УДК 539.3

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ

© 2008 С.А. Гришин[1]

Исследовалась задача о флаттере конической консольно закрепленной оболочки под действием истекающего из нее сверхзвукового потока газа. Оболочка считалась упругой однородной изотропной, описываемой уравнениями технической теории оболочек в смешанной форме [1]. При таком описании требуется найти две скалярные функции на срединной поверхности: нормальный прогиб и функцию мембранных усилий. Краевые условия, соответственно, должны быть сформулированы в терминах этих функций и производных от них. По смыслу задачи исключительно важно, чтобы в отсутствие взаимодействия с потоком краевые условия обеспечили консервативность механической системы.

Ключевые слова: *оболочка, техническая теория, флаттер, сверхзвуковой поток.*

Общие уравнения технической теории в смешанной форме имеют вид [1]:

$$D\nabla^4 w - \nabla_k^2 F - L(F,w) = q,$$
$$\nabla^4 F + Eh\nabla_k^2 w + \frac{1}{2}EhL(w,w) = 0.$$

Для конической оболочки в обозначениях [1] имеем:

$$L(F,w) = \left(\frac{1}{s}\partial_s w + \frac{1}{s^2}\partial_{\psi\psi} w\right)\partial_{ss}F +$$
$$+\left(\frac{1}{s}\partial_s F + \frac{1}{s^2}\partial_{\psi\psi} F\right)\partial_{ss}w - 2\left(\partial_s \frac{1}{s}\partial_\psi F\right)\left(\partial_s \frac{1}{s}\partial_\psi w\right),$$

$$\alpha = s;\quad \beta = \varphi;\quad \psi = \varphi\ \sin\gamma;\quad \partial_\varphi = \sin\gamma\ \partial_\psi$$
$$A = 1;\quad B = s\ \sin\gamma;\quad k_1 = 0;\quad k_2 = \frac{1}{s}\ \mathrm{ctg}\ \gamma, \tag{1}$$

$$T_1 = \frac{1}{s^2}F_{\psi\psi} + \frac{1}{s}F_s;\quad T_2 = F_{ss};\quad S = -(\frac{1}{s}F_\psi)_s, \tag{2}$$

[1]Гришин Сергей Анатольевич (grishin@ipmnet.ru), Институт проблем механики РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

$$\chi_1 = w_{ss}; \quad \chi_2 = \frac{1}{s^2} w_{\psi\psi} + \frac{1}{s} w_s; \quad \tau = (\frac{1}{s} w_\psi)_s, \tag{3}$$

$$\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2; \qquad \nabla^2 = \frac{1}{s^2}(s\partial_s \;\; s\partial_s + \partial_{\psi\psi}); \qquad \nabla_k^2 = \frac{1}{s} \;\mathrm{ctg}\;\gamma\;\partial_{ss}, \tag{4}$$

$$-\frac{1}{D}\; M_1 = w_{ss} + \frac{\nu}{s} w_s + \frac{\nu}{s^2} w_{\psi\psi} = \nabla^2 w - (1-\nu)\left(\frac{1}{s} w_s + \frac{1}{s^2} w_{\psi\psi}\right), \tag{5}$$

$$Q_1 = -D(\nabla^2 w)_s; \qquad \tilde{Q}_1 = Q_1 + \frac{1}{s}\partial_\psi H, \tag{6}$$

$$Eh\;\; \varepsilon_{22} = T_2 - \nu T_1 = \nabla^2 F - (1+\nu)\left(\frac{1}{s} F_s + \frac{1}{s^2} F_{\psi\psi}\right), \tag{7}$$

$$H = -D(1-\nu)\tau; \qquad \partial_\psi H = -D(1-\nu)(\frac{1}{s} w_{\psi\psi})_s. \tag{8}$$

Индексы s, ψ, равно как и операторы ∂_s, ∂_ψ, обозначают дифференцирования по s и по ψ. Координата s отсчитывается вдоль образующей и изменяется в пределах от $s_0 > 0$ до $s_1 > s_0$, то есть конус считается усеченным ($s = 0$ отвечает вершине). Угол γ — угол между осью и образующей конуса. Окружная координата φ периодическая, ψ — соответственно тоже, но период иной. Решение задачи также обязано быть периодической функцией φ (или ψ). Контур $s = s_0$ считаем защемленным, контур $s = s_1$ — свободным.

