

ОБТЕКАНИЕ ДВУХ СФЕР НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2008 Н.И. Коновалова,¹ С.И. Мартынов²

Рассматривается обтекание двух сферических частиц потоком вязкой жидкости, скорость которой есть однородная функция координат, периодическая по времени. Учитываются гидродинамическое взаимодействие частиц и их движение. Получено асимптотически приближенное решение. Вычислены силы и моменты, действующие на частицы со стороны жидкости. Проведен анализ возможности получения усредненных выражений для силы и момента в смеси с точностью до слагаемых по объемной концентрации частиц степени выше первой.

Ключевые слова: вязкая жидкость, нестационарный поток, обтекание сферы, смесь.

Введение

В последние годы особый интерес представляет моделирование нестационарных процессов в многофазных, в частности двухфазных, средах [1, 2]. Одна из задач, возникающих при моделировании таких процессов, это определение сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости. При этом необходимо учитывать нестационарные слагаемые в уравнениях движения вязкой жидкости. Для одиночной сферы решение задачи в приближении малых чисел Рейнольдса приведено в [3]. Учет гидродинамического взаимодействия n частиц значительно усложняет задачу. В последние годы интерес к этой тематике увеличивается, что связано с многочисленными приложениями. Так, в работах [4–6] сделана попытка учесть влияние нестационарности на коэффициенты в силах вязкого сопротивления, Бассэ и присоединенных масс для суспензии в целом. Кроме того, интерес к этой тематике связан и с проблемой построения моделей многофазных сред на основе получения зависимости усредненных параметров системы, в том

¹Коновалова Наталия Ивановна (konovalovani@rambler.ru), кафедра математики и теоретической механики Мордовского государственного университета, 430000, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, 68.

²Мартынов Сергей Иванович (martynovsi@mail.ru), кафедра прикладной математики и информатики в геологии и нефтегазовом деле Югорского государственного университета, 628012, Россия, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16.

числе и сил, действующих со стороны жидкости на частицы, от объемной концентрации частиц в степени выше первой.

Вопрос о том, можно ли получить выражения для такого рода сил путем усреднения выражений, полученных из решения задач о двух или нескольких взаимодействующих частиц как в стационарных, так и нестационарных потоках, один из актуальных в проблеме построения моделей многофазных сред. Так, известно [7], что для стационарных течений в приближении Стокса и Озина скорость затухает на бесконечности как X^{-1} , где X — расстояние от центра частицы до точки, в которой определяется скорость. Для стационарного течения Навье–Стокса оценки дают асимптотику в виде X^{-k} , где $k \leq 2$. Таким образом, из этих оценок видно, что простое суммирование возмущений от каждой частицы приводит к расходящимся рядам для большого числа частиц, и получить средние выражения для сил не представляется возможным. В работах [8,9] показано, что решение задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц в принципе нельзя свести к сумме решений задач о парных взаимодействиях этих частиц. Это связано с тем, что хотя уравнения и граничные условия линейные, однако граничные условия для скорости жидкости на поверхности каждой частицы являются интегральными в том смысле, что описывают суммарный вклад от гидродинамического взаимодействия выделенной частицы со всеми остальными. Это означает, что для получения общего решения необходимо учитывать вклад каждой частицы. С учетом того, что для реальных суспензий число частиц в единице объема смеси имеет порядок 10^{12} – 10^{18} возникает принципиальный вопрос о возможности получить как общий вид решения задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц, так и возможность получения усредненных уравнений для смеси ”жидкость–частицы”.

Для стационарных и квазистационарных потоков в работах [8–10] развит метод, позволяющий учитывать гидродинамическое взаимодействие произвольного конечного числа частиц в потоках, скорость которых далеко от частиц есть полином произвольной степени от координат. Метод основан на представлении решения задачи в виде мультипольного разложения с тензорными коэффициентами. На основе этого метода в работах [11,12] разработан и программно реализован метод по расчету взаимодействий большого числа частиц в облаке и бесконечного числа частиц в периодической решетке произвольной симметрии. Результаты работы [11] свидетельствуют, что динамика осаждающихся частиц в облаке имеет сложный характер: скорость частиц внутри облака больше, чем на его краю. Это приводит к относительному движению частиц внутри облака и его деформации в результате гидродинамического взаимодействия. Однако средние кинематические характеристики частиц в облаке таковы, что они практически не зависят от конфигурации облака, а их зависимость от числа взаимодействующих частиц такова, что асимптотические значения достигаются примерно для 300–400 частиц. Это означает, что для корректного учета вклада взаи-

модействия частиц в выражения для средних характеристик смеси оказывается достаточным учитывать вклад не всех частиц, а только части из них, причем число учитываемых частиц имеет разумные для численного счета значения.

Подход, аналогичный тому, что использован в работах [11, 12], может быть применен и для решения задачи нестационарного обтекания большого числа частиц в приближении малых чисел Рейнольдса. При этом, в силу линейности уравнений, решение задачи об обтекании n частиц так же, как и в стационарном случае, можно представить как сумму возмущений от каждой частицы при наличии остальных, где суммирование берется по всем частицам из заданной конфигурации.

