УДК 539.374

К ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

© 2008 Ю.Н. Радаев[1]

Приводится альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, предложенных Д.Д. Ивлевым в 1958 г. для напряженных состояний на ребре призмы Кулона—Треска, простым понижением на одну единицу их размерности.

Ключевые слова: *идеально пластическое тело, плоская деформация, линии скольжения, призма Кулона—Треска.*

1. Теория плоской деформации идеально пластического тела — наиболее полно разработанный раздел современной математической теории пластичности. Ее изложение, как правило, дается во всех руководствах по математической теории пластичности[2]. В настоящее время она по-прежнему сохраняет важное прикладное значение и служит в качестве весьма полезного инструмента при моделировании многих современных технологических процессов обработки металлов. Решающим обстоятельством, обеспечившим создание теории плоской деформации в столь законченной и совершенной форме, является формальная статическая определимось и гиперболичность

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]См., например, такие известные монографии как:

Ильюшин, А.А. Пластичность. Часть первая. Упруго-пластические деформации / А.А. Ильюшин. – М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – С. 324–338;

Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С. 155–190;

Прагер, В. Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф.Г. Ходж. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. – С. 161–216;

Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: Физматгиз, 1962. – С. 257–294;

Ивлев, Д.Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – С. 141–165;

Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – С. 132–225;

Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высш. шк., 1969. – С. 192–227.

соотношений этой теории. Основополагающие результаты здесь принадлежат Г. Генки[3] и Л. Прандтлю[4].

Двумерные уравнения теории пластического плоского деформированного состояния могут быть, как известно, получены из трехмерных пространственных уравнений. Удивительным оказывается тот факт, что уравнения плоской деформации выводятся также из пространственных уравнений, предложенных Д.Д. Ивлевым в 1958 г. для напряженных состояний на ребре призмы Кулона—Треска, простым понижением на одну единицу их размерности. Собственно это обстоятельство и позволяет "увидеть" все соотношения теории плоского деформированного состояния "из пространства".

В статье приводится альтернативный вариант полного вывода всех основных соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений Д.Д. Ивлева. Предварительно мы даем вывод формул преобразования для операторов дифференцирования по направлению на плоскости.

2. Рассмотрим вывод формул преобразования операторов d_k дифференцирования вдоль координатных направлений на плоскости при переходе от ортогональной сетки к произвольной (необязательно ортогональной) криволинейной сетке.

Предположим, что на плоскости имеется локальный ортонормированный базис $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, а другой локальный базис состоит из, вообще говоря, неортогональных единичных векторов $\overline{\mathbf{l}}$, $\overline{\mathbf{m}}$, первый из которых отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_1 по ходу часовой стрелки, а второй отклоняется от орта $\mathbf{l}$ на угол ψ_2 против хода часовой стрелки. Мы считаем, что $\psi_1 > 0$, $\psi_2 > 0$, $\psi_1 + \psi_2 \neq \pi$. Углы ψ_1, ψ_2 могут, вообще говоря, изменяться при движении вдоль координатных линий локальной базисной системы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ (см. рис. 1).

Найдем формулы преобразования дифференциальных операторов

$$d_1 = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \quad d_2 = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla},$$
$$\overline{d_1} = \overline{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \quad \overline{d_2} = \overline{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

при переходе от одной локальной базисной системы к другой. Эти операторы, как следует из их определения, представляют собой производные вдоль соответствующих координатных линий.

---

[3]Hencky, H. Ueber einige statisch bestimmte Faelle des Gleichgewichts in plastischen Koerpern / H. Hencky // Z. angew. Math. Mechanik. – 1923. – Bd. 3. – H. 4. – S. 241–251. Имеется превод на русский язык: Генки, Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах / Г. Генки // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 80–101.

[4]Prandtl, L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz ueber das plastische Gleichgewicht / L. Prandtl // Z. angew. Math. Mechanik. – 1923. – Bd. 3. – H. 6. – S. 401–406. Имеется превод на русский язык: Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. – С. 102–113.

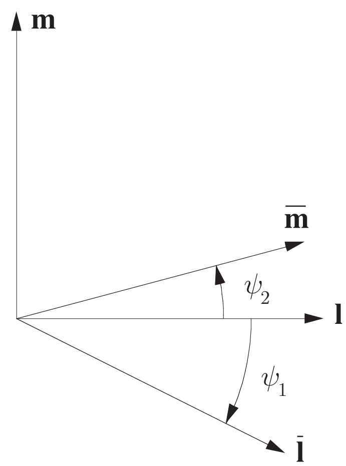

Рис. 1. Трансформация ортогонального локального базиса **l**, **m** в двумерную неортогональную базисную систему $\bar{\mathbf{l}}$, $\overline{\mathbf{m}}$

Коэффициенты разложения

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2$$

на основании

$$\begin{aligned} \mathbf{l}\cdot\bar{\mathbf{l}} &= \cos\psi_1 = k_1 + k_2\cos(\psi_1+\psi_2),\\ \mathbf{l}\cdot\overline{\mathbf{m}} &= \cos\psi_2 = k_2 + k_1\cos(\psi_1+\psi_2) \end{aligned}$$

вычисляются в следующем виде

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)},\\ k_2 &= \frac{\cos\psi_2 - \cos\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично для разложения

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2$$

с помощью

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\cdot\bar{\mathbf{l}} &= -\sin\psi_1 = s_1 + s_2\cos(\psi_1+\psi_2),\\ \mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}} &= \sin\psi_2 = s_2 + s_1\cos(\psi_1+\psi_2) \end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-\sin\psi_1 - \sin\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)},\\ s_2 &= \frac{\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} d_1 &= \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla} = (\bar{\mathbf{l}}k_1 + \overline{\mathbf{m}}k_2)\cdot\boldsymbol{\nabla} = k_1\overline{d_1} + k_2\overline{d_2},\\ d_2 &= \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla} = (\bar{\mathbf{l}}s_1 + \overline{\mathbf{m}}s_2)\cdot\boldsymbol{\nabla} = s_1\overline{d_1} + s_2\overline{d_2}, \end{aligned}$$