Рассмотрим билинейную форму пары двумерных векторов $(z\;\;\Phi)$, $(w\;\;F)$, отвечающую линейной части основной системы:

$$\int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1}\begin{pmatrix} cz & \Phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cD\nabla^4 & -\nabla_k^2 \\ \nabla_k^2 & (Eh)^{-1}\nabla^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cw \\ F \end{pmatrix} s\,ds\,d\psi. \tag{9}$$

Внешний интеграл берется по периоду подынтегральной функции $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi\sin\gamma$. Сама же подынтегральная функция представляет собой сумму четырех слагаемых

$$D(z, \nabla^4 w) - (z, \nabla_k^2 F) + (\Phi, \nabla_k^2 w) + (Eh)^{-1}(\Phi, \nabla^4 F). \tag{10}$$

Проинтегрируем первое слагаемое (10) по s по частям дважды:

$$\begin{aligned}(z, \nabla^4 w) = &\int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1} z\nabla^4 w\, s\,ds\,d\psi = \\ &= \int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\left[sz(\nabla^2 w)_s - sz_s\nabla^2 w\right]\Big|_{s_0}^{s_1} d\psi + \\ &+ \int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1} \nabla^2 z\;\; \nabla^2 w\, s\,ds\,d\psi.\end{aligned} \tag{11}$$

Сначала прибавим и затем вычтем внутри квадратной скобки (11) член $sz_s(1-\nu)(s^{-1}w_s + s^{-2}w_{\psi\psi})$, образуем форму $M_w = -D^{-1}M_1$ множителем при

sz_s. Далее прибавим и вычтем внутри той же скобки член $z(1-\nu)(s^{-1}w_{\psi\psi})_s$, создадим форму $\tilde{Q}_w$ (6) множителем при sz. Оставшиеся неиспользованными слагаемые преобразуем так:

$$
\begin{aligned}
-(1-\nu)\left[z(s^{-1}w_{\psi\psi})_s + sz_s(s^{-1}w_s + s^{-2}w_{\psi\psi})\right] = \\
= -(1-\nu)\left[z_s w_s - s^{-2}zw_{\psi\psi} + s^{-1}zw_{s\psi\psi} + s^{-1}z_s w_{\psi\psi}\right] = \\
= -(1-\nu)\left[z_s w_s + (s^{-1}zw_{\psi\psi})_s\right]
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Свойство периодичности решения позволяет интегрировать по ψ по частям на периоде, просто "перебрасывая" индекс на другой сомножитель и меняя знак:

$$
\int_0^{2\pi\sin\gamma} h(s) f g_{\psi\psi}\ d\psi = -\int_0^{2\pi\sin\gamma} h(s) f_\psi g_\psi\ d\psi. \tag{13}
$$

Оно дает возможность переписать последнее слагаемое (12) в симметричном по z, w виде, после чего контурный интеграл от членов (12) преобразуем обратно в двойной. В итоге получим:

$$
\begin{aligned}
(z, \nabla^4 w) = \int_0^{2\pi\sin\gamma} \Bigg(sz\left[(\nabla^2 w)_s + \frac{1-\nu}{s}\left(\frac{1}{s}w_{\psi\psi}\right)_s\right] - \\
-sz_s\left[\nabla^2 w - \frac{1-\nu}{s}\left(w_s + \frac{1}{s}w_{\psi\psi}\right)\right]\Bigg)\Bigg|_{s_0}^{s_1}\ d\psi + \\
+\int_0^{2\pi\sin\gamma}\int_{s_0}^{s_1}\left[\ \nabla^2 z\ \nabla^2 w + \frac{1-\nu}{s}\left(\left(\frac{1}{s}z_\psi w_\psi\right)_{ss} - (z_s w_s)_s\right)\right] s\,ds\,d\psi.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Сравнив с (5), увидим, что вторая квадратная скобка правой части (14) пропорциональна "классическому" изгибающему моменту M_1, первая же — пропорциональна так называемой *обобщенной перерезывающей силе.* Наглядная механическая трактовка этого понятия имеется в [2. С. 56] или [3. С. 113]. Линейные формы от функции w, заключенные соответственно в первую и вторую квадратные скобки правой части (14), называем $\tilde{Q}_w$, M_w для краткости. Чуть позже возникнут аналогичные формы от функции F, никакого отношения к моменту и перерезывающей силе не имеющие, но обозначаемые сходным образом.