В силу сказанного выше представляет интерес рассмотреть задачу о взаимодействии двух частиц в нестационарном потоке и исследовать влияние гидродинамического взаимодействия как на асимптотику возмущений вдали от частиц, так и на их динамику в результате взаимодействия в потоке. Кроме того, решение этой задачи дает возможность определить вид решения для случая произвольного конечного числа частиц и вычислить силы и моменты, действующие на частицы со стороны жидкости в результате взаимодействия, что позволит найти зависимость усредненных сил и моментов от концентрации частиц выше первой. Ниже даются постановка задачи и асимптотическое решение для частиц одинакового радиуса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим две твердые сферические частицы A и B одинакового радиуса a , помещенные в неограниченную несжимаемую жидкость плотности ρ и вязкости η . Положение точки жидкости относительно центров сфер A и B будем обозначать векторами $\mathbf{X}^a$ и $\mathbf{X}^b$ соответственно. Для введенных векторов имеем соотношение:

$$\mathbf{X}^b = \mathbf{X}^a - \mathbf{r},$$

здесь вектор $\mathbf{r}$ разделяет центры двух сфер. Скорость жидкости $\mathbf{U}$ на бесконечности есть зависящая от времени однородная функция

$$U_j(t) = U_{0j} \exp(-I\omega t).$$

Здесь $I^2 = -1$. Считаем, что распределение скорости $\mathbf{u}$ и давления p в жидкости описывается уравнениями

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}. \quad (1.1)$$

На поверхности частиц A и B должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} U_j + u_j &= V_j^a + \Gamma_{jk}^a x_k^a, & X^a &= a; \\ U_j + u_j &= V_j^b + \Gamma_{jk}^b x_k^b, & X^b &= a. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далеко от частиц имеет место затухание возмущений

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0, \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Здесь векторами $\mathbf{V}^a$, $\mathbf{V}^b$ обозначены абсолютные линейные скорости сфер A и B , приобретаемые ими в результате взаимодействия с потоком и между собой, Γ_{jk}^a , Γ_{jk}^b — тензоры угловых скоростей сфер, p_0 — невозмущенное давление в жидкости, удовлетворяющее соотношению

$$\rho \frac{\partial U_j}{\partial t} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_j}. \quad (1.4)$$

Линейные и угловые скорости сфер есть неизвестные функции, зависящие от векторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{r}$ и параметров a/r , $\eta/\rho\omega$. Для их определения необходимо составить уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^a &= m_a \frac{d\mathbf{V}^a}{dt}, & \mathbf{F}^b &= m_b \frac{d\mathbf{V}^b}{dt}; \\ \mathbf{T}^a &= J_a \frac{d\boldsymbol{\Omega}^a}{dt}, & \mathbf{T}^b &= J_b \frac{d\boldsymbol{\Omega}^b}{dt}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{F}^a, \mathbf{F}^b$ — силы, действующие на частицы, а $\mathbf{T}^a, \mathbf{T}^b$ — моменты сил, m_a, m_b, J_a, J_b — массы и моменты инерции частиц соответственно, $\boldsymbol{\Omega}^a, \boldsymbol{\Omega}^b$ — угловые скорости сфер, равные

$$\Omega_i^a = \epsilon_{ijk} \Gamma_{jk}^a, \quad \Omega_i^b = \epsilon_{ijk} \Gamma_{jk}^b.$$

Здесь ϵ_{ijk} — тензор Леви-Чевиты.

В силу линейности задачи и граничных условий решение уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2), (1.3) можно представить в виде суммы решений двух задач.

Первая задача заключается в нахождении решения уравнений (1.1) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_j &= V_j^a - U_j, & X^a &= a; \\ u_i &= V_i^b - U_i, & X^b &= a. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На бесконечности по-прежнему должны выполняться условия (1.3). Фактически это первая задача о нестационарном поступательном движении сфер.

Вторая задача заключается в нахождении решения уравнений (1.1) со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} u_j &= \Gamma_{jk}^a x_k^a, & X^a &= a, \\ u_i &= \Gamma_{jk}^b x_k^b, & X^b &= a. \end{aligned} \quad (1.7)$$

На бесконечности по-прежнему должны выполняться условия (1.3). Таким образом, вторая задача — о вращении сфер с нестационарными угловыми скоростями.

2. Решение первой задачи

Из первого уравнения системы (1.1) следует, что

$$\mathbf{u} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Вектор $\mathbf{A}$ определяется аналогично работе [4] с той только разницей, что в задаче есть два выделенных направления: вектор $\mathbf{V} - \mathbf{U}$ и вектор $\mathbf{r}$. Поэтому в общем виде выражение для вектора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{W}, \quad W_i = \psi_0 M_i + \psi_j N_{ih} + \psi_{hj} P_{ihj} + \psi_{hjl} Q_{ihjl} + \dots \quad (2.1)$$

Здесь ψ_0 — решение уравнения [2]

$$\Delta^2 \psi_0 + \frac{I\omega}{v} \Delta \psi_0 = 0, \quad v = \frac{\eta}{\rho}. \quad (2.2)$$

Вводя обозначение $\Delta \psi_0 = \varphi$ получим уравнение

$$\Delta \varphi + \frac{I\omega}{v} \varphi = 0.$$

Решение этого уравнения для одиночной частицы имеет вид [4]

$$\varphi = S L_0 \exp(Ikx), \quad L_0 = \frac{1}{X}, \quad k = \frac{1+I}{\delta}, \quad \delta = \left(\frac{2\eta}{v} \right)^{1/2}.$$

Параметр δ имеет смысл толщины вихревого слоя вокруг частицы [4].

Для получения выражения вектора $\mathbf{W}$ необходимо учесть, что все частные производные от полученного выражения функции ψ_0 тоже есть решение уравнения (2.2). Другими словами, в общем случае для функции $\psi_{ij\dots h}$ получаем уравнение

$$\Delta \psi_{ij\dots h} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_h} (L_0 \exp(ikx)) \right) \right) \right). \quad (2.3)$$

Неизвестные тензорные коэффициенты M_i , N_{ih} , ... линейно зависят от скорости, в силу линейности уравнений и граничных условий по этой величине, от вектора $\mathbf{r}_s$ и находятся так же, как и в работах [5–7].