то в итоге искомые формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_1} + \frac{\cos\psi_2 - \cos\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_2}, \\ d_2 &= \frac{-\sin\psi_1 - \sin\psi_2\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_1} + \frac{\sin\psi_2 + \sin\psi_1\cos(\psi_1+\psi_2)}{\sin^2(\psi_1+\psi_2)}\overline{d_2}. \end{aligned} \tag{3}$$

В случае преобразования поворота исходного базиса **l**, **m**, т.е. когда

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \psi_2 = \psi,$$

полученные формулы упрощаются

$$\begin{aligned} d_1 &= \sin\psi\overline{d_1} + \cos\psi\overline{d_2}, \\ d_2 &= -\cos\psi\overline{d_1} + \sin\psi\overline{d_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Обратное по отношению к (4) преобразование есть

$$\begin{aligned} \overline{d_1} &= \sin\psi d_1 - \cos\psi d_2, \\ \overline{d_2} &= \cos\psi d_1 + \sin\psi d_2. \end{aligned} \tag{5}$$

В рамках указанного выше случая (поворот исходного базиса **l**, **m**) рассмотрим преобразование повторных дифференциальных операторов. Сначала положим, что угол ψ постоянен. Несложные вычисления показывают, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d_1d_1 &= \sin^2\psi\overline{d_1d_1} + \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1}) + \cos^2\psi\overline{d_2d_2}, \\ d_2d_2 &= \cos^2\psi\overline{d_1d_1} - \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1}) + \sin^2\psi\overline{d_2d_2}, \end{aligned}$$

откуда следуют формулы

$$\begin{aligned} d_1d_1 + d_2d_2 &= \overline{d_1d_1} + \overline{d_2d_2}, \\ d_1d_1 - d_2d_2 &= -\cos 2\psi\overline{d_1d_1} + \sin 2\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1}) + \cos 2\psi\overline{d_2d_2}, \end{aligned}$$

первая из которых указывает на инвариантность оператора $d_1d_1 + d_2d_2$ при поворотах локального базиса **l**, **m**. Замечая, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} -d_1d_2 &= \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2}) + \cos^2\psi\overline{d_2d_1} - \sin^2\psi\overline{d_1d_2}, \\ -d_2d_1 &= \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2}) + \cos^2\psi\overline{d_1d_2} - \sin^2\psi\overline{d_2d_1}, \end{aligned}$$

приходим к формулам

$$\begin{aligned} d_1d_2 - d_2d_1 &= \overline{d_1d_2} - \overline{d_2d_1}, \\ d_1d_2 + d_2d_1 &= -\sin 2\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2}) + \cos 2\psi(\overline{d_2d_1} + \overline{d_1d_2}). \end{aligned}$$

Первая из них устанавливает инвариантность оператора $d_1d_2 - d_2d_1$ при поворотах локального базиса **l**, **m**.

В случае поворота локального базиса на половину прямого угла имеем

$$\psi = \frac{\pi}{4},$$

и полученные только что формулы позволяют заключить, что

$$
\begin{aligned}
d_1d_1 - d_2d_2 &= \overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1},\\
d_1d_2 + d_2d_1 &= \overline{d_2d_2} - \overline{d_1d_1}.
\end{aligned}
$$

Если угол ψ не является постоянным, то формулы преобразования повторных операторов несколько усложняются. Вычисления показывают, что

$$
\begin{aligned}
d_1d_1 = \sin^2\psi(\overline{d_1d_1} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2}) + \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1} + (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2})+\\
+\cos^2\psi(\overline{d_2d_2} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1}),\\
d_2d_2 = \cos^2\psi(\overline{d_1d_1} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2}) - \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_2} + \overline{d_2d_1} + (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2})+\\
+\sin^2\psi(\overline{d_2d_2} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1}),
\end{aligned}
$$

откуда находим

$$
d_1d_1 + d_2d_2 = \overline{d_1d_1} + \overline{d_2d_2} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2}.
$$

На основании формул преобразования

$$
\begin{aligned}
-d_1d_2 = \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1})+\\
+\cos^2\psi(\overline{d_2d_1} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2}) - \sin^2\psi(\overline{d_1d_2} + (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1}),\\
-d_2d_1 = \sin\psi\cos\psi(\overline{d_1d_1} - \overline{d_2d_2} - (\overline{d_1}\psi)\overline{d_2} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_1})+\\
+\cos^2\psi(\overline{d_1d_2} + (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1}) - \sin^2\psi(\overline{d_2d_1} - (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2})
\end{aligned}
$$

приходим к равенству

$$
d_1d_2 - d_2d_1 = \overline{d_1d_2} - \overline{d_2d_1} + (\overline{d_1}\psi)\overline{d_1} + (\overline{d_2}\psi)\overline{d_2}.
$$

Полученные выше формулы преобразования дифференциальных операторов d_1, d_2 оказываются весьма удобным средством при исследовании систем уравнений в частных производных, с которыми приходится сталкиваться в двумерных задачах математической теории пластичности.

