

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАКОПЛЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 2008 П.В. Манахов, О.Б. Федосеев¹

В статье изложена проблема расчета пластичных тел по теории пластического течения. Предложен альтернативный метод, основанный на решении системы нелинейных уравнений программными средствами, реализующими алгоритм минимизации невязки функции. Представлены примеры решения типовых задач механики, используя предлагаемый подход к определению пластических деформаций. Осуществлена оценка перспектив данного метода.

Ключевые слова: пластическая деформация, метода конечных элементов, система нелинейных уравнений.

1. Теория пластичности является одним из разделов физически нелинейной механики деформируемого твердого тела. Наибольшее распространение получили два варианта теории пластичности — теория пластического течения и деформационная теория пластичности, являющаяся частным случаем теории течения [1].

Для решения поставленной задачи о расчете пластических деформаций используется второй вариант теории пластичности по причине больших пластических деформаций и наличия сложного нагружения, которые характерны при обработке металлов давлением, резанием. Именно эти технологические процессы представляют интерес для авторов статьи.

В основе теории пластического течения лежит соотношение, связывающее компоненты приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$ с поверхностью текучести F (ассоциированный закон) [2]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1)$$

где λ — некоторый бесконечно малый скалярный множитель [3]; σ_{ij} — составляющие тензора напряжения. Соотношение (1) не интегрируется, то есть

¹Манахов Павел Владимирович (pavel1991@avtograd.ru), Федосеев Олег Борисович (office@tltsu.ru), кафедра машиностроения Тольяттинского государственного университета, 445667, Россия, Самарская обл., г. Тольятти, ул. Белорусская, 16 в.

не сводится к конечному соотношению между компонентами напряжения и деформации, так как содержит неизвестный скалярный множитель λ , для определения которого нужно располагать дополнительным соотношением.

Другая проблема в расчете пластичности по теории течения состоит в том, что связь между напряжениями и деформациями присутствует лишь с момента достижения напряжениями поверхности текучести $F(\sigma) = 0$. Кроме того, при задании приращения нагрузки напряжения могут выйти за пределы поверхности текучести. Следовательно, на каждом шаге расчета необходимо изменять напряжения так, чтобы выполнялось условие текучести.

Следует отметить, что для решения неоднородных задач пластичности применимы только численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ).

2. Современная методика расчета пластических течений [1] предполагает построение упругопластической матрицы $\mathbf{D}_{ep}$, связывающей приращения напряжений и деформаций:

$$d\sigma = \mathbf{D}_{ep} d\epsilon, \quad (2)$$

где $\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D} - \mathbf{D}_p = \mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{D}(H + \mathbf{A}^T\mathbf{D}\mathbf{A})^{-1}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_p$ — упругая и пластическая матрицы соответственно; $\mathbf{A} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$; $H = \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi \frac{1}{\lambda}$; χ — параметр упрочнения. Вычисление величины H проводят по диаграмме одноосного растяжения материала как тангенс угла наклона в точке, соответствующей текущему уровню деформаций [1, 4].

Очевидно, что процедура установления зависимости (2) характеризуется трудоемкостью, которая связана с необходимостью нахождения величины H (а, следовательно, множителя λ в формуле (1)) по экспериментальным данным на каждом шаге вычислений.

К настоящему времени для определения накопленных пластических деформаций, напряжений и перемещений достаточно хорошо разработаны различные итерационные методы. Основные из них: метод переменной и касательной жесткости [4, 5], метод начальных напряжений и начальных деформаций [4, 6]. Суть каждого из этих методов сводится к построению системы линейных уравнений вида:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{K}_p\Delta\mathbf{u} \quad (3)$$

и решения полученной системы итерационным способом [1]:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u}_n = \Delta\mathbf{P} + \mathbf{K}_p\Delta\mathbf{u}_{n-1} \quad (4)$$