Для первой задачи тензорные коэффициенты записываются в виде

$$\begin{aligned} M_i &= v_i^{\parallel} M^{\parallel} + v_i^{\perp} M^{\perp}, \\ N_{ih} &= N^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h + N^{\perp} v_i^{\perp} r_h + N_1^{\perp} v_h^{\perp} r_i, \\ P_{ihj} &= P^{\parallel} v_i^{\parallel} r_j r_h + P^{\perp} v_i^{\perp} r_j r_h + P_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j + v_j^{\perp} r_i r_h), \\ Q_{ihjl} &= Q^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h r_j r_l + Q^{\perp} v_i^{\perp} r_h r_j r_l + Q_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j r_l + \\ &\quad + v_j^{\perp} r_h r_i r_l + v_l^{\perp} r_i r_j r_h). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $v_i^{\parallel}$, $v_i^{\perp}$ — компоненты вектора скорости $v_i = V_i - U_i$ вдоль и перпендикулярно вектору $\mathbf{r}$; $M^{\parallel}$, $M^{\perp}$, $N^{\parallel}$, $N^{\perp}$, $N_1^{\perp}$, ... — неизвестные скалярные коэффициенты, которые находятся из граничных условий.

Найдем частное решение уравнения (2.3) для различных случаев правой части.

Рассмотрим случай функции f_0 . Уравнение принимает вид

$$\Delta \psi_0 = S L_0 \exp(Ikx).$$

Частное решение ищем в виде

$$\psi_0 = m S L_0 \exp(Ikx).$$

После подстановки в уравнение получаем, что $m = -1/k^2$.

Рассмотрим случай функции ψ_j .

$$\Delta \psi_j = (L_j + IkL_0 \frac{x_j}{X}) \exp(Ikx).$$

Частное решение ищем в виде

$$\psi_j = m(L_j + IkL_0 \frac{x_j}{X}) \exp(Ikx).$$

После подстановки получаем, что $m = -1/k^2$.

Аналогично решаются и другие уравнения. Общее решение для $\psi_{ij\dots h}$ записывается в виде

$$\psi_{ij\dots h} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_h} (L_0 \exp(Ikx)) \right) \right) \right) + CL_{ij\dots h}.$$

Если имеем две частицы, то решение должно содержать мультиполи двух типов

$$L_{ij\dots h}^a = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{1}{X^a} \right) \right) \right) \right),$$

$$L_{ij\dots h}^b = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{1}{X^b} \right) \right) \right) \right).$$

Поэтому в нашем случае получаем

$$\begin{aligned} W_i = & -\frac{1}{k^2} M_i [L_0^a \exp(IkX^a) + L_0^b \exp(IkX^b)] - \frac{1}{k^2} N_{ij} [(L_j^a + \\ & + IkL_0^a \frac{x_j^a}{X^a}) \exp(IkX^a) - (L_j^b + IkL_0^b \frac{x_j^b}{X^b}) \exp(IkX^b)] - \dots + \\ & + C_i (L_0^a + L_0^b) + D_{ih} (L_h^a - L_h^b) + F_{ihj} (L_{hj}^a + L_{hj}^b) + \\ & + G_{ihjl} (L_{hjl}^a - L_{hjl}^b) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коэффициенты C_i , D_{ih} , F_{ihj} , G_{ihjl} имеют структуру, аналогичную (2.4)

$$\begin{aligned} C_i &= v_i^{\parallel} C^{\parallel} + v_i^{\perp} C^{\perp}, \\ D_{ih} &= D^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h + D^{\perp} v_i^{\perp} r_h + D_1^{\perp} v_h^{\perp} r_i, \\ F_{ihj} &= F^{\parallel} v_i^{\parallel} r_j r_h + F^{\perp} v_i^{\perp} r_j r_h + F_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j + v_j^{\perp} r_i r_h), \\ G_{ihjl} &= G^{\parallel} v_i^{\parallel} r_h r_j r_l + G^{\perp} v_i^{\perp} r_h r_j r_l + G_1^{\perp} (v_h^{\perp} r_i r_j r_l + \\ & + v_j^{\perp} r_h r_i r_l + v_l^{\perp} r_i r_j r_h). \end{aligned}$$

Знаки мультиполей в выражении (2.5) выбираются исходя из того, что скорость жидкости $\mathbf{u}$ должна быть четной функцией координат (это следует

из граничных условий, как в [5]). Нетрудно показать, что скорость и давление жидкости находятся следующим образом:

$$\mathbf{u} = \nabla(\nabla \mathbf{W}) - \Delta \mathbf{W}, \quad (2.6)$$

$$p = \eta \nabla \left(\frac{I\omega}{v} \mathbf{W} + \Delta \mathbf{W} \right). \quad (2.7)$$

Неизвестные тензорные коэффициенты находятся из граничных условий для скорости на поверхности одной из частиц. Условия на поверхности другой выполняются автоматически.

В задаче имеется три безразмерных параметра, связывающие размеры частиц a , расстояние между ними R и толщину вихревого слоя δ :

$$\lambda = \frac{a}{\delta}, \quad \beta = \frac{R}{\delta}, \quad \varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Причем только два из них можно считать независимыми, так как между ними есть связь $\varepsilon = \lambda/\beta$. В рассматриваемой задаче этими параметрами являются ε и β , при этом рассматривается случай, когда $\varepsilon \ll 1$ и $\beta > 0$. Случай $\beta \rightarrow 0$ соответствует известному обтеканию частиц стационарным однородным потоком вязкой жидкости [5]. Выбор параметра β в качестве независимого связан с удобством вычислений. В настоящей работе неизвестные скалярные коэффициенты находятся методом разложения в ряды по малому параметру ε с точностью до ε^4 . В общем виде скалярные коэффициенты представляются следующим образом (во всех выражениях приведены только разложения с отличными от нуля коэффициентами):

