МАТЕМАТИКА

УДК 510.644

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЗНАЧНОСТЬЮ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ ЗНАНИЙ[1]

© 2008 Л.А. Лютикова[2]

В статье рассматривается логический подход к решению интеллектуальных задач, анализирующих заданную предметную область, представляющую собой набор объектов и их характеристик. Предлагаемый метод моделирует систему знаний по исходным данным, минимизирует предметную область до необходимого набора правил, что существенно сокращает объемы используемой информации, осуществляет быстрый и качественный вывод. Использование в качестве кодируемого алфавита предикатов с переменной значностью повышает выразительность характеристик и оптимизирует представление данных.

Ключевые слова: *математическая логика, предикат, система знаний, минимизация, индивидная область.*

Для автоматизированной реализации некоторых задач, таких как геологическое прогнозирование, медицинская диагностика, диагностика сложных технических систем, прогнозирование кризисов в экономике и т.д., как правило, имеет место следующая ситуация: число прецедентов невелико, информация об их статистической природе либо отсутствует, либо ее недостаточно для обоснованного применения вероятностных моделей, а описание прецедентов содержит разнородную информацию.

Логические алгоритмы хорошо зарекомендовали себя в решениях обозначенных задач, главным образом потому, что они делают возможным анализ исходной предметной области, что в свою очередь оптимизирует поиск.

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором О.А. Репиным.

[2]Лютикова Лариса Адольфовна (niipma@mail333.com), заведующий отделом интеллектуализации информационных и управляющих систем Научно-исследовательского института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89-А.

Для более выразительного представления знаний предполагается использование многозначной и переменнозначной логики.

Существующие на сегодняшний день алгоритмы обработки информации, в основном основанные на статистическом анализе, оперируют избыточной информацией, упуская интеллектуальную составляющую любого вывода. На базе разработанных методов предполагается создание компьютерной системы обучения в слабо формализованной области знаний. Имеется в виду автоматическое построение правил, их автоматическая минимизация (удаление избыточной информации) и поиск по оптимизированной системе знаний, что, в сравнении с другими методами, дает более продуктивную автоматизированную реализацию для решения интеллектуальных задач.

1. Постановка задачи моделирования баз знаний

Описание объекта представляет собой n-мерный вектор, где n — число признаков, используемых для характеристики объекта, причем j-я координата этого вектора равна значению j-го признака, $j = 1,...,n$. В описании объекта допустимо отсутствие информации о значении того или иного признака. При составлении эффективной системы следует избегать двух крайностей: избыточности и недостаточности набора признаков. В первом случае важные результаты окажутся скрытыми в массе второстепенных или малозначимых. Во втором — критерий для однозначного опознания конкретных объектов останется невыявленным.

Совокупность объектов и характеризующих их признаков составляет базу данных. После создания базы данных строится база знаний, играющая главную роль в процессе распознавания объектов исследуемой предметной области.

Естественно представить знания в наиболее компактной форме, что позволит сократить время для процедуры вывода.

Задача состоит в разработке методов, позволяющих моделировать и минимизировать базу знаний по исходной базе данных.

2. Формальная постановка задачи

Соответствие множества объектов характеризующим их признаков может быть представлено следующей таблицей

Таблица

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	W
$x_1(w_1)$	$x_2(w_1)$	$x_3(w_1)$	$\dots$	$x_n(w_1)$	w_1
$x_1(w_2)$	$x_2(w_2)$	$x_3(w_2)$	$\dots$	$x_n(w_2)$	w_2
$x_1(w_m)$	$x_2(w_m)$	$x_3(w_m)$	$\dots$	$x_n(w_m)$	w_m

Пусть $X_j = \left\{x_1(w_j), x_2(w_j), \ldots, x_n(w_j)\right\}$ — вектор качественных признаков, каждый элемент которого — фиксированный признак характеризуемого объекта. $W = \bigcup_{j=1}^{m} w_j$ — множество характеризуемых объектов.

Вид функции $W = f(X)$ не задан. Требуется восстановить неизвестную зависимость по наблюдениям.

Каждый соответствующий признак $x_j(w_j)$ в общем случае кодируется предикатом k_i-значности (переменнозначным), $i \in [1, \ldots, n]$.

Для нахождения значения функции $W = f(X)$ системе важно обращаться к базе знаний, которая по запросу $X_j = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ выдаст w_j в случае, если w_j принадлежит исследуемой предметной области, или объект (группу объектов), наиболее соответствующих данному запросу.

Предлагаемый принцип моделирования систем знаний по базе данных состоит в следующем:

– совокупность зависимостей между объектами и их признаками будем рассматривать как множество тавтологий, т.е. как некую логическую теорию;

– каждая логическая теория обладает своей аксиоматической системой и правилами вывода;

– в случае нахождения для заданной теории метода построения её системы аксиом можно считать искомую систему знаний построенной.