Условия заделки при $s = s_0$ и свободного края при $s = s_1$ дают

$$
w\Big|_{s_0} = w_s\Big|_{s_0} = M_w\Big|_{s_1} = \tilde{Q}_w\Big|_{s_1} = 0. \tag{15}
$$

Если w, z подчинены (15), контурный интеграл в (14) обращается в нуль, а двойной определяет на линеале таких функций псевдоскалярное произведение

$$
\langle z, w\rangle = (z, \nabla^4 w) = (\nabla^4 z, w). \tag{16}
$$

Аналогичными манипуляциями показывается, что

$$(\Phi, \nabla^4 F) = \int\limits_0^{2\pi\sin\gamma} \Big(s\Phi \Big[(\nabla^2 F)_s + \frac{1+\nu}{s}(\frac{1}{s}F_{\psi\psi})_s \Big] - \\ - s\Phi_s \Big[\nabla^2 F - \frac{1+\nu}{s}(F_s + \frac{1}{s}F_{\psi\psi}) \Big] \Big) \Big|_{s_0}^{s_1} \; d\psi + \\ + \int\limits_0^{2\pi\sin\gamma} \int\limits_{s_0}^{s_1} \Big[\; \nabla^2\Phi \;\; \nabla^2 F + \frac{1+\nu}{s} \Big((\frac{1}{s}\Phi_\psi F_\psi)_{ss} - (\Phi_s F_s)_s \Big) \Big] s ds \, d\psi. \tag{17}$$

Квадратные скобки под контурным интегралом называем $\tilde{Q}_F$, M_F соответственно. Условия заделки при $s = s_0$ и свободного края при $s = s_1$ дают

$$F\Big|_{s_1} = F_s\Big|_{s_1} = M_F\Big|_{s_0} = \tilde{Q}_F\Big|_{s_0} = 0. \tag{18}$$

Дифференцируя по ψ первые два условия (18) и сравнивая с (2), получим, что $T_1(s_1) = S(s_1) = 0$. Обратно, записав условия

$$T_1(s_1) = S(s_1) = 0, \tag{19}$$

выразим T_1 и S из (2) через F и F_s. Глядя на получившиеся равенства как на систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $F(s_1)$ и $F_s(s_1)$, найдем ее общее решение:

$$sF_s\Big|_{s_1} = A\cos(\psi + \psi_0); \qquad F\Big|_{s_1} = A\cos(\psi + \psi_0) + C.$$

Три константы A, ψ_0, C необходимо зафиксировать, так как функция усилий определена с точностью до трех констант, поэтому положим их равными нулю и придем к первым двум условиям (18).

Двойной интеграл (17) задает на линеале функций Φ, F, подчиненных условиям (18), псевдоскалярное произведение

$$\langle \Phi, F \rangle = (\Phi, \nabla^4 F) = (\nabla^4 \Phi, F). \tag{20}$$

Интегрируя по частям оставшиеся в (10) слагаемые, получим:

$$-(z, \nabla_k^2 F) + (\Phi, \nabla_k^2 w) = \int\limits_0^{2\pi\sin\gamma} \int\limits_{s_0}^{s_1} (-z\nabla_k^2 F + \Phi\nabla_k^2 w) \;\; s ds \, d\psi = \\ = \;\; \mathrm{ctg}\;\gamma \int\limits_0^{2\pi\sin\gamma} [-zF_s + \Phi w_s] \Big|_{s_0}^{s_1} \; d\psi + \\ + \;\; \mathrm{ctg}\;\gamma \int\limits_0^{2\pi\sin\gamma} \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{1}{s} \;\; (z_s F_s - \Phi_s w_s) \;\; s ds \, d\psi. \tag{21}$$

Условия (15) обращают в нуль значение квадратной скобки из (21) при $s = s_0$, условия (18) — при $s = s_1$. Под двойным интегралом в (21) стоит кососимметричная форма, обращающаяся в нуль при $z \equiv w$, $F \equiv \Phi$.

Остается показать, что равенства (16) и (20) определяют настоящие скалярные произведения. Для этого рассмотрим квадратичный функционал

$$\int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1}\left[(\nabla^2 f)^2+\frac{æ}{s}\left((\frac{1}{s}{f_\psi}^2)_{ss}-({f_s}^2)_s\right)\right]\ s ds\, d\psi. \tag{22}$$

Форма (14) является полярной к (22) при $æ=1-\nu$, $f=w$, форма (17) — при $æ=1+\nu$, $f=F$.