$$\begin{aligned} M^{\parallel} &= M_0^{\parallel} + M_1^{\parallel} \varepsilon + M_2^{\parallel} \varepsilon^2 + M_3^{\parallel} \varepsilon^3 + M_4^{\parallel} \varepsilon^4, \\ M^{\perp} &= M_0^{\perp} + M_1^{\perp} \varepsilon + M_2^{\perp} \varepsilon^2 + M_3^{\perp} \varepsilon^3 + M_4^{\perp} \varepsilon^4, \\ C^{\parallel} &= C_0^{\parallel} + C_1^{\parallel} \varepsilon + C_2^{\parallel} \varepsilon^2 + C_3^{\parallel} \varepsilon^3 + C_4^{\parallel} \varepsilon^4, \\ C^{\perp} &= C_0^{\perp} + C_1^{\perp} \varepsilon + C_2^{\perp} \varepsilon^2 + C_3^{\perp} \varepsilon^3 + C_4^{\perp} \varepsilon^4, \\ N^{\parallel} &= N_3^{\parallel} \varepsilon^3 + N_4^{\parallel} \varepsilon^4 + N_5^{\parallel} \varepsilon^5, \quad N^{\perp} = N_3^{\perp} \varepsilon^3 + N_4^{\perp} \varepsilon^4 + N_5^{\perp} \varepsilon^5, \\ N_1^{\perp} &= N_{1,3}^{\perp} \varepsilon^3 + N_{1,4}^{\perp} \varepsilon^4 + N_{1,5}^{\perp} \varepsilon^5, \quad D^{\perp} = D_3^{\perp} \varepsilon^3 + D_4^{\perp} \varepsilon^4 + D_5^{\perp} \varepsilon^5, \\ P^{\parallel} &= P_5^{\parallel} \varepsilon^5 + P_6^{\parallel} \varepsilon^6, \quad P^{\perp} = P_5^{\perp} \varepsilon^5 + P_6^{\perp} \varepsilon^6, \quad P_1^{\perp} = P_{1,5}^{\perp} \varepsilon^5 + P_{1,6}^{\perp} \varepsilon^6, \\ F^{\parallel} &= F_5^{\parallel} \varepsilon^5 + F_6^{\parallel} \varepsilon^6, \quad F^{\perp} = F_5^{\perp} \varepsilon^5 + F_6^{\perp} \varepsilon^6, \quad F_1^{\perp} = F_{1,5}^{\perp} \varepsilon^5 + F_{1,6}^{\perp} \varepsilon^6, \\ Q^{\parallel} &= Q_7^{\parallel} \varepsilon^7, \quad Q^{\perp} = Q_7^{\perp} \varepsilon^7, \quad Q_1^{\perp} = Q_{1,7}^{\perp} \varepsilon^7, \\ G^{\parallel} &= G_7^{\parallel} \varepsilon^7, \quad G^{\perp} = G_7^{\perp} \varepsilon^7, \quad G_1^{\perp} = G_{1,7}^{\perp} \varepsilon^7. \end{aligned}$$

В силу ограниченности места и громоздкости коэффициентов ниже приводятся выражения для части из них.

1. Невзаимодействующие сферы.

Для не взаимодействующих сфер (случай $\varepsilon = 0$) получаем следующие

значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} M_0^{\parallel} &= -\frac{3}{2}ae^{-IAk}, & M_0^{\perp} &= -\frac{3}{2}ae^{-IAk}, \\ C_0^{\parallel} &= \frac{a(-3 + 3IAk + A^2k^2)}{2k^2}, & C_0^{\perp} &= -\frac{3a - 3Ia^2k - a^3k^2}{2k^2}. \end{aligned}$$

Решение с такими коэффициентами соответствует хорошо известному распределению скорости и давления вокруг одиночной сферы, двигающейся поступательно с переменной скоростью в вязкой жидкости.

2. Взаимодействие порядка ϵ .

Следующий шаг дает порядок ϵ только для взаимодействия в результате движения с линейными скоростями.

$$\begin{aligned} M_1^{\parallel} &= -\frac{9ae^{-2IAk-(1-I)\beta}(I + (1+I)\beta)}{4\beta^2}, \\ M_1^{\perp} &= \frac{9ae^{-2IAk+I(1+I)\beta}(-1 + I(1+I)\beta + (1+I)^2\beta^2)}{4(1+I)^2\beta^2}, \\ C_1^{\parallel} &= \frac{3Iae^{-IAk-(1-I)\beta}(-3 + 3IAk + a^2k^2)(1 + (1-I)\beta)}{4k^2\beta^2}, \\ C_1^{\perp} &= -\frac{3ae^{-IAk+I(1+I)\beta}}{4(1+I)^2k^2\beta^2}(-3 + 3IAk + a^2k^2)(-1 + I(1+I)\beta + (1+I)^2\beta^2). \end{aligned}$$

3. Взаимодействие порядка ϵ^2 .

Для взаимодействия порядка ϵ^2 получаем следующие значения коэффициентов в разложениях скалярных функций:

$$\begin{aligned} M_2^{\parallel} &= -\frac{27ae^{-3IAk-(2-2I)\beta}(I + (1+I)\beta)^2}{8\beta^4}, \\ M_2^{\perp} &= -\frac{27ae^{-3IAk+2I(1+I)\beta}(-1 + I(1+I)\beta + (1+I)^2\beta^2)^2}{8(1+I)^4\beta^4}, \\ C_2^{\parallel} &= \frac{9ae^{-2IAk-(2-2I)\beta}(-3 + 3IAk + a^2k^2)(I + (1+I)\beta)^2}{8k^2\beta^4}, \\ C_2^{\perp} &= \frac{9ae^{-2IAk+2I(1+I)\beta}}{8(1+I)^4k^2\beta^4}(-3 + 3IAk + a^2k^2)(-1 + I(1+I)\beta + (1+I)^2\beta^2)^2. \end{aligned}$$

4. Взаимодействие порядка ϵ^3 .