Обычно по аксиоматике строится логическая теория, в данном случае наоборот, предлагается по заданной теории найти одну из её аксиоматик.

Для выполнения поставленной задачи необходимы следующие понятия и определения.

Пусть S — множество исследуемых объектов, которое характеризуется некоторым набором свойств Ξ в терминах многозначных предикатов, с переменной значностью.

Многозначным предикатом с переменной значностью в дальнейшем изложении мы будем называть конечное отображение вида $\alpha : S \to \mathrm{Im}\,\alpha$, где $\mathrm{Im}\,\alpha - \alpha \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, $k_i \in$[2,. . . ,N].

Алгебра переменнозначной логики

Высказывания строятся над множеством $\{B, \neg, \wedge, \vee, 0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, где B — непустое множество, над элементами которого определены три операции:

$\neg$ — отрицание (унарная операция),

$\wedge$ — & конъюнкция (бинарная),

$\vee$ — дизъюнкция (бинарная),

а также константы — логический ноль $0, 1, \ldots, k - 1$.

Пусть X_i — независимая многозначная переменная величина, $X_i \in [0, \ldots, k_i - 1]$, являющейся одной из характеристик объекта. Введем еще несколько функций и свойств многозначной логики.

$$I_j(X) = \begin{cases} k_i - 1 & \text{при} \quad X = j, \\ 0 & \text{при} \quad X \neq j; \end{cases}$$

$$I_{ji}(X_i) = \begin{cases} k_i - 1 & \text{при} \quad X_i = j, \\ 0 & \text{при} \quad X_i \neq j. \end{cases}$$

1) Свойство коммутативности: $X_1 \circ X_2 = X_2 \circ X_1$;
2) Свойство ассоциативности: $(X_1 \circ X_2) \circ X_3 = X_1 \circ (X_2 \circ X_3)$;
3) Свойство дистрибутивности: $(X_1 \vee X_2) \circ X_3 = X_1 \circ X_3 \vee X_2 \circ X_3$;
4) Правила упрощения:

$$I_{ji}(X) * I_{ri}(X) = \begin{cases} I_{ji}(x) & \text{при} \quad j = r, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq r. \end{cases}$$

Отметим ряд свойств, справедливых для многозначной логики:
$(k-1)\&X = X$;
$0\&X = 0$;
$(k-1) \vee X = (k-1)$;
$0 \vee X = X$.

Введем понятие обобщенной инверсии. Обобщенной инверсией является следующее выражение:

$$\overline{X}_i = 1\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i), \ldots, \vee(i-1)\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i) \vee (i+1)\&$$
$$\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i) \vee (k-1)\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i).$$

Заданная таким образом инверсия обеспечивает включение всех возможных интерпретаций отрицания в различных многозначных логических системах.

В дальнейшем будем считать, что дизъюнкцией двух элементов разной значности является следующая функция:

$$X \vee Y = \max\left[\frac{X}{k_i - 1}; \frac{Y}{k_j - 1}\right] * l, \quad \text{где} \quad l = \begin{cases} k_i - 1 & \text{при} \ \dfrac{X}{k_i - 1} > \dfrac{Y}{k_j - 1}, \\ k_j - 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Конъюнкцией двух элементов разной значности назовем

$$X \,\&\, Y = \min\left[\frac{X}{k_i - 1}; \frac{Y}{k_j - 1}\right] * l, \quad \text{где} \quad l = \begin{cases} k_i - 1 & \text{при} \ \dfrac{X}{k_i - 1} < \dfrac{Y}{k_j - 1}, \\ k_j - 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Импликацию для переменнозначной логики зададим следующим выражением: $X \to Y = \overline{X} \vee Y$.

$$\overline{X} \vee Y = 1\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i), \ldots, \vee(i-1)\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i) \vee (i+1)\&$$
$$\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i^{(}X_i) \vee (k-1)\& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i) \vee Y.$$

Любая функция рассматриваемой системы может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\vee}_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} I_{\sigma_1}\&x_1\&, \ldots, I_{\sigma_n}\&x_n\&f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Элементарная конъюнкция представляет характеристическую функцию некоторого интервала I, пространства M, а интервал — это простое произведение непустых подмножеств $\alpha_{i,}$ взятых по одному из каждого X_i :

$$I = \alpha_1 \times \alpha_1 \times, \ldots, \times \alpha_n, \alpha_1 \in X_i, \quad \alpha_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда элементарная переменнозначная конъюнкция представлена выражением:

$$K = (x_1 \in \alpha_1) \& (x_2 \in \alpha_2), \ldots, (x_n \in \alpha_n), \quad \alpha_i \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и определяется как конъюнкция произвольных, но отличных от нуля одноместных предикатов $x_i \in \alpha_i$ (x_i принимает значения из α_I, где α_i — конечное множество констант, $\alpha_i = [0, \ldots, k_{i-1}]$).