3. Уравнения равновесия жесткопластического тела в случае плоской деформации имеют, как известно, следующий вид (см., например, [1]):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k(\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2}) = 0,\\
\frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k(\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2}) = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

и получаются подстановкой в уравнения равновесия

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0,\\
\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}
$$

соотношений Леви

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= p + k\cos 2\theta,\\
\sigma_{22} &= p - k\cos 2\theta,\\
\sigma_{12} &= k\sin 2\theta,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где k — предел текучести при сдвиге, $p = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2)$, θ — угол наклона к оси x_1 главной оси напряжений, соответствующей наибольшему главному нормальному напряжению σ_1. Подстановка Леви диктуется необходимостью удовлетворить условию пластичности. В случае плоской деформации, как нетрудно показать, любой критерий текучести изотропной среды приводится к виду

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k \tag{8}$$

и, следовательно, описывается в рамках критерия текучести Треска. Условие текучести $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ может быть сформулировано в компонентах тензора напряжений в следующем виде:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2. \tag{9}$$

Ясно, что пластическому плоскому деформированному состоянию отвечает грань призмы Кулона—Треска, определяемая уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, если пытаться интерпретировать критерий текучести в терминах геометрии призмы Кулона—Треска. Заметим, что $p = \sigma_3$ для условий текучести Мизеса и Треска.

Если ввести обозначение $\Sigma = p/(2k)$ и плоское векторное поле $\mathbf{n}$ с компонентами $n_1 = \cos\theta$, $n_2 = \sin\theta$, то уравнения (6) приводятся к двумерному векторному уравнению

$$\mathrm{grad}\Sigma + \mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \tag{10}$$

Точно такое же уравнение получается для пространственных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска. Это весьма важное обстоятельство неоднократно отмечалось ранее [2], [3].

Трехмерное (а также двумерное) уравнение (10) может быть преобразовано к виду (см., например, [2])

$$\boldsymbol{\nabla}\Sigma - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{11}$$

В декартовых координатах трехмерное (двумерное) векторное уравнение (10) эквивалентно системе трех скалярных уравнений $(i, k = 1, 2, 3)$ (или, соответственно, двух скалярных уравнений $(i, k = 1, 2)$):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (n_k n_k = 1).$$

Поскольку для любого единичного векторного поля имеем

$$|\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2 = |\mathrm{div}\mathbf{n}|^2 + |\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2\,,$$

и в силу тождества Эйлера—Лагранжа[5]

$$|\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2 = |\mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{n})^2,$$

[5]Речь идет о тождестве

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2,$$

справедливом для любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

то оказывается справедливым соотношение

$$|\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2 = |\mathrm{div}\mathbf{n}|^2 + |\mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n})^2, \tag{12}$$

из которого с помощью уравнения (11) находим

$$|\boldsymbol{\nabla}\Sigma|^2 = |\mathrm{div}\mathbf{n}|^2 + |\mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n})^2, \tag{13}$$

откуда сразу же следует неравенство

$$|\boldsymbol{\nabla}\Sigma|^2 \leqslant |\mathrm{div}\mathbf{n}|^2 + |\mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2\,. \tag{14}$$

Дальнейшее исследование трехмерного уравнения (11) позволяет сделать заключение[6] о том, что на самом деле вместо неравенства (14) имеет место *равенство*, а векторное поле $\mathbf{n}$ должно удовлетворять условию расслоенности $\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n}=0$. Умножая уравнение (11) скалярно на вектор $\mathrm{rot}\,\mathbf{n}$, получим

$$(\boldsymbol{\nabla}\Sigma)\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n})\mathrm{div}\mathbf{n} = 0,$$

следовательно, при выполнении условия $\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n}=0$ вектор $\boldsymbol{\nabla}\Sigma$ будет ортогонален вектору $\mathrm{rot}\,\mathbf{n}$. Последний результат очевиден в двумерном случае.

В случае плоского деформированного состояния поле единичных собственных векторов $\mathbf{n}$ тензора напряжений, соответствующих наибольшему (или наименьшему) собственному значению, должно удовлетворять соотношениям

$$\mathrm{rotdiv}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1. \tag{15}$$

Первое из них есть *условие интегрируемости* основного векторного уравнения (10), описывающего равновесие идеально пластического тела. Второе из соотношений (15) есть условие расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$. В двумерном случае оно выражает геометрически очевидный факт: вихрь плоского векторного поля орторгонален самому полю. Третье из соотношений (15) представляет собой условие нормировки поля $\mathbf{n}$.

После ряда простых символьных преобразований с участием оператора Гамильтона $\boldsymbol{\nabla}$ уравнение $\mathrm{rotdiv}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=\mathbf{0}$ можно представить в форме

$$\begin{aligned}2(\mathrm{div}\,\mathbf{n})\mathrm{rot}\,\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\mathrm{graddiv}\,\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathrm{rot}\,\mathbf{n} -& \\ -((\mathrm{rot}\,\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} = \mathbf{0}.&\end{aligned} \tag{16}$$

Действительно, поскольку

$$\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathrm{div}\,\mathbf{n} = -\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathrm{div}\,\mathbf{n}$$

и справедливы формулы

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,(\varphi\mathbf{u}) &= -\mathbf{u}\times\mathrm{grad}\varphi + \varphi\mathrm{rot}\,\mathbf{u},\\ \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + \mathbf{u}\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathrm{div}\,\mathbf{u},\end{aligned}$$

то сразу же приходим к уравнению

$$\begin{aligned}\mathrm{rotdiv}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = 2(\mathrm{div}\,\mathbf{n})\mathrm{rot}\,\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\mathrm{graddiv}\,\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathrm{rot}\,\mathbf{n} -& \\ -((\mathrm{rot}\,\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n},&\end{aligned}$$

---

[6]Мы не проводим здесь детальных рассуждений, отсылая читателя за подробностями к монографии [2].

откуда и следует (16).