Учет взаимодействия третьего порядка по параметру ϵ дает ненулевые значения следующих коэффициентов для скалярных функций: $M_3^{\parallel}$, $M_3^{\perp}$, $C_3^{\parallel}$,

$C_3^\perp, N_3^\parallel, N_3^\perp, N_{1,3}^\perp, D_3^\parallel, D_3^\perp, P_5^\parallel, P_5^\perp, P_{1,5}^\perp, F_5^\parallel, F_5^\perp, F_{1,5}^\perp$. Некоторые из них приведены ниже.

$$N_3^\parallel = \frac{15Iae^{-2Iak-(1-I)\beta}(-3-(3-3I)\beta+2I\beta^2)}{4(-1+Iak)\beta^2},$$

$$N_3^\perp = -\frac{ae^{-2Iak+I(1+I)\beta}}{2(1+I)^2(I+ak)\beta^2}(-15I-15(1+I)\beta+9I(1+I)^2\beta^2+4(1+I)^3\beta^3),$$

$$N_{1,3}^\perp = -\frac{ae^{-2Iak+I(1+I)\beta}}{2(1+I)^2(I+ak)\beta^2}(-15I-15(1+I)\beta+9I(1+I)^2\beta^2+4(1+I)^3\beta^3),$$

$$D_3^\parallel = \frac{Iae^{-Iak-(1-I)\beta}}{4k^2(I+ak)\beta^2}(-15I-15ak+6Ia^2k^2+a^3k^3)(-3-(3-3I)\beta+2I\beta^2),$$

$$D_3^\perp = \frac{ae^{-Iak+I(1+I)\beta}}{12(1+I)^2k^2(I+ak)\beta^2}(-15+15Iak+6a^2k^2-Ia^3k^3)(-6I-6(1+I)\beta+3I(1+I)^2\beta^2+(1+I)^3\beta^3)$$

5. Взаимодействие порядка ϵ^4 .

Учет взаимодействия четвертого порядка по параметру ϵ дает ненулевые значения следующих коэффициентов: $M_4^\parallel, M_4^\perp, C_4^\parallel, C_4^\perp, N_4^\parallel, N_4^\perp, N_{1,4}^\perp, D_4^\parallel, D_4^\perp, P_6^\parallel, P_6^\perp, P_{1,6}^\perp, F_6^\parallel, F_6^\perp, F_{1,6}^\perp, Q_7^\parallel, Q_7^\perp, Q_{1,7}^\perp, G_7^\parallel, G_7^\perp, G_{1,7}^\perp$ для скалярных функций:

$$P_6^\perp = \frac{-9ae^{-3Iak+2I(1+I)\beta}}{(32(1+I)^4(-3+3Iak+A^2k^2)\beta^4)}(-105+210I(1+I)\beta+267(1+I)^2\beta^2-184I(1+I)^3\beta^3-84(1+I)^4\beta^4+27I(1+I)^5\beta^5+5(1+I)^6\beta^6),$$

$$P_{1,6}^\perp = \frac{(-9ae^{-3Iak+2I(1+I)\beta})}{32(1+I)^4(-3+3Iak+a^2k^2)\beta^4}(-105+210I(1+I)\beta+255(1+I)^2\beta^2-160I(1+I)^3\beta^3-56(1+I)^4\beta^4+11I(1+I)^5\beta^5+(1+I)^6\beta^6),$$

$$F_6^\parallel = -\frac{3ae^{-2Iak-(2-2I)\beta}}{80k^2(-3+3Iak+a^2k^2)\beta^4}(105-105Iak-45a^2k^2+10Ia^3k^3+a^4k^4)(15+(30-30I)\beta-42I\beta^2-(14+14I)\beta^3-4\beta^4),$$

$$F_{1,6}^\perp = -\frac{ae^{-2Iak+2I(1+I)\beta}}{160(1+I)^4k^2(-3+3Iak+a^2k^2)\beta^4}(105-105Iak-45a^2k^2+10Ia^3k^3+a^4k^4)(-45+90I(1+I)\beta+11I(1+I)^2\beta^2-72I(1+I)^3\beta^3-28(1+I)^4\beta^4+7I(1+I)^5\beta^5+(1+I)^6\beta^6).$$

Как уже отмечалось выше, решение задачи найдено с точностью до порядка ϵ^4 включительно. Однако следует заметить, что оно может быть найдено с любой точностью по параметру ϵ с помощью предложенного выше метода.

3. Решение второй задачи

Решение второй задачи аналогично решению первой. Структура вектора W_i такая же, как и в (2.1), отличаются лишь тензорные коэффициенты. В данном случае они должны быть линейными по Γ_{jk} , а также зависеть от вектора $\mathbf{r}$. Необходимо учитывать тот факт, что тензор Γ_{jk} является антисимметричным. Тензорные коэффициенты для второй задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} M_i &= M^\omega \Gamma_{ij} r_j, \\ C_i &= C^\omega \Gamma_{ij} r_j, \\ N_{ih} &= N_1^\omega \Gamma_{ih} + N_2^\omega \Gamma_{ij} r_h r_j + N_3^\omega \Gamma_{jh} r_i r_j, \\ D_{ih} &= D_1^\omega \Gamma_{ih} + D_2^\omega \Gamma_{ij} r_h r_j + D_3^\omega \Gamma_{jh} r_i r_j. \end{aligned}$$