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$ — упругая матрица жесткости; $\mathbf{K}_p = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_p \mathbf{B} dV$ — пластическая матрица жесткости; $\Delta\mathbf{P}$ — приращение нагрузки; $\Delta\mathbf{u}$ — приращение перемещения; n — номер итерации; $\mathbf{B}$ — так называемая матрица градиентов, содержащая производные от перемещений. Методом начальных деформаций и напряжений вносят изменения в $\Delta\mathbf{P}$ на каждой итерации:

$$\Delta \mathbf{P} = \int_V \mathbf{B}^T \Delta \sigma dV, \quad \Delta \sigma = \mathbf{D} \Delta \varepsilon + \Delta \sigma_0 \quad \text{— для начальных напряжений,} \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{P} = \int_V \mathbf{B}^T \Delta \varepsilon dV, \quad \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_0 + \frac{\Delta \sigma}{\mathbf{D}} \quad \text{— для начальных деформаций,} \quad (6)$$

где $\Delta \sigma_0$ — приращение начальных напряжений; $\Delta \varepsilon_0$ — приращение начальных деформаций.

Существенным недостатком метода начальных деформаций является его неприменимость при рассмотрении идеальной пластичности, поскольку в этом случае деформации при заданных напряжениях нельзя определить однозначно.

Методом переменной и касательной жесткости вносят изменения в матрицу упругой жесткости $\mathbf{K}$; в последнем случае расчет ведут методом Ньютона–Рафсона. Одним из недостатков метода переменной жесткости является то, что на каждой итерации приходится заново строить матрицы жесткости и решать полученные уравнения.

Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока отличие искомых приращений на соседних итерациях не станет меньшим наперед заданного малого числа.

Несмотря на наглядность и очевидность данных итерационных процессов, использование их в расчетной программе ведет не только к увеличению ее объема, но также сопровождается сложностью оценки точности результатов и контроля количества итераций. Кроме того, как уже отмечалось выше, на каждом шаге очередного приращения нагрузки требуется проверка условия текучести, которое в обобщенной форме имеет вид:

$$\sigma_e - \sigma_T = 0, \quad (7)$$

где σ_e — эквивалентное напряжение, вычисление которого зависит от выбора гипотезы начала текучести (гипотезы Мизеса, Треска–Сен-Венана, Мора–Кулона и т.д.); σ_T — экспериментально определяемый предел текучести.

3. Основная роль предлагаемого метода вычисления накопленной пластической деформации состоит в расширении круга рассматриваемых задач, упрощении структуры программы, экономии памяти ЭВМ и возможности оценивать качество вычислительного процесса.

В основе данного метода лежит решение системы нелинейных уравнений, состоящей из соотношений Прандтля–Рейса (для трехмерного случая шесть уравнений) и условия пластичности, которое для определенности дается в форме Мизеса:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = \lambda s_{ij} \\ \sigma_i - \sigma_T = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где λs_{ij} — компоненты девиатора напряжения;

$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23})^2 + \sigma_{31}^2}$ — интенсивность напряжений.

Дифференциальные уравнения Прандтля–Рейса представляются в конечно-разностной форме. Переходя к скоростям деформации, получается:

$$\frac{\epsilon_{ij}^{p(k)} - \epsilon_{ij}^{p(k-1)}}{\Delta t^{(k)}} = \lambda s_{ij}^{(k-1)}, \quad (9)$$

где k — номер шага вычислений; $\Delta t^{(k)}$ — интервал, принятый на k -м шаге времени.

Таким образом, для каждого конечного элемента в общем трехмерном случае имеются семь уравнений с семью неизвестными ϵ_{ij}, λ (здесь речь идет о симплекс-элементе, деформации и напряжения внутри которого не меняются).