Принимая во внимание соотношение

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{n} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n},$$

приходим к уравнению

$$2(\operatorname{div}\mathbf{n})\operatorname{rot}\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{n} - \mathbf{n}\times\Delta\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\operatorname{rot}\mathbf{n} - \\ -((\operatorname{rot}\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{17}$$

В двумерном случае (т.е. когда $\mathbf{n}$ является плоским векторным полем) из (17) получается единственное существенное скалярное уравнение. Считая, что проекция вектора $\operatorname{rot}\mathbf{n}$ на третью координатную ось равна $|\operatorname{rot}\mathbf{n}|$, и учитывая равенство $((\operatorname{rot}\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} = \mathbf{0}$, выполняющееся в двумерном случае, в итоге имеем простое и симметричное уравнение

$$2(\operatorname{div}\mathbf{n})\,|\operatorname{rot}\mathbf{n}| + \mathbf{n}\cdot\operatorname{grad}|\operatorname{rot}\mathbf{n}| - \mathbf{n}^*\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{n} = 0, \tag{18}$$

где $\mathbf{n}^*$ — дополнительное векторное поле, получающееся в результате поворота в плоскости вектора $\mathbf{n}$ против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны, указываемой третьим координатным направлением, которое мы сонаправим с вектором $\operatorname{rot}\mathbf{n}$ (см. рис. 2). Заметим, что векторные линии поля $\mathbf{n}$ и дополнительного поля $\mathbf{n}^*$ представляют собой изостатические траектории в плоскости течения.

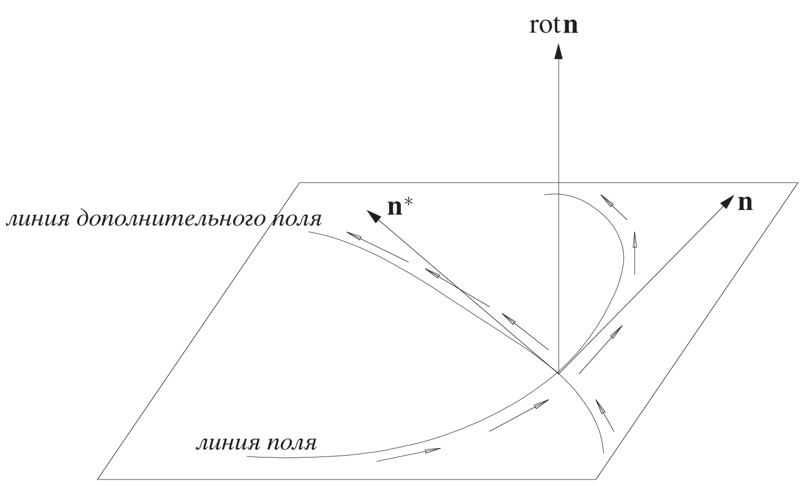

Рис. 2. Ориентация вектора поля $\mathbf{n}$ и дополнительного вектора $\mathbf{n}^*$ в плоскости течения

Последнее уравнение представим в следующей форме:

$$2(\operatorname{div}\mathbf{n})\,|\operatorname{rot}\mathbf{n}| + \frac{\partial}{\partial S}|\operatorname{rot}\mathbf{n}| - \frac{\partial}{\partial S^*}\operatorname{div}\mathbf{n} = 0, \tag{19}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial S} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}, \quad \frac{\partial}{\partial S^*} = \mathbf{n}^*\cdot\boldsymbol{\nabla} \tag{20}$$

есть операторы дифференцирования по направлению основного $\mathbf{n}$ и дополнительного $\mathbf{n}^*$ векторов.

На основании формулы Гамильтона (см., например: Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990, с. 23, 24)

$$\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n} = \kappa\mathbf{n}^*, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ — вектор кривизны траекторий поля $\mathbf{n}$, κ — кривизна траекторий поля $\mathbf{n}$, и учитывая, что расходимость поля $\mathbf{n}$ равна кривизне ортогональных траекторий поля (т.е. траекторий дополнительного поля $\mathbf{n}^*$), имеем

$$|\operatorname{rot}\mathbf{n}| = \kappa, \quad \operatorname{div}\mathbf{n} = \kappa^*, \tag{22}$$

где

$$\kappa = \frac{\partial\theta}{\partial S}, \quad \kappa^* = \frac{\partial\theta}{\partial S^*}. \tag{23}$$

Принимая во внимание деривационное соотношение (см. [2])

$$\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial}{\partial S^*}\theta - \frac{\partial}{\partial S^*}\frac{\partial}{\partial S}\theta + \left(\frac{\partial\theta}{\partial S}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial S^*}\right)^2 = 0, \tag{24}$$

из (19), (24) получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 2\kappa\kappa^* + \dfrac{\partial\kappa}{\partial S} - \dfrac{\partial\kappa^*}{\partial S^*} = 0, \\ \dfrac{\partial\kappa^*}{\partial S} - \dfrac{\partial\kappa}{\partial S^*} + \kappa^2 + (\kappa^*)^2 = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что полученная система уравнений принадлежит к гиперболическому типу. Складывая и вычитая уравнения этой системы, приходим к следующей системе соотношений:

$$\begin{cases} (\kappa+\kappa^*)^2 + \sqrt{2}\dfrac{\partial}{\partial\overline{S}}(\kappa+\kappa^*) = 0, \\ (\kappa-\kappa^*)^2 - \sqrt{2}\dfrac{\partial}{\partial\overline{S^*}}(\kappa-\kappa^*) = 0, \end{cases} \tag{26}$$

в которой на основании формул преобразования производных по направлению (см. второй раздел настоящей работы)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\overline{S}} &= \frac{\partial}{\partial S} - \frac{\partial}{\partial S^*}, \\ \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\overline{S^*}} &= \frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial S^*} \end{aligned} \tag{27}$$

есть операторы дифференцирования по направлению $\overline{\mathbf{n}}$, отклоняющемуся по ходу часовой стрелки на угол $\pi/4$ от направления поля $\mathbf{n}$, и направлению $\overline{\mathbf{n}^*}$, отклоняющемуся против хода часовой стрелки на угол $\pi/4$ от направления поля $\mathbf{n}$ (см. рис. 3).