Сделаем замену переменных $\xi=\ln s$. Тогда

$$s=e^{\xi};\quad \frac{1}{s}=e^{-\xi};\quad s\partial_s=\partial_\xi;\quad \partial_{ss}=e^{-2\xi}(\partial_{\xi\xi}-\partial_\xi),$$

$$\nabla^2 f=e^{-2\xi}(f_{\xi\xi}+f_{\psi\psi});\qquad ({f_s}^2)_s=2e^{-3\xi}(f_\xi f_{\xi\xi}-{f_\xi}^2), \tag{23}$$

$$({f_\psi}^2)_{ss}=2e^{-3\xi}({f_\psi}^2-2f_\psi f_{\psi\xi}+{f_{\psi\xi}}^2+f_\psi f_{\psi\xi\xi}-f_\psi f_{\psi\xi}). \tag{24}$$

Обозначим

$$a=f_{\xi\xi};\quad b=f_{\psi\psi};\quad c=f_{\psi\xi};\quad d=f_\xi;\quad e=f_\psi. \tag{25}$$

Подставим (23), (24) в (22) и проинтегрируем по частям два последних слагаемых (24) ("перебросим" ψ, изменив знак, согласно (13)). Тогда квадратная скобка в (22) с точностью до положительного множителя $e^{-4\xi}$ будет равна следующей квадратичной форме переменных (25):

$$\begin{gathered}(a+b)^2+2æ(d^2-ad+bd+e^2+c^2-ab-2ec)=\\ =[a+(1-æ)b-æd]^2+2æ[e-c]^2+æ(2-æ)[b+d]^2\geqslant 0.\end{gathered} \tag{26}$$

При любом выборе $æ=1\mp\nu$ коэффициенты (26) положительны, а сама форма неотрицательна. Тем более будет неотрицательным интеграл (22) от нее. Пусть теперь форма (26) равна нулю. Это возможно тогда и только тогда, когда равна нулю каждая из квадратных скобок в (26). Расшифровав обозначения (25), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}cc\partial_\xi-1)f_\psi=0,\\ f_{\psi\psi}+f_\xi=0,\\ f_{\xi\xi}+(1-æ)f_{\psi\psi}-æf_\xi=0.\end{cases} \tag{27}$$

Первое уравнение обыкновенное. Его общее решение:

$$f_\psi=e^{\xi}g(\psi), \tag{28}$$

где g — произвольная функция только ψ. Выразив $f_{\psi\psi}$ из второго и подставив в третье, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\partial_\xi-1)f_\xi=0. \tag{29}$$

Его общее решение:

$$f_\xi=e^{\xi}h(\psi), \tag{30}$$

где h — произвольна. Продифференцируем (28) по ψ, после чего подставим полученное выражение и равенство (30) во второе уравнение системы (27). Сократив e^{ξ}, получим:

$$g_{\psi} = -h. \tag{31}$$

Из тождества $f_{\xi\psi} = f_{\psi\xi}$, дифференцируя (28), (30) по соответствующим координатам, будем иметь:

$$h_{\psi} = g. \tag{32}$$

Сравнивая (31), (32), убеждаемся, что

$$g = C_1 \ \cos\psi - C_2 \ \sin\psi; \qquad h = C_1 \ \sin\psi + C_2 \ \cos\psi. \tag{33}$$

Теперь (28) и (30) представляют собой систему

$$f_{\xi} = e^{\xi}(C_1 \ \sin\psi + C_2 \ \cos\psi); \quad f_{\psi} = e^{\xi}(C_1 \ \cos\psi - C_2 \ \sin\psi). \tag{34}$$

Откуда

$$f = C_1 \ e^{\xi}\sin\psi + C_2 \ e^{\xi}\cos\psi + C_3. \tag{35}$$

Подставив (34), (35) в устойчивые краевые условия группы (15) или (18) (в зависимости от æ), получим, что константы C_1, C_2, C_3 равны нулю. Поэтому форма (26) может равняться нулю только при $f \equiv 0$. Тем самым положительность квадратичной формы (26) доказана, а вместе с ней и положительность функционала (22).

Итак, для консольно закрепленного конуса линеал пар функций $(w \ \ F)$ распадается в прямое произведение линеалов компонент, подчиненных соответственно условиям (15) и (18), на которых симметричная часть формы (9) индуцирует скалярные произведения (16), (20), вследствие чего базис можно строить отдельно для w, отдельно для F и решать, по сути дела, последовательность двух задач попроще вместо одной сложной.