Для решения данной системы нелинейных уравнений обращаются к целевой функции, алгоритм работы которой использует начальные значения искомых величин и базируется на минимизации суммы квадратов входящих в систему функций методами Гаусса–Ньютона и Левенберга–Марквардта [7]. Соответствующим обращением к данной функции можно управлять процессом поиска решений, в частности устанавливать максимальное количество обращений к функциям системы уравнений, устанавливать максимальное количество итераций, прекращать итерации при достижении требуемой точности значений функций. Общая последовательность вычисления пластических деформаций такова. Пусть имеется зависимость пути s движения внешней силы от времени t . Заданный интервал времени (или общий путь движения внешней силы) разбивается на определенное число шагов (равных или переменных). На начальном этапе решается упругая задача до того момента, когда напряжения в конечном элементе не выйдут на поверхность текучести. Далее ведется пошаговая процедура вычисления пластических деформаций. На первом шаге принимаются нулевые пластические деформации и интенсивность напряжения, равная начальному значению предела текучести. На втором шаге решается система линейных уравнений (3.8), получаются $\epsilon_{ij}^{(1)}, \lambda^{(1)}$. Используя уравнения МКЭ, модифицированные с учетом наличия пластических деформаций, находят узловые перемещения u_k (k — номер узла конечного элемента) конечноэлементной модели. Следующий этап — определение суммарных деформаций ϵ_{ij} :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (10)$$

(тензорная форма записи), вычисление упругих деформаций ϵ_{ij}^e :

$$\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p, \quad (11)$$

напряжений σ_{ij} по закону Гука, а также компонент девиатора напряжений. По известной эмпирической формуле для данного уровня пластических де-

формаций находится предел текучести σ_T и решается система нелинейных уравнений на следующем шаге временного интервала. Процесс повторяется снова для следующего интервала времени Δt и пути s продвижения внешней силы. Закон упрочнения материала выбирается в виде линейной зависимости от накопленных пластических деформаций ϵ^P :

$$\sigma_T = \sigma_{T0} + A\epsilon^P, \quad (12)$$

где σ_{T0} — предел текучести недеформированного материала; A — принятый коэффициент упрочнения.

4. Вышеизложенный подход к определению пластических деформаций используется для решения типовых задач механики. Удобным вычислительным инструментом является программный пакет Matlab. На рис. 1 представлена расчетная схема нагружения тела прямоугольного сечения в случае плоской деформации. Ширина модели $a = 20$ мм; высота модели $h = 20$ мм; модуль упругости материала $E = 2 \times 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$; предел текучести недеформированного материала $\sigma_{T0} = 320$ МПа; количество шагов $n = 100$. Трение между штампом и моделью отсутствует.

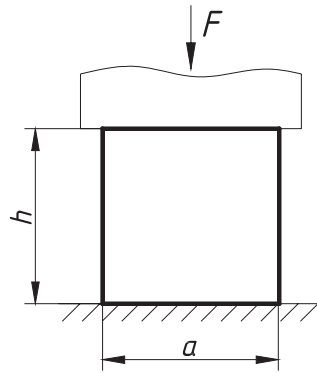


Рис. 1. Схема для анализа плоской деформации при сжатии тела прямоугольного сечения

Согласно [8] $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$, $\sigma_{22} = \text{const}$ (при фиксированном времени), $\epsilon_{11}^e = -\frac{\nu(1+\nu)\sigma_{22}}{E}$, $\epsilon_{22}^e = -\frac{(1-\nu^2)\sigma_{22}}{E}$.

На рис. 2 показано изменение формы тела при давлении штампа $F = \sigma_{22} = 5 \times 10^4$ МПа и коэффициенте упрочнения $A = 105$ МПа. Для данного случая результаты получились следующими: $\lambda_{cp} = 1,68 \times 10^{-6}$ (с·МПа) $^{-1}$; $\epsilon_{11}^P = 0,207$; $\epsilon_{22}^P = -0,290$; $\epsilon_{33}^P = 0,083$ ($\epsilon_{ii}^P = 0$, что соответствует условию несжимаемости материала в пластическом состоянии).