Указанные направления определяют два семейства линий скольжения (или характеристических линий), кривизны которых определяются равен-

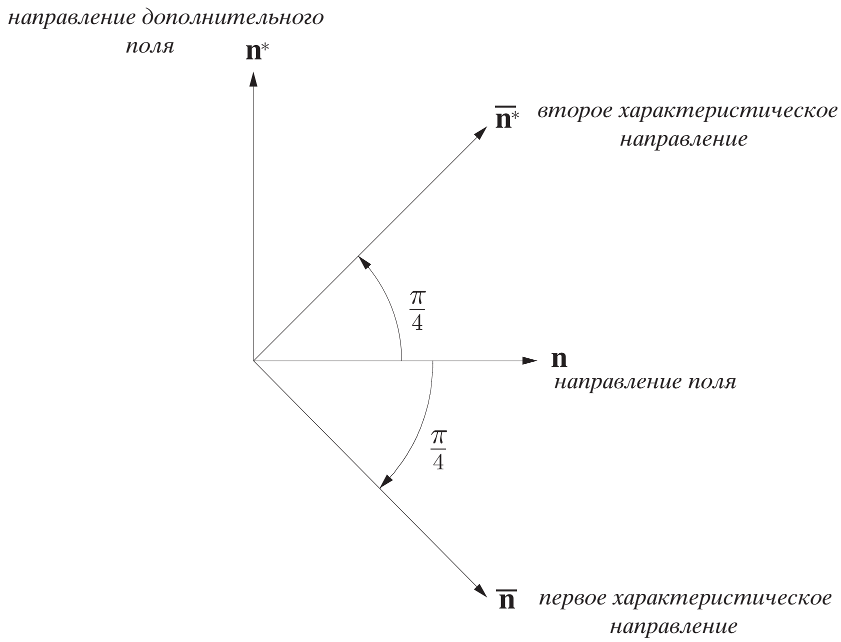

Рис. 3. Ориентации векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}^*$, $\overline{\mathbf{n}}$, $\overline{\mathbf{n}^*}$ в плоскости течения

ствами

$$
\begin{aligned}
\overline{\kappa} &= \frac{\kappa^* - \kappa}{\sqrt{2}} = -\frac{\partial\theta}{\partial\overline{S}},\\
\overline{\kappa^*} &= \frac{\kappa^* + \kappa}{\sqrt{2}} = \frac{\partial\theta}{\partial\overline{S^*}}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Переписывая систему (26) с помощью кривизн линий скольжения, получаем интегрируемые соотношения

$$
\frac{\partial}{\partial\overline{S}}\frac{1}{\overline{\kappa^*}} = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial\overline{S^*}}\frac{1}{\overline{\kappa}} = 1. \tag{29}
$$

С помощью этих соотношений сразу же устанавливается вторая теорема Генки: при движении вдоль выделенной характеристической линии одного семейства радиус кривизны характеристической линии другого семейства изменяется на величину пройденного вдоль первой характеристики расстояния.

Дальнейшее развитие теории полей скольжения уже не представляет сколько-нибудь существенных трудностей.

4. Если исходить из пространственных уравнений теории пластичности, сформулированных в триортогональной изостатической координатной сетке, то можно быстро получить все соотношения плоской задачи, просто адаптируя их к двумерному случаю. Мы приведем соответствующие рассуждения в обозначениях, принятых в [2, 3].

В условиях плоского деформированного состояния имеем $d_3 = 0$, $du_{<3>} = 0$, $d\varepsilon_3^P = 0$, $\kappa_{31} = 0$, $\kappa_{32} = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{13}$, $\kappa_2 = \kappa_{23}$. В плоскости течения имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое — номером 2. Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = \kappa_{13} = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = \kappa_{23} = d_2\theta. \tag{30}$$

Имеется всего одно существенное деривационное соотношение, которое имеет вид

$$d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0. \tag{31}$$

Оно удовлетворяется тождественно в силу соотношений $\kappa_1 = -d_1\theta$, $\kappa_2 = d_2\theta$ и равенства

$$d_2d_1 - d_1d_2 = -\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2.$$

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе—Максвелла

$$\begin{aligned} &d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) = 0, \\ &d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

к которым следует присоединить условие пластичности $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$.

Эта система, как нетрудно заметить, гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений и являются линиями скольжения.

Вводя в систему (32) производные вдоль характеристических направлений $\overline{d_1}$, $\overline{d_2}$ (примем, что первая характеристика $\overline{1}$ отклоняется от первого главного направления 1, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки, а вторая характеристика $\overline{2}$ отклоняется от направления 1 на угол $\pi/4$ против хода часовой стрелки, тогда можно воспользоваться формулами преобразования операторов d_1, d_2, вывод которых был дан во втором разделе настоящей работы)

$$\overline{d_1} = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2} = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \tag{33}$$

складывая, а затем вычитая уравнения этой системы, получим интегрируемые соотношения Генки вдоль характеристик:

$$\overline{d_1}(\sigma_1 - 2k\theta) = 0, \quad \overline{d_2}(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \tag{34}$$

Обозначим через $d\mathbf{S}$ тензор второго ранга, определяемый соотношением

$$d\mathbf{S} = \boldsymbol{\nabla} \times (d\boldsymbol{\varepsilon}) \times \boldsymbol{\nabla}, \tag{35}$$

где $d\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор приращения полных деформаций. В этом уравнении безразличен порядок выполнения операции векторного умножения. Тензор $d\mathbf{S}$ называется тензором несовместности.

