МЕХАНИКА

УДК 539.4

ВАРИАНТ КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛИМЕРОВ

© 2008 М.М. Алиев, Н.Г. Каримова[1]

В статье рассматривается новый критерий прочности для изотропных полимеров, находящихся под действием высокого уровня гидростатического давления. Получены результаты сравнения с критерием прочности в виде экспоненциальной функции между первым инвариантом тензора напряжений и вторым инвариантом девиатора напряжений и с известными критериями прочности Баландина, Друккера–Прагера. В отличие от критериев прочности для изотропных материалов, преимущество нового критерия состоит в том, что он содержит только два параметра прочности (предел прочности при растяжении и сжатии).

Ключевые слова: *изотропный полимер, критерий прочности, тензор напряжений.*

Такие новые материалы, как труднодеформируемые сплавы, однонаправленные композиты, изотропные полимеры, требуют разработки критериев прочности, учитывающих существенность действия шарового тензора. Влияние гидростатического давления на характеристики прочности и на напряжения разрушения было установлено в работах [1, 2], а на характеристики текучести полимеров экспериментально показано в [3]. В работе [4] проведено экспериментальное исследование зависимости прочностных свойств двух однонаправленно армированных композитных материалов от величины наложенного высокого гидростатического давления.

Таким образом, актуальна задача о разработке, для некоторых видов материалов, критерия прочности, который будет учитывать влияние высокого уровня гидростатического давления. Один из таких критериев был предложен в [5], где учитывается то обстоятельство, что одно лишь гидростатическое давление не может вызвать разрушения, так как при возрастании давления (в направлении отрицательных значений гидростатической

[1]Алиев Мехрали Мирзали оглы (alievmm@rambler.ru), Каримова Наталья Геннадьевна (karimovang@mail.ru), кафедра прикладной механики Альметьевского государственного нефтяного института, 423450, Россия, Республика Татарстан, г. Альметьевск, ул. Ленина, 2.

оси) поверхность разрушения стремится к прямой, параллельной гидростатической оси.

Новый критерий прочности, предлагаемый в работе [5], для изотропных полимеров в виде экспоненциальной функции между первым инвариантом тензора напряжений и вторым инвариантом девиатора напряжений имеет вид

$$\eta + (\eta + k)\exp\left(\frac{\xi}{\xi_0} - 1\right) - k = 0, \tag{1}$$

где k и ξ_0 — константы материала;

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \tag{2}$$

— полярная координата в девиаторной плоскости;

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{3}$$

где $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ — главные напряжения.

В теории пластичности со специальной оговоркой часто критерий прочности принимается как условие текучести и используется для определения предельной нагрузки. Решение задач теории пластичности в условиях плоской деформации для пластичных материалов, используя критерий (1), как условие текучести, является непростой задачей. Это связано с тем, что найти соотношение для напряжений, удовлетворяющих этому критерию, достаточно сложно.

1. Вариант критерия прочности

Рассмотрим вариант построения критерия прочности для материалов, работающих в условиях высокого уровня гидростатического давления.

В своих работах В.В. Соколовский [6] принимает специальное условие текучести для пластичных материалов в условиях плоской деформации как синусоидальную зависимость.

Исходя из предложения В.В. Соколовского, критерий прочности для изотропных материалов, в том числе, полимеров принимаем в виде синусоидальной зависимости между параметрами η и ξ в виде

$$\eta = A\sin\left(\frac{B - \xi}{A}\right), \tag{4}$$

где η и ξ определяются по (2) и (3), A и B — постоянные, зависящие от характеристик прочности материала.

В отличие от критериев прочности для изотропных материалов, предложенных в [7, 8], преимущество критериев (1) и (4) состоит в том, что они содержат только два параметра прочности (предел прочности при растяжении и сжатии).

Согласно (5)

$$\frac{B-\xi}{A} = \arcsin\frac{\eta}{A}.$$

Разложив по ряду Тейлора, получим

$$B-\xi = \eta + \frac{\eta^3}{6A^2} + \frac{3\eta^5}{40A^4} + \ldots . \tag{5}$$

Отсюда, оставляя два члена полинома, получим выражение критерия прочности в виде

$$\eta^3 + C(\eta+\xi) = D,$$

где $C = 6A^2$, $D = 6A^2B$.

Принимая из ряда три члена полинома, критерий прочности получим в виде

$$\eta^5 + \eta^3 C_1 + C_2(\eta+\xi) = D_1 \tag{7}$$

где $C_2 = 40A^2