Скорость жидкости находится по формуле (2.4). Разложения по малому параметру и способ нахождения неизвестных коэффициентов аналогичны первой задаче. Для найденных в задаче коэффициентов справедливо следующее представление с искомой точностью:

$$M^\omega = M_3^\omega \epsilon^3, \quad C^\omega = C_3^\omega \epsilon^3, \quad N_1^\omega = N_{1,0}^\omega + N_{1,3}^\omega \epsilon^3.$$

Значения коэффициентов в разложениях приведены ниже

$$\begin{aligned} C_3^\omega &= -\frac{ae^{-Iak-(1-I)\beta}(-3+3Iak+A^2k^2)(I+(1+I)\beta)}{2k^2(I+ak)}, \\ M_3^\omega &= \frac{3ae^{-2Iak-(1-I)\beta}(I+(1+I)\beta)}{2(I+ak)}, \\ N_{1,0}^\omega &= -\frac{a^3e^{-Iak}}{-1+Iak}, \\ N_{1,3}^\omega &= -\frac{a^3e^{-2Iak-(1-I)\beta}(1+(1-I)\beta)}{(I+ak)^2}. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты имеют порядок малости выше ϵ^4 , и поэтому их значения не приведены. Как и решение первой задачи решение второй задачи, может быть найдено с любой точностью по параметру ϵ с помощью предложенного выше метода.

4. Силы и моменты, действующие на частицы

Распределение скорости жидкости для исходной задачи записывается как сумма выражений для скоростей в первой и второй задачах. Значения коэффициентов, найденных в задачах 1, 2, позволяют найти распределение скорости и давления в жидкости из выражений (2.4), (2.5). Эти распределения необходимы для нахождения сил и моментов, действующих на частицы. Зная их, можно из системы (1.5) найти линейные и угловые скорости сфер, тем самым полностью решить поставленную задачу.

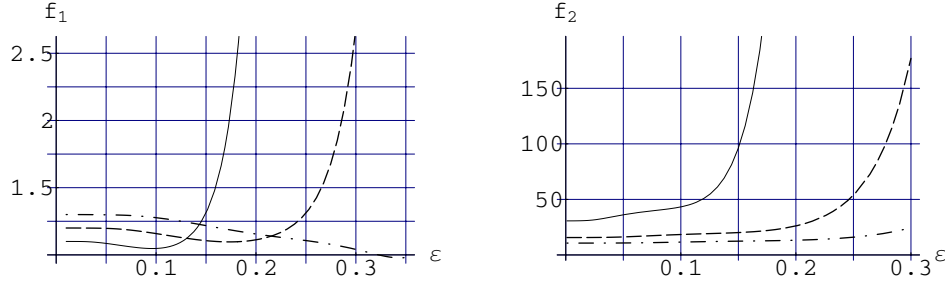


Рис. 1. Графики функций f_1 , f_2 : 1) линия — соответствует $\lambda = 0.1$,
2) линия --- — $\lambda = 0.2$, 3) линия - · - · - — $\lambda = 0.3$

Сила и момент, действующие на частицу A , находятся следующим образом:

$$F_i^A = \int_S [-p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j] ds,$$

$$T_i^A = \int_S \epsilon_{ijk} x_j [-p\delta_{kl} + \eta \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) n_l] ds.$$

Здесь рассматриваются интегралы по поверхности S частиц, внешняя нормаль к которой $\mathbf{n}$.

Подставляя найденные значения коэффициентов для первой задачи, получаем следующие выражения для силы и момента, действующие на частицу A :

$$F_i^{A\parallel} = -6a\pi\eta f_1 v_i^{\parallel} - a^3\pi\rho f_2 \frac{dv_i^{\parallel}}{dt}, \quad F_i^{A,\perp} = -6a\pi\eta f_3 v_i^{\perp} - a^3\pi\rho f_4 \frac{dv_i^{\perp}}{dt},$$

$$T_i^{A\perp} = \epsilon_{ijk} (a\pi\eta v_j^{\perp} r_k f_5 - a^3\pi\rho r_k f_6 \frac{dv_j^{\perp}}{dt}).$$

Здесь f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6 — функции безразмерных параметров. Аналитические представления для них имеют сложный вид, поэтому на рис. 1–3 они представлены в графическом виде, как функции параметров λ и ϵ . Переход от параметра β к параметру λ связан с тем фактом, что известное выражение для силы в случае одиночной частицы, соответствующее нулевому приближению, представлено через этот параметр. На всех рисунках сплошная линия соответствует значению $\lambda = 0.1$, пунктирная — $\lambda = 0.2$, штрих-пунктирная — $\lambda = 0.3$. Параметр ϵ меняется в пределах $0.01 \leq \epsilon \leq 0.35$. При этом минимальное значение параметра β равно 0.2857, 0.5714 и 0.8571 соответственно для каждого значения λ .

В силу свойств решения первой задачи справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}^B, \quad \mathbf{T}^A = -\mathbf{T}^B.$$

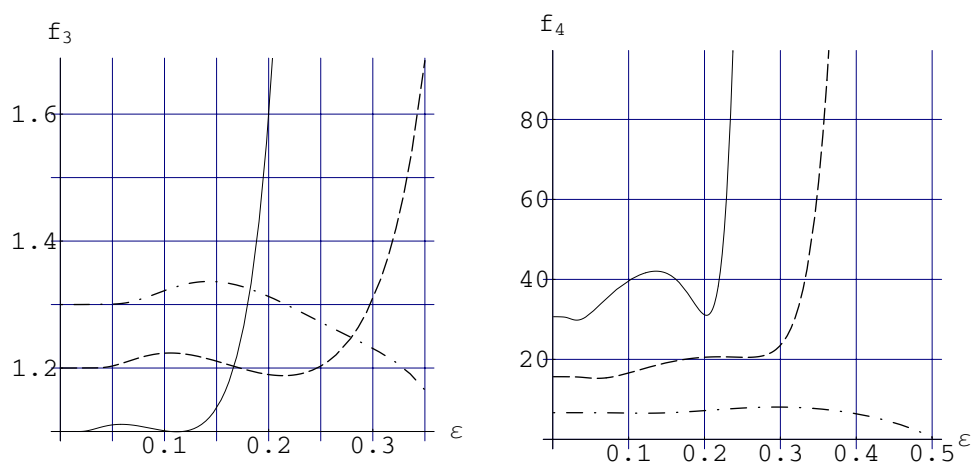


Рис. 2. Графики функции f_3 , f_4 : 1) линия — соответствует $\lambda = 0.1$,
2) линия --- — $\lambda = 0.2$, 3) линия - · - · - — $\lambda = 0.3$