Элементарная переменнозначная дизъюнкция есть дизъюнкция одноместных предикатов, отличных от нуля $d = (x_1 \in \alpha_1) \vee (x_2 \in \alpha_2) \vee, \ldots, \vee (x_n \in \alpha_n)$.

Многозначные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (МДНФ, МКНФ) определяются стандартным образом: МДНФ — это дизъюнкция элементарных конъюнкций, МКНФ — это конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Решение исходной задачи в системе кодирования информации с переменной значностью будет выглядеть следующим образом.

Каждую строку обучающей выборки опишем правилами продукции в соответствующем многозначном смысле:

$$\&_{i=1}^{n} x_i(w_j) \to w_j. \tag{2.1}$$

Тогда дизъюнктивной формой МДНФ (многозначная дизъюнктивная нормальная форма) будет следующее представление данного правила:

$$\vee_{i=1}^{n} \overline{x_i} \vee w_j$$

при $k_i \in [2, \ldots, N]$, где

$$\begin{aligned} \overline{x}_i = 0 \& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(x_i) \vee 1 \& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(x_i), \ldots \vee (i-1) \& \\ \& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(x_i) \vee (i+1) \& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(X_i) \vee (k-1) \& \vee_{i=0}^{k_i-1} I_i(x_i). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Поскольку каждое знание в обучающей выборке мы можем записать в виде логической функции соответствующей значности, хотелось бы иметь возможность представления всей базы знаний функцией или системой функций многозначной логики с учетом специфики кодирования каждого признака. Однозначное соответствие можно получить, объединив все правила продукций в данной предметной области. Это будут рассуждения такого плана: знаем это правило и следующее, и так далее, знаем все вместе правила одновременно. Это будет функция вида:

$$f(X) = \&_{j=1}^{m} \left(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_i} \vee w_j \right) \text{ при } j \in [1, \ldots, m]. \tag{2.3}$$

Далее можно применить алгоритм сокращения, адаптированный для многозначных логик.

1. Если некоторая переменная входит в ДНФ с одним знаком ($I_{jk-1}(x)$, $j = \mathrm{const}$ во всех дизъюнктах), то удаляем все дизъюнкты, содержащие эту переменную (данная переменная неинформативна);

2. Если в ДНФ имеется какой-то дизъюнкт $I_{jk-1}(x)$, то выполняем следующие действия:

– удаляем все дизъюнкты вида $I_j(x)\&\ldots$ (правило поглощения);

– дизъюнкты вида $\bigvee_{j=0}^{k_i-1} I_j(x_i)\&x_i\&s\&p$, заменяем дизъюнктами вида $\bigvee_{j=0, j\neq l}^{k_i-1} I_j(x_i)s\&p$, $\forall I_l(x_i)$, $l \in [0, \ldots, k-1]$.

Результатом примененного алгоритма является функция, соответствующая исходной таблице данных, однозначно ее характеризующая и дающая множество наиболее существенных правил, формирующих исходную область знаний.

Функция $\{f(X)\}$ полна на заданном пространстве признаков.

Решающая функция и исходная БД имеют однозначное соответствие.

Теорема 1. Функция: $f(X) = \&_{j=1}^{m}(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_i}(w_j) \vee w_j)$ при $j \in [1, \ldots, m]$, $x_i(w_j) \in [0, \ldots, k_i - 1]$, $k_i \in [2, \ldots, N]$, где $x_i(w_j)$ — соответствующий многозначный признак, w_j — характеризуемый объект, есть дизъюнкция всех возможных классов заданной предметной области.

Построенная функция состоит из конечного числа дизъюнктов, часть из которых являются аксиомами, это те дизъюнкты, которые содержат минимальное число объектов в качестве сомножителей. Другая часть дизъюнктов является классами, это дизъюнкты, содержащие как можно больше объектов, и дизъюнкты, не содержащие объектов вообще и состоящие только из переменных. Иначе говоря, $f(X)$ можно разделить на три функции:

$$f(X) = f_1(X) \vee f_2(X) \vee f_3(X), \tag{2.4}$$

где $f_1(X)$ — система аксиом или индивидуальные признаки определенных объектов, $f_2(X)$ — множество классов исходной БД и $f_3(X)$ — множество настроечных элементов, которые не имеют значения для вывода, но имеют значение в случае поступления новой информации.

Остановимся подробнее на каждой из функций. Для получения системы аксиом заданной БД необходимо построить $f(X)$, сократить её по заданному ранее алгоритму, затем проанализировать те дизъюнкты, куда вместе с переменными входят объекты, выбрать среди них минимальные. Это и будут аксиомы заданной предметной области.