Уравнения совместности для приращения тензора полных деформаций с использованием тензора несовместности записывается просто как

$$d\mathbf{S} = \mathbf{0}. \tag{36}$$

Условия совместности деформаций (36) являются необходимыми и (в случае поверхностно односвязной области в пространстве) достаточными для возможности представления поля $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в данной Коши форме

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

через *однозначное* поле приращений перемещений $d\mathbf{u}$.

В случае плоской деформации условия совместности в приращениях деформаций в изостатической координатной сетке сводятся к одному уравнению

$$\begin{aligned} dS_{<33>} = -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - d_2 d_2 d\varepsilon_1 - (d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ -\kappa_2 d_1(2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1 d_2(2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Интересно заметить, что в случае плоской деформации компонента $dS_{<33>}$ тензора $d\mathbf{S}$ может быть вычислена по формуле

$$dS_{<33>} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta d\varepsilon_{jj},$$

или

$$dS_{<33>} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\nabla} - \Delta \mathrm{tr}\, d\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{39}$$

откуда в силу несжимаемости плоского пластического течения

$$\mathrm{tr}\, d\boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

следует симметричная формула

$$dS_{<33>} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\nabla}.$$

Соотношения Коши (37) в случае плоского деформированного состояния относительно изостатических координат имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_1 + d_2 & -\kappa_2 + d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{41}$$

Следовательно, условие несжимаемости и соосности тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций в сетке линий главных напряжений можно представить как

$$\begin{aligned} (\kappa_2 + d_1)du_{<1>} + (\kappa_1 + d_2)du_{<2>} = 0, \\ (-\kappa_1 + d_2)du_{<1>} + (-\kappa_2 + d_1)du_{<2>} = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

С помощью условия несжимаемости $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$ из уравнения (38) исключается $d\varepsilon_2$, поэтому получается уравнение только относительно $d\varepsilon_1$. По главной части этого уравнения

$$d_1 d_1 d\varepsilon_1 - d_2 d_2 d\varepsilon_1 + \ \cdots \ = 0$$

легко устанавливается, что кинематические уравнения принадлежат к гиперболическому типу и характеристики являются линиями скольжения.

Ясно, что уравнение второго порядка для $d\varepsilon_1$ может быть заменено системой двух уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$u = \ln|d\varepsilon_1|, \quad p = d_1 u, \quad q = d_2 u. \tag{43}$$

Переменная u — логарифмическое приращение деформации.

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} d_1 d\varepsilon_1 &= p e^u, \\ d_2 d\varepsilon_1 &= q e^u, \\ d_1 d_1 d\varepsilon_1 &= e^u d_1 p + e^u p^2, \\ d_2 d_2 d\varepsilon_1 &= e^u d_2 q + e^u q^2, \end{aligned}$$

уравнение совместности деформаций представим в форме

$$d_2 q - d_1 p = p^2 - q^2 + 3(\varkappa_2 p - \varkappa_1 q) + 2(d_1\varkappa_2 - d_2\varkappa_1 + \varkappa_2^2 - \varkappa_1^2). \tag{44}$$

Заметим далее, что в силу

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = -\varkappa_1 d_1 + \varkappa_2 d_2 \tag{45}$$

справедливо соотношение

$$d_2 p - d_1 q = -\varkappa_1 p + \varkappa_2 q. \tag{46}$$

Следовательно, относительно величин p и q имеем систему уравнений первого порядка (44), (46).

Вводя обозначения

$$P = d_1\theta, \quad Q = d_2\theta,$$

систему кинематических уравнений можно привести к следующему симметричному виду:

$$\begin{aligned} &d_2 q - d_1 p = p^2 - q^2 + 3(pQ + qP) + 2(d_1 Q + d_2 P + Q^2 - P^2), \\ &d_2 p - d_1 q = pP + qQ. \end{aligned} \tag{47}$$

Напомним, что здесь величины p и q — производные вдоль линий главных напряжений от логарифмического приращения деформации.

Уравнения статики также преобразуются к симметричной форме относительно величин P и Q. Действительно, уравнения равновесия (32) с помощью обозначений $P^* = d_1\sigma_1/(2k)$, $Q^* = d_2\sigma_1/(2k)$ представляются как

$$P^* = -Q, \quad Q^* = -P. \tag{48}$$

На основании (45) находим

$$d_2 P^* - d_1 Q^* = -\varkappa_1 P^* + \varkappa_2 Q^* = PP^* + QQ^*$$

и в силу (48) —

$$d_1 P - d_2 Q = -2PQ.$$

Переписывая в новых обозначениях деривационную формулу (31), имеем

$$d_2 P - d_1 Q = P^2 + Q^2.$$

Таким образом, получаем систему статических уравнений плоской задачи в форме:

$$\begin{aligned} d_1P - d_2Q &= -2PQ, \\ d_2P - d_1Q &= P^2 + Q^2. \end{aligned} \tag{49}$$

Последняя система уравнений позволяет сформулировать ряд новых результатов, касающихся геометрии поля изостат[7].

Преобразуя систему уравнений (49) к характеристическим переменным (см. (33)), находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,\overline{d_1}(P+Q) &= -(P+Q)^2, \\ \sqrt{2}\,\overline{d_2}(P-Q) &= (P-Q)^2, \end{aligned}$$

или

$$\overline{d_1}\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2}\frac{1}{P-Q} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{50}$$

Вспоминая определение величин P и Q, получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\overline{d_1}\frac{1}{\kappa_2-\kappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2}\frac{1}{\kappa_2+\kappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{51}$$

т.е. обратная разность (сумма) кривизн изостатических линий при продвижении вдоль первой (второй) характеристики изменяется пропорционально пройденному пути[8].