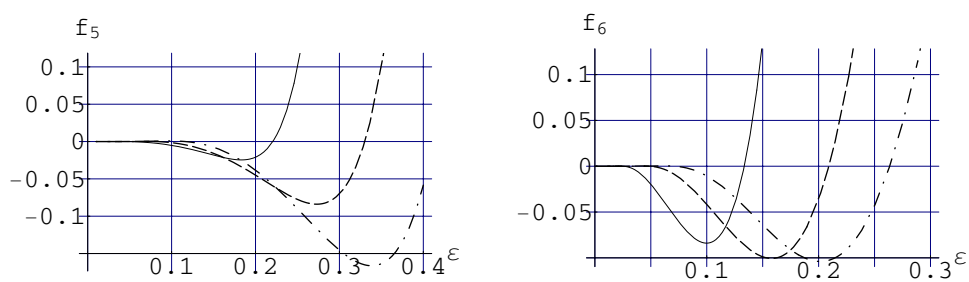


Рис. 3. Графики функции f_5 , f_6 : 1) линия — соответствует $\lambda = 0.1$,
2) линия --- — $\lambda = 0.2$, 3) линия - · - · - — $\lambda = 0.3$

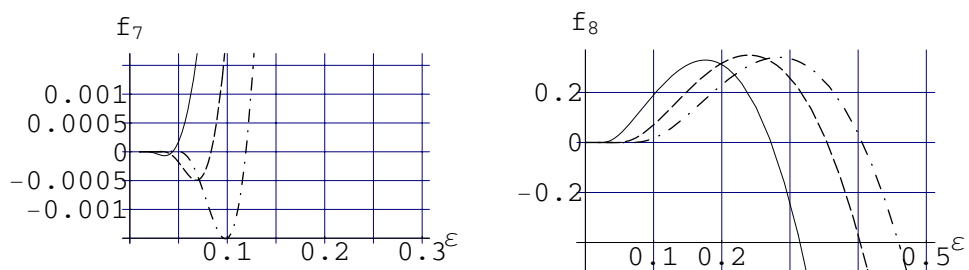


Рис. 4. Графики функции f_7 , f_8 : 1) линия — соответствует $\lambda = 0.1$,
2) линия --- — $\lambda = 0.2$, 3) линия - · - · - — $\lambda = 0.3$

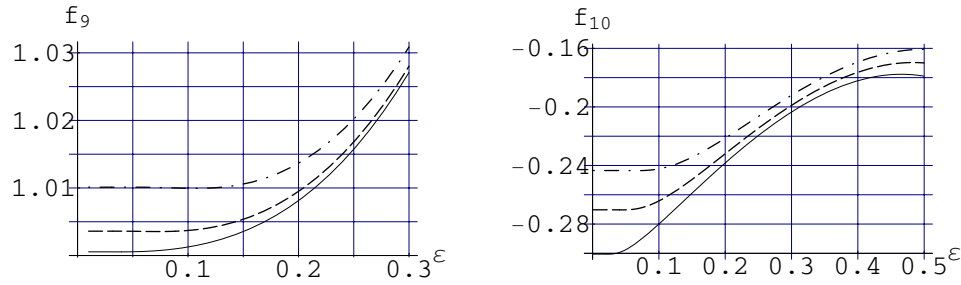


Рис. 5. Графики функции f_9 , f_{10} : 1) линия — соответствует $\lambda = 0.1$,
2) линия --- — $\lambda = 0.2$, 3) линия - · - · - — $\lambda = 0.3$

Из решения второй задачи получаем следующие выражения для силы и момента:

$$F_i^{A\omega} = \left(a\pi\eta\Gamma_{ik}r_k f_7 - a^3\pi\rho r_k f_8 \frac{d\Gamma_{ik}}{dt} \right),$$

$$T_i^{A\omega} = \epsilon_{ijk} [4a^3\pi\eta\Gamma_{jk} f_9 -$$

$$-4a^5\pi\rho \frac{d\Gamma_{jk}}{dt} f_{10} + 4a\pi\eta(\Gamma_{jo}r_o r_k + \Gamma_{jo}r_o r_k) f_{11}$$

$$-4a^3\pi\rho \left(\frac{d\Gamma_{jo}}{dt} r_k r_o + \frac{d\Gamma_{jo}}{dt} r_k r_o \right) f_{12}].$$

Здесь f_7 , f_8 , f_9 , f_{10} , f_{11} , f_{12} — функции безразмерных параметров. Аналитические представления для них также имеют сложный вид, при этом во всем диапазоне параметров λ и ϵ функции f_{11} и f_{12} принимают значения много меньше единицы. Поэтому на рис. 4–5 они в графическом виде не представлены. На всех рисунках сплошная линия соответствует значению $\lambda = 0.1$, пунктирная — $\lambda = 0.2$, штрих-пунктирная — $\lambda = 0.3$. Параметр ϵ меняется в пределах $0.01 \leq \epsilon \leq 0.35$. Соответствующие значения параметра β такие же, как и в первой задаче.

