}$$

где $L = N_1(N_2 + N_3)\delta$.

Пользуясь произволом δ, выберем его так, чтобы $\sqrt{L} = q < 1$. Тогда неравенства (2.27) и (2.28) означают, что последовательность $(u^m(x,t), p^m(t))$ фундаментальна.

Так как $W_2^1(Q)$ — полное пространство, то фундаментальная последовательность $(u^m(x,t), p^m(t))$ сходится к элементу $(u(x,t), p(t))$, где $u(x,t) \in W_2^1(Q)$, $p(t) \in W_2^1(0,T)$. Но тогда, переходя к пределу в (2.3) и (2.5), мы получим соответственно тождества (2.1) и (2.2), так как из сильной сходимости следует слабая.

Таким образом, пара функций $(u(x,t), p(t))$, полученная в результате предельного перехода в $(u^m(x,t), p^m(t))$ и эквивалентных преобразований, является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4).

Единственность задачи (1.1)–(1.4) непосредственным образом следует из оценок (2.27) и (2.28).

Литература

[1] Cannon, J.R. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation / J.R. Cannon, S.Y. Lin // J. Austral.Math. Soc. Ser. B – 1991. – Vol. 33. – P. 149-163.

[2] Cannon, J.R. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations / J.R. Cannon, Y. Lin // Inverse Problems – 1998. – Vol. 4. – P. 35-45.

[3] Гординг, Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. / Л. Гординг – М.: Иностр. лит., 1961. – 120 с.

[4] Иванчов, Н.И. Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости / Н.И. Иванчов // Сибирский мат. журнал. – 1994. – Т. 35. – №3. – С. 612–621.

[5] Иванчов, Н.И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении / Н.И. Иванчов // Сибирский мат. журнал. – 1998. – Т. 39. – №3. – С. 539–550.

[6] Камынин, В.Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения / В.Л. Камынин // Матем. заметки – 2003. – Т. 73. – Вып. 2. – С. 217–227.

[7] Камынин, В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения / В.Л. Камынин // Матем. заметки – 2005. – Т. 77. – Вып. 4. – С. 522–534.

[8] Кожанов, А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности / А.И. Кожанов // Сибирский мат. журнал. – 2005. – Т. 46. – Вып. 5. – С. 1053–1071.

[9] Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики. / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

[10] Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М., 1961. – 311 с.

[11] Прилепко, А.И О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением / А.И. Прилепко, А. Б. Костин // Мат. сборник – 1992. – Т. 183. – №4. – С. 49–86.

[12] Прилепко, А.И Об обратных задачах определения коэффициентов в параболическом уравнении II / А.И. Прилепко, А. Б. Костин // Сибирский мат. журнал. – 1993. – Т. 33. – №3. – С. 146–155.

[13] Прилепко, А.И Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением / А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко // ЖВМиМФ – 2003. – Т. 43. – №4. – С. 562–570.

[14] Прилепко, А.И Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением / А.И. Прилепко, Д.С. Ткаченко // ЖВМиМФ – 2003. – Т. 43. – №9. – С. 1329–1401.

Поступила в редакцию 12/*II*/2008;
в окончательном варианте — 27/*II*/2008.

AN INVERSE PROBLEM WITH AN INTEGRAL OVERDETERMINATION CONDITION FOR WAVE EQUATION[3]

© 2008 N.V. Beilina[4]

In the paper we study an inverse problem with an integral overdetermination condition for a wave equation with an unknown coefficient in boundary condition is considered. The existence and uniqueness of a solution is proved with help of an a priori estimate and the Galerkin procedure.

Keywords and phrases: *inverse problem, non-local problem, integral condition of overdetermination.*

Paper received 12/*II*/2008.
Paper accepted 27/*II*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

[4]Beilina Natalya Viktorovna (`natalie@samdiff.ru`), Dept. of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.