Не представляет труда и вывод соотношений для приращений перемещений вдоль характеристических направлений. Складывая уравнения (42), а затем вычитая одно из другого, с учетом (33) находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,\overline{d_2}(du_{<1>} + du_{<2>}) + (\kappa_2-\kappa_1)(du_{<1>} - du_{<2>}) &= 0, \\ \sqrt{2}\,\overline{d_1}(du_{<1>} - du_{<2>}) + (\kappa_2+\kappa_1)(du_{<1>} + du_{<2>}) &= 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Замечая далее, что при повороте осей главных напряжений $\underline{1}$, $\underline{2}$ на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки получаем характеристические оси $\overline{1}$, $\overline{2}$, так что

[7]См. оригинальную работу: Радаев Ю.Н. Дополнительные теоремы теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – №2(32). – 2004. – С. 41–61.

[8]Этот результат — аналог второй теоремы Генки о геометрии поля скольжения в состоянии плоской деформации (см., например, [1], с. 218). Вторая теорема Генки непосредственно следует из (51). Действительно, применяя (33) к θ, находим

$$\overline{\kappa_1} = \frac{\kappa_2+\kappa_1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{\kappa_2} = \frac{\kappa_2-\kappa_1}{\sqrt{2}},$$

где $\overline{\kappa_1} = -\overline{d_1}\theta$, $\overline{\kappa_2} = \overline{d_2}\theta$ — кривизны характеристических линий, что означает

$$\overline{d_1}\frac{1}{\overline{\kappa_2}} = 1, \quad \overline{d_2}\frac{1}{\overline{\kappa_1}} = 1,$$

а эти соотношения как раз и составляют содержание второй теоремы Генки: при движении вдоль выделенной характеристической линии одного семейства радиус кривизны характеристической линии другого семейства изменяется на величину пройденного вдоль первой характеристики расстояния.

физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно указанных осей вычисляются как ($du_{<\bar{1}>}$, $du_{<\bar{2}>}$ — физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно характеристических осей)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}du_{<\bar{1}>} &= du_{<1>} - du_{<2>},\\ \sqrt{2}du_{<\bar{2}>} &= du_{<1>} + du_{<2>}.\end{aligned}$$

Следовательно, для физических компонент[9] приращения вектора перемещений имеем

$$\begin{aligned}\overline{d_1}du_{<\bar{1}>} + \frac{\kappa_2+\kappa_1}{\sqrt{2}}du_{<\bar{2}>} &= 0,\\ \overline{d_2}du_{<\bar{2}>} + \frac{\kappa_2-\kappa_1}{\sqrt{2}}du_{<\bar{1}>} &= 0.\end{aligned}\tag{53}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\frac{\kappa_2-\kappa_1}{\sqrt{2}} &= \frac{d_2+d_1}{\sqrt{2}}\theta = \overline{d_2}\theta,\\ \frac{\kappa_2+\kappa_1}{\sqrt{2}} &= \frac{d_2-d_1}{\sqrt{2}}\theta = -\overline{d_1}\theta,\end{aligned}$$

из (53) сразу же получаем соотношения Гейрингер (H. Geiringer, 1930 г.) вдоль характеристик

$$\begin{aligned}\overline{d_1}du_{<\bar{1}>} - du_{<\bar{2}>}\overline{d_1}\theta &= 0,\\ \overline{d_2}du_{<\bar{2}>} + du_{<\bar{1}>}\overline{d_2}\theta &= 0,\end{aligned}\tag{54}$$

или на основании $\overline{\kappa_1} = -\overline{d_1}\theta$, $\overline{\kappa_2} = \overline{d_2}\theta$

$$\begin{aligned}\overline{d_1}du_{<\bar{1}>} + \overline{\kappa_1}du_{<\bar{2}>} &= 0,\\ \overline{d_2}du_{<\bar{2}>} + \overline{\kappa_2}du_{<\bar{1}>} &= 0.\end{aligned}\tag{55}$$

Напомним, что производные по характеристическим направлениям $\bar{1}$, $\bar{2}$ связаны с производными по главным направлениям 1, 2 следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\overline{d_1} &= \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial \overline{S}_1} = d_1 - d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} - \frac{\partial}{\partial S_2},\\ \sqrt{2}\,\overline{d_2} &= \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial \overline{S}_2} = d_1 + d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} + \frac{\partial}{\partial S_2}.\end{aligned}$$

Следовательно, соотношения Гейрингер (54) могут быть представлены в развернутой форме как

$$\begin{aligned}\frac{\partial du_{<\bar{1}>}}{\partial \overline{S}_1} - du_{<\bar{2}>}\frac{\partial\theta}{\partial \overline{S}_1} &= 0,\\ \frac{\partial du_{<\bar{2}>}}{\partial \overline{S}_2} + du_{<\bar{1}>}\frac{\partial\theta}{\partial \overline{S}_2} &= 0.\end{aligned}\tag{56}$$

Вводя в уравнения (54) вместо приращений перемещений $du_{<\bar{1}>}$, $du_{<\bar{2}>}$ физические компоненты скорости $v_{<\bar{1}>}$, $v_{<\bar{2}>}$ относительно ортогональной

[9] Относительно характеристических направлений $\bar{1}$ и $\bar{2}$.