В силу свойств решения второй задачи справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{F}^{A\omega} = -\mathbf{F}^{B\omega}, \quad \mathbf{T}^{A\omega} = \mathbf{T}^{B\omega}.$$

Резкий рост значений функций f_2 , f_4 при $\epsilon > 0.2$, по мнению авторов, связан с недостаточной точностью разложений по малому параметру в этой области и требует дальнейшего уточнения.

Как видно из рисунков, имеется нелинейная зависимость функций от каждого из параметров. Причем полученное в аналитической форме представление функций от этих параметров содержит слагаемые вида $1/r^k$, где $k \leq 3$, что не дает возможность получения средних выражений для сил и моментов прямым усреднением по всем возможным расстояниям между частицами в интервале $2a \leq r \leq \infty$, эта процедура приводит к расходящимся

интегралам. Поэтому можно предположить, что для нестационарного обтекания частиц ситуация по нахождению зависимости средних параметров смеси от концентрации частиц аналогична той, что имеет место для стационарного случая, а именно: получение выражений для средних сил и моментов с точностью по концентрации частиц выше первой степени возможно при учете взаимодействия набора достаточно большого, но ограниченного числа частиц из общей их совокупности в единице объема смеси.

Так же, как и в работах [8–10] для представления решения о взаимодействии n частиц в выражении (2.5) необходимо учитывать мультипольные разложения по каждой из частиц со своими тензорными коэффициентами. Аналогично представляется решение задачи о взаимодействии двух и более частиц произвольных радиусов.

Заключение

Предлагается метод нахождения аналитического решения задачи о гидродинамическом взаимодействии двух и более сферических частиц, помещенных в вязкую жидкость, скорость которой на бесконечности представляется в виде функции, однородной по координатам и периодической по времени. Учитываются нестационарные слагаемые в уравнениях для скорости жидкости. В случае двух частиц одинакового радиуса граничные условия и, следовательно, решение задачи для скорости удовлетворяют симметричному преобразованию. Используя метод, предложенный в работе, найдено аналитическое решение задачи о гидродинамическом взаимодействии двух сфер одинакового радиуса. Решение представлено в виде разложения по малому параметру. Получены асимптотические представления для сил и моментов, действующие со стороны жидкости на частицы и позволяющие определить линейные и угловые скорости сфер. Выражения для сил и моментов, действующих на две частицы, получены в работе впервые. На основе полученных представлений сделан вывод о невозможности проведения процедуры прямого усреднения для получения выражений для средних сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицы. Предложен способ представления решения для случая конечного числа частиц произвольного радиуса.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 04-01-00607).

Литература

- [1] Волны в жидкостях с пузырьками / А.А.Губайдулин [и др.] // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – 1982. – Т. 17. – С. 160–249.
- [2] Нигматулин, Р.И. Динамика многофазных систем / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1987. – Т. 1,2.

- [3] Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
- [4] Chang, C.-C. Potential Flow and Forces for Incompressible Viscous Flow / Chien-Cheng Chang // Math. and Ph. Sc. – 1992. – V. 437. – №1901. – P. 517–525
- [5] Analysis of drag and virtual mass forces in bubbly suspensions using an implicit formulation of the lattice Boltzmann method / K. Sankaranarayanan [et al.] // J. Fluid Mech. – 2002. – V. 452. – P. 61–96.
- [6] Sangani, A.S. The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small-amplitude oscillatory motion / A.S. Sangani, D.Z. Zhang, A. Prosperetti // Phys. Fluids A. – 1991. – P. 2955–2970.
- [7] Serrin, J. Mathematical principles of classical fluid mechanics / J. Serrin. – Berlin; Göttingen; Heidelberg, 1959.
- [8] Мартынов, С.И. Взаимодействие частиц в суспензии / С.И. Мартынов. – Казань, 1998. – 135 с.
- [9] Мартынов, С.И. Гидродинамическое взаимодействие частиц / С.И. Мартынов // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – №2. – С. 112–119.
- [10] Мартынов, С.И. Взаимодействие частиц в течении с параболическим профилем скорости / С.И. Мартынов // Изв. РАН. МЖГ. – 2000. – №1. – С. 84–91.
- [11] Баранов, В.Е. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости / В.Е. Баранов, С.И. Мартынов // Известия РАН. МЖГ. – 2004. – №1. – С. 152–164.
- [12] Мартынов, С.И. Симметрия периодической решетки частиц и потока вязкой жидкости в приближении Стокса / С.И. Мартынов, А.О. Сыромясов // Известия РАН. МЖГ. – 2007. – №3. – С. 7–20.

Поступила в редакцию 23/I/2008;
в окончательном варианте — 23/I/2008.

NON-STATIONARY VISCOUS FLOW AROUND OF TWO SPHERES

© 2008 N.I. Konovalova³ S.I. Martynov⁴

The problem of non-stationary viscous flow liquid around of two spheres is considered. The speed of liquid is time-periodical homogeneous function of coordinates. Hydrodynamic interaction of particles taken into account. The solution of problem is obtained in terms of small parameter. The forces and torques exerting on spheres are calculated. The analysis of possibility to obtain the expressions for average force and torque in mixture with precision to items by volume concentration degree of elements above first is analyzed.

Keywords: *viscous fluid, non-stationary flow, flow around of sphere, mixture.*

Paper received 23/I/2008.

Paper accepted 23/I/2008.

³Konovalova Nataliya Ivanovna (konovalovani@rambler.ru), Dept. of Mathematics, Mordovian State University, Saransk, 430000, Russia.

⁴Martynov Sergey Ivanovich (martynovasi@mail.ru), Dept. of Geology, Oil and Gas, Ugra State University.