Функция $f_2(X)$ дает картину разбиения БД на классы. Дизъюнкты, входящие в данную функцию, должны содержать как можно больше компонент — объектов.

Функция $f_3(X)$ не имеет отношения ни к выводу, ни к совокупности классов, ни к идентификации объектов. Она состоит только из дизъюнктов, элементами которых являются переменные (признаки объектов). Можно назвать $f_3(X)$ настроечной функцией, так как она предоставляет информацию о неиспользованных переменных или их определенных наборах, которые могут в дальнейшем стать основными идентифицирующими признаками для новых элементов множества $\{W\}$.

В результате подробного анализа $f(X)$ становится очевидным рекурсивная составляющая при построении, в результате чего получаем следующее представление $W(X)$, где $W(X)$ — моделируемая функция, Z_j — характеристика объектов на текущий момент, Q_j — состояние системы на текущий момент.

Полученную функцию $f(X)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&W(X) = Z_k(q_k w_k X);\\
&Z_k(q_k w_k X_k) = Z_{k-1}\&(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_k}(w_i) \vee w_k) \vee q_{k-1}\&(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_k}(w_i) \vee w_k);\\
&q_k = q_{k-1}\&(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_k}(w_i);\\
&q_1 = \bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_1}(w_i);\ j = 2, \ldots, m; Z_1 = w_1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Выводы

1. В данной статье обосновано существование функции, осуществляющей формальное построение системы знаний по исходным данным.

2. Искомая функция, являющаяся конъюнкцией по пространству признаков и множеству объектов, однозначно характеризует исходные данные. Разбивая предметную область на классы, обладает свойствами модифицируемости, отвечает требованиям полноты, непротиворечивости в заданной области.

3. Решающая функция сохраняет свои свойства в пространстве двузначных и переменнозначных предикатов.

4. Представление данных пространством многозначных предикатов с переменной значностью дает возможность для выразительной интерпретации признаков, хранения знаний в более компактной форме, установления новых закономерностей между признаками и построения качественно новых систем знаний.

5. Результатам анализа данных является системы аксиом, порождающая заданную предметную область.

Литература

[1] Закревский, А.Д. Логика распознавания / А.Д. Закревский – М.: Наука, – 2003. – 144 с.

[2] Лютикова, Л.А. Развитие и применение многозначных логик и сетевых потоков в интеллектуальных системах / Л.А. Лютикова, А.В. Тимофеев, В.В. Сгурев [и др.] // Труды СПИИРАН, – 2004. – Вып. 2. – С. 117–121.

[3] Лютикова, Л.А. Использование трехзначной логики для анализа логических баз данных / Л.А. Лютикова // Управление и информационные технологии: труды Всероссийской конференции. – 2006. – С. 214–220.

[4] Тимофеев, А.В. Применение диофантовых нейронных сетей для генетического анализа и диагностики / А.В. Тимофеев, А.М. Шеожев, З.М. Шибзухов // Сб. трудов 6-го Санкт-Петербургского симпозиума по теории адаптивных систем SPAS'99. СПб: Изд-во "НПО Омега", – 2003. – Т. 2. – С. 169–171.

[5] Тимофеев, А.В. Методы построения обучающих выборок для развернутой медицинской диагностики на основе нейросетевых технологий / А.В. Тимофеев, А.М. Шеожев // Доклады АМАН. – 2000. – №1. – Т. 5. – С. 69–71.

[6] Шибзухов, З.М. Конструктивные методы обучения ΣΠ-нейронных сетей / З.М. Шибзухов. – М.: Наука, 2006.

Поступила в редакцию 13/*XII*/2006;
в окончательном варианте — 26/*XII*/2006.

APPLICATION OF LOGIC WITH A VARIABLE VALUE TO KNOWLEDGE BASES MODELLING[3]

 L.A. Lyutikova[4]

In the paper a method of analysis of databases containing a set of objects and their characteristics is considered. Every characteristic of the objects has its value in order to represent input data in a optional way.

Using the input data, we construct a function such that a database is uniquely defined. After the function is analyzed and minimized, we obtain both a complete set of classes possible on the initial database and a number of unique elements. In this case, it is possible to introduce a system of axioms and theorems on the input area, highly reducing the data representation.

Keywords and phrases: *mathematical logic, predicate, knowledge system, minimization, individual domain.*

Paper received 13/*XII*/2006.
Paper accepted 26/*XII*/2006.

---

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) O.A. Repin.

[4]Larisa Adolfovna Lyutickova (`lylarisa@yandex.ru`), Institute of Applied Mathematics and Automatization, Kabardino-Balkariya Science Center of Russian Academy of Science, Nalchik, 360000, Kabardino-Balkariya, Russia.