сетки характеристических линий, имеем

$$
\begin{aligned}
&\overline{d_1}v_{<\bar{1}>} - v_{<\bar{2}>}\overline{d_1}\theta = 0,\\
&\overline{d_2}v_{<\bar{2}>} + v_{<\bar{1}>}\overline{d_2}\theta = 0.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Соотношения Гейрингер (57) устанавливают, что скорости удлинений прямолинейных элементов, касающихся линий скольжения, равны нулю. Если через $\dot\varepsilon_{<\overline{11}>}$, $\dot\varepsilon_{<\overline{22}>}$, $\dot\varepsilon_{<\overline{12}>}$ обозначить физические компоненты тензора скорости деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в характеристической системе координат, соотношения Гейрингер будут эквивалентны уравнениям

$$
\dot\varepsilon_{<\overline{11}>} = 0, \quad \dot\varepsilon_{<\overline{22}>} = 0.
$$

Связывая с помощью тензорного закона преобразования декартовы компоненты $\dot\varepsilon_{11}$, $\dot\varepsilon_{22}$, $\dot\varepsilon_{12}$ тензора $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ с его компонентами относительно характеристической координатной системы $\dot\varepsilon_{<\overline{11}>}$, $\dot\varepsilon_{<\overline{22}>}$, $\dot\varepsilon_{<\overline{12}>}$, имеем

$$
\begin{aligned}
\dot\varepsilon_{<\overline{11}>} &= \dot\varepsilon_{11}\cos^2(\theta - \frac{\pi}{4}) + 2\dot\varepsilon_{12}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \dot\varepsilon_{22}\sin^2(\theta - \frac{\pi}{4}),\\
\dot\varepsilon_{<\overline{22}>} &= \dot\varepsilon_{11}\cos^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 2\dot\varepsilon_{12}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \dot\varepsilon_{22}\sin^2(\theta + \frac{\pi}{4}),
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
\dot\varepsilon_{<\overline{11}>} = \cos(\theta - \frac{\pi}{4})&\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\right) +\\
&+ \sin(\theta - \frac{\pi}{4})\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\right),\\
\dot\varepsilon_{<\overline{22}>} = \cos(\theta + \frac{\pi}{4})&\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})\right) +\\
&+ \sin(\theta + \frac{\pi}{4})\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})\right).
\end{aligned}
$$

Записывая полученные уравнения с помощью операторов дифференцирования по характеристическим направлениям, находим

$$
\begin{aligned}
\dot\varepsilon_{<\overline{11}>} &= \cos(\theta - \frac{\pi}{4})\overline{d_1}v_1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{4})\overline{d_1}v_2,\\
\dot\varepsilon_{<\overline{22}>} &= \cos(\theta + \frac{\pi}{4})\overline{d_2}v_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4})\overline{d_2}v_2,
\end{aligned}
$$

что при условиях $\dot\varepsilon_{<\overline{11}>} = 0$, $\dot\varepsilon_{<\overline{22}>} = 0$ позволяет сразу же найти соотношения вдоль характеристик

$$
\begin{aligned}
&\cos(\theta - \frac{\pi}{4})\overline{d_1}v_1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{4})\overline{d_1}v_2 = 0,\\
&\cos(\theta + \frac{\pi}{4})\overline{d_2}v_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4})\overline{d_2}v_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Рассмотрим далее физические компоненты скорости $v_{<\bar{1}>}$, $v_{<\bar{2}>}$ относительно характеристической координатной системы, связав из с декартовыми компонентами скорости с помощью тензорного закона преобразования

$$
\begin{aligned}
v_{<\bar{1}>} &= v_1\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + v_2\sin(\theta - \frac{\pi}{4}),\\
v_{<\bar{2}>} &= v_1\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + v_2\sin(\theta + \frac{\pi}{4}).
\end{aligned}
$$

Дифференцируя последние уравнения вдоль первого и второго характеристических направлений соответственно и учитывая

$$v_1 = v_{<\bar{1}>} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - v_{<\bar{2}>} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}),$$
$$v_2 = -v_{<\bar{1}>} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + v_{<\bar{2}>} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}),$$

получаем

$$\overline{d_1} v_{<\bar{1}>} = \left(\cos(\theta - \frac{\pi}{4})\overline{d_1} v_1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{4})\overline{d_1} v_2\right) + v_{<\bar{2}>}\overline{d_1}\theta,$$
$$\overline{d_2} v_{<\bar{2}>} = \left(\cos(\theta + \frac{\pi}{4})\overline{d_2} v_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4})\overline{d_2} v_2\right) - v_{<\bar{1}>}\overline{d_2}\theta,$$

и, принимая во внимание, что выражения в скобках в правых частях равны нулю на основании (58), снова приходим к соотношениям Гейрингер в форме (57).

Соотношения Гейрингер, как показывает внимательный анализ их вывода, остаются справедливыми при плоской несжимаемой деформации любого изотропного тела[10]. Их появление в рамках теории плоской задачи теории пластичности — лишь дань традиции.

Литература

[1] Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.

[2] Радаев, Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.) / Ю.Н. Радаев. – Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. – 340 с. (Электронная копия опубликована в электронной библиотеке системы федеральных образовательных порталов `http://window.edu.ru/window/library` (рег. №63-01/0023); см. также `http://mss.ssu.samara.ru/metodichka/psmtp.pdf` или электронную библиотеку сайта EqWorld—Мир математических уравнений `http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Radaev2004ru.pdf`)

[3] Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород / Д.Д. Ивлев [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 832 с.

Поступила в редакцию 3/*III*/2008;
в окончательном варианте — 3/*III*/2008.

[10]Поскольку для их вывода в рамках теории плоского деформированного состояния достаточно условия несжимаемости и условия коориентированности главных осей тензора напряжений и тензора скоростей деформаций

A NEW STUDY OF PLANE STRAIN STATE OF A PERFECTLY PLASTIC SOLID

 Y.N. Radayev[11]

A new approach to derivating and study of plane strain state of a perfectly plastic solid is proposed. Unlike previous discussions in the perfect plasticity originating from the studies given by H. Hencky and L. Prandtl all requisite equations are obtained from three-dimensional equations formulated for states corresponding to an edge of the Tresca prism simply by reducing their dimension.

Keywords: *perfectly plastic solid, plane strain state, slip lines, Tresca prism.*

Paper received 3/*III*/2008.
Paper accepted 3/*III*/2008.

[11]Radayev Yuri Nickolaevich (`radayev@ssu.samara.ru`), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.