На функциях, подчиненных краевым условиям (15) и (18), квадратичная форма $D\langle w,w\rangle + (Eh)^{-1}\langle F,F\rangle$ представляет собой энергию деформации, в чем нетрудно убедиться, подставив (2)–(4) в (14), (17):

$$\begin{aligned}
&D\langle w,w\rangle + (Eh)^{-1}\langle F,F\rangle = \\
&\quad = D\int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1}\left[(\nabla^2 w)^2 + \frac{1-\nu}{s}\left((\frac{1}{s}{w_{\varphi}}^2)_{ss} - ({w_s}^2)_s\right)\right] \ s ds\, d\psi + \\
&\qquad + \frac{1}{Eh}\int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1}\left[(\nabla^2 F)^2 + \frac{1+\nu}{s}\left((\frac{1}{s}{F_{\varphi}}^2)_{ss} - ({F_s}^2)_s\right)\right] \ s ds\, d\psi = \\
&\quad = D\int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1}\left[(\chi_1+\chi_2)^2 + 2(1-\nu)(\tau^2 - \chi_1\chi_2)\right] \ s ds\, d\psi + \\
&\qquad + \frac{1}{Eh}\int\limits_0^{2\pi\sin\gamma}\int\limits_{s_0}^{s_1}\left[(T_1+T_2)^2 + 2(1+\nu)(S^2 - T_1T_2)\right] s\, ds\, d\psi.
\end{aligned} \tag{36}$$

Формула (36) отличается от формулы (1.112) из [2. С. 46] для потенциальной энергии деформации в общей линейной теории оболочек только отсутствием множителя 1/2. Однако выражения приращений кривизны и кручения через смещения в технической теории оболочек отличаются от соответствующих формул общей теории [2] весьма заметно. Именно в технической теории отброшены все члены, содержащие тангенциальные смещения и их производные по координатам. Поэтому можно сказать, что форма энергии растяжения–сжатия–сдвига в технической теории точна, форма энергии изгиба–скручивания приближенна. Это обстоятельство и является причиной, по которой краевые условия (15), (18) не похожи на соответствующие условия общей теории оболочек.

Задача о флаттере решалась также и для консольно закрепленной цилиндрической оболочки. Краевые условия получаются выкладками, аналогичными приведенным в настоящей статье. Для цилиндра удается показать, что условие

$$s = s_0 : \qquad \tilde{Q}_F = 0 \tag{37}$$

можно трактовать как условие однозначной восстановимости окружного смещения v из системы кинематических соотношений технической теории оболочек между деформациями в касательной плоскости и производными от смещений. Условие

$$s = s_0 : \qquad M_F = 0 \tag{38}$$

достаточно наглядно как для цилиндра, так и для конуса: из (7) видно, что волокну срединной поверхности, лежащему на закрепленном контуре, запрещено растягиваться.

Динамическая задача для конической оболочки в описанной здесь постановке решена в [4] для частного случая осевой симметрии.

Литература

[1] Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.

[2] Новожилов, В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

[3] Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения / П. Панагиотопулос. – М.: Мир, 1989. – 494 с.

[4] Александров, В.М. Динамика конической оболочки при внутреннем сверхзвуковом потоке газа / В.М. Александров, С.А. Гришин // Прикл. мат. и мех. – 1994. – Т. 58. – Вып. 4. – С. 123–132.

Поступила в редакцию 6/*VI*/2008;
в окончательном варианте — 6/*VI*/2008.

ON THE PROBLEM FORMULATION FOR THE TECHNICAL THEORY OF SHELLS IN MIXED FORM

© 2008 S.A. Grishin[2]

The flutter problem for a conical clamped-free shell under influence of the supersonic gas flow out from it is investigated. The shell is assumed to be elastic isotropic and homogeneous and described by equations of the technical theory of shells in the mixed form [1]. In that case two scalar functions on the shell middle surface: the normal deflexion and the membrane-stress potential are required to find. The boundary conditions therefore also must be formulated in terms of these functions and their derivatives. It is extremely important that the mechanical system be conservative when no flow interacts with it.

Keywords: *shell, technical theory, flutter, supersonic flow.*

Paper received 6/ *VI*/2008.
Paper accepted 6/ *VI*/2008.

[2]Grishin Sergei Anatolievich, (grishin@ipmnet.ru), Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, 119526, Russia.