На рис. 3 представлен график зависимости напряжения σ_{22} от коэффициента упрочнения A для рассматриваемой задачи с граничными условиями в перемещениях. Перемещение штампа $\Delta = 5$ мм. Напряжения σ_{22} определялись для следующих коэффициентов упрочнения A : 1×10^5 , 2×10^5 ,

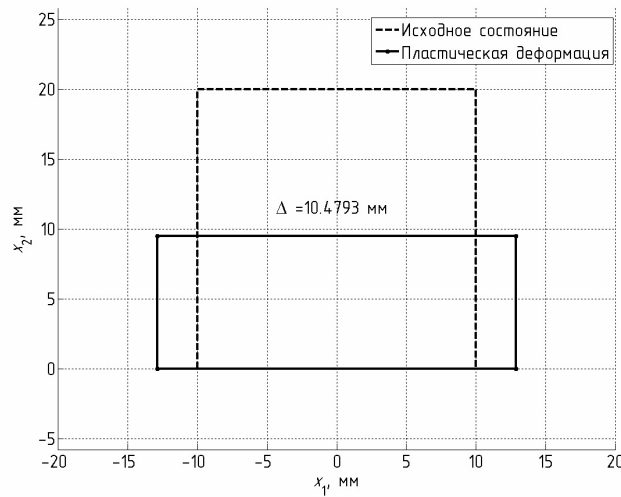


Рис. 2. Изменение формы тела при давлении штампа $F = 5 \times 10^4$ МПа и коэффициенте упрочнения $A = 10^5$ МПа

3×10^5 , 4×10^5 , 5×10^5 , 6×10^5 , 7×10^5 , 8×10^5 , 9×10^5 , 1×10^6 МПа. Полученные данные аппроксимированы кусочными полиномами Эрмита 3-й степени. Пунктирная линия на рис. 2 соответствует напряжению для идеально упругого тела. Это напряжение можно найти на основе упругого сжатия [8]:

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1 - \nu^2)h} \Delta = \frac{2 \times 10^5}{(1 - 0,25^2)20} 5 = 5,33 \times 10^4 \text{ МПа.}$$

Из графика на рис. 3 видно, что при бесконечном увеличении коэффициента упрочнения A напряжение σ_{22} асимптотически приближается к напряжению, соответствующему идеально упругому телу.

Другой пример решения задачи пластичности — вдавливание плоского штампа (рис. 4).

На рис. 3 представлен график зависимости напряжения σ_{22} от коэффициента упрочнения A для рассматриваемой задачи с граничными условиями в перемещениях. Перемещение штампа $\Delta = 5$ мм; количество шагов $n = 50$. Конечные элементы — линейные треугольные в количестве 4664-ти.

На рис. 6 представлены графики распределения напряжений σ_{22} в точках, находящихся в контакте со штампом при различных значениях коэффициента упрочнения A .

Из графиков рис. 6 видно, что при увеличении коэффициента упрочнения A решение стремится к упругому решению, полученному МКЭ. Аналитическое решение упругой задачи, соответствующее графику 1 (рис. 6) дается формулой [2]:

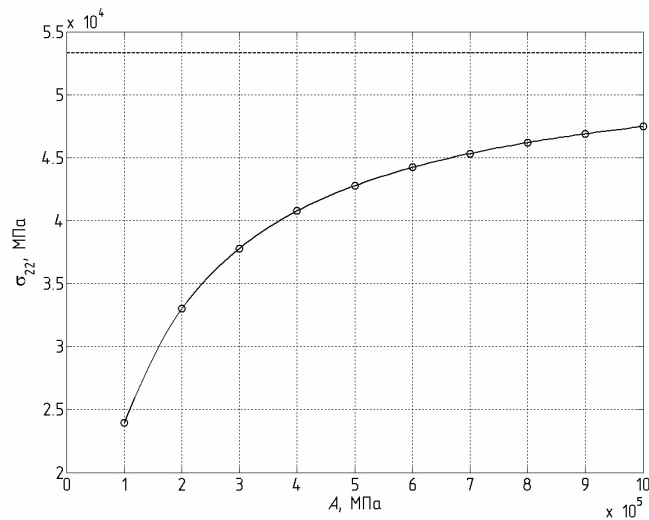


Рис. 3. График зависимости напряжения σ_{22} от коэффициента упрочнения A при перемещении штампа $\Delta = 5$ мм

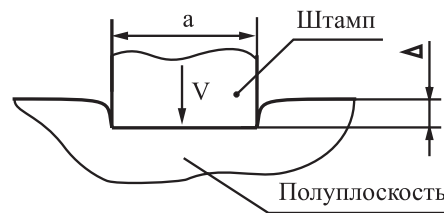


Рис. 4. Расчетная схема для определения деформаций при вдавливании плоского штампа

$$\sigma_{22} = \frac{P}{\pi \sqrt{0,25a^2 - x^2}},$$

где x — абсцисса точек, находящихся в контакте со штампом, из диапазона значений $-\frac{a}{2} \dots \frac{a}{2}$, мм; P — давление штампа, МПа:

$$P = \frac{\pi \mu}{(1 - \nu)(C + \lg(0,25a))} \Delta,$$

где μ — модуль сдвига, МПа; C — постоянная Эйлера, $C = 0,5772156649$.

Для сравнения на рис. 7 дано наглядное решение той же задачи по схеме жестко-пластического тела (решение Прандтля [3]) при тех же начальных условиях. Очевидно, что допущения, принимаемые при таком подходе (пренебрежение упругими деформациями и упрочнением материала) вносит значительную погрешность в результат вычислений и как следствие этого — наличие равномерного напряженного состояния в треугольных областях BDE, AFG и FBC (рис. 6). Сопоставление картин распределения

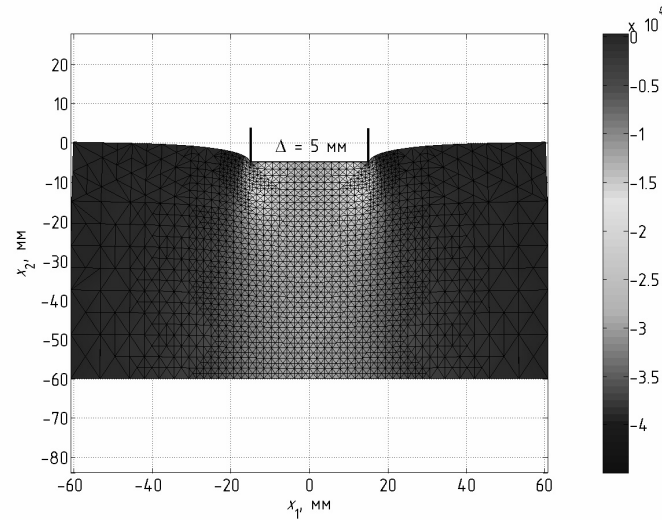


Рис. 5. Решение упругопластической задачи для расчетной схемы по рис. 4 с помощью МКЭ

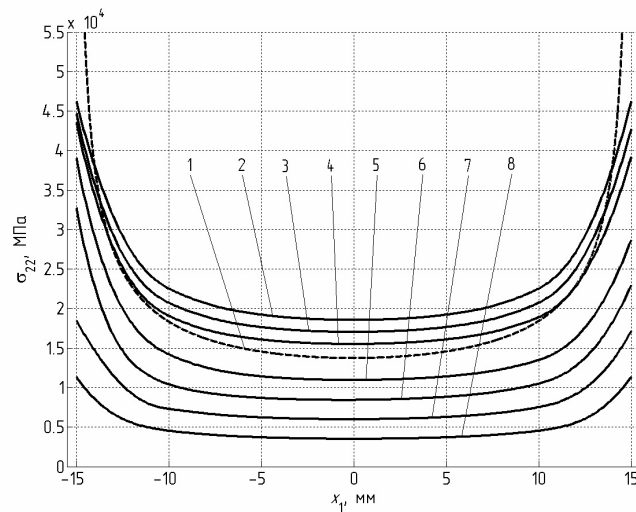


Рис. 6. Распределение контактного напряжения по длине подошвы штампа: 1 — аналитическое решение упругой задачи; 2 — решение упругой задачи МКЭ; 3–8 — решения пластических задач МКЭ; 3 — $A = 1 \times 10^6$ МПа; 4 — $A = 6 \times 10^5$ МПа; 5 — $A = 4 \times 10^5$ МПа; 6 — $A = 3 \times 10^5$ МПа; 7 — $A = 2 \times 10^5$ МПа; 8 — $A = 1 \times 10^5$ МПа

напряжений по этим двум схемам, дает основание полагать, что МКЭ может дать более точное описание поведения тела в состоянии пластического течения.

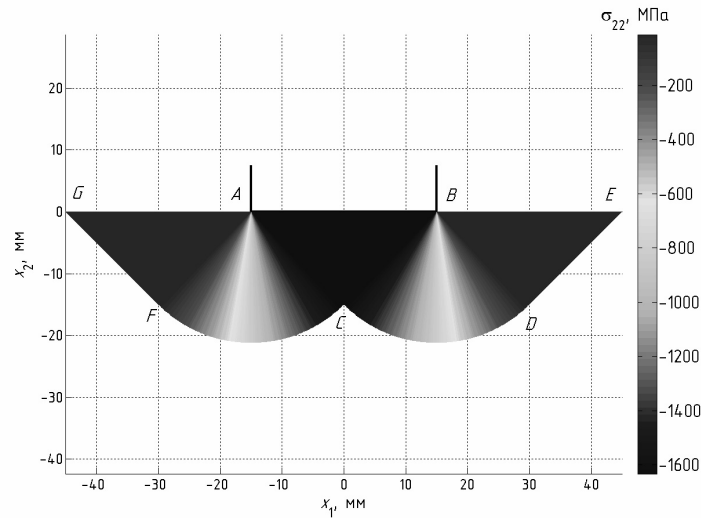


Рис. 7. Решение Прандтля для расчетной схемы по рис. 3

5. В заключение хотелось бы сказать о перспективах предлагаемого метода при решении задач пластичности. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет создавать модели сложных технологических процессов. При этом важную роль играет правильная постановка задачи, корректное описание граничных условий. Естественно, что с подобной проблемой гораздо легче справится инженер-физик, представляющий физическую сущность процесса. Поиск же решений имеющихся определяющих уравнений – прямая задача математика. Вследствие актуальности такого разделения функций можно предположить, что вышеизложенный подход к определению пластических деформаций имеет все шансы получить дальнейшее развитие и способствовать описанию сложных физических явлений.

Литература

- [1] Еременко, С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформированных тел / С.Ю. Еременко. Х.: Изд-во "Основа" при Харьк. ун-те, 1991. — 272 с.
- [2] Горшков, А. Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 416 с.
- [3] Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
- [4] Зенкевич, О. Метод конечных элементов техники / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
- [5] Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. — М.: Мир, 1976. — 464 с.

- [6] Писаренко, Г.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский. — К.: Наук. думка, 1981. — 496 с.
- [7] Кетков, Ю.Л. Matlab 6.x: программирование численных методов / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 672 с.
- [8] Рекач, В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости / В.Г. Рекач. — М.: Высшая школа, 1984. — 383 с.

Поступила в редакцию 14/IV/2008;
в окончательном варианте — 14/IV/2008.

ON ALTERNATIVE METHOD FOR CALCULATING OF PLASTIC DEFORMATION IN THE PLASTIC PROBLEMS WITH USING THE FINITE ELEMENT METHOD

© 2008 P.V. Manahov, O.B. Fedoseev²

In this article the problem of the plastic bodies calculate on the theory of plastic flow has been set out. Alternative method based on a system of nonlinear equations solution by software tools realizing residual minimization algorithm of a function has been proposed. The examples of the routine problems solution of mechanics have been presented using the suggested approach to determination of plastic deformation. Estimate of the method outlooks has been accomplished.

Keywords: *plastic deformation, finite element method, system of nonlinear equations.*

Paper received 14/IV/2008.

Paper accepted 14/IV/2008.

²Manahov Pavel Vladimirovitch (pavel1991@avtograd.ru), Fedoseev Oleg Borisovitch (office@tltsu.ru) Dept. of Mechanical Engineering, Togliatty State University, Togliatty, 445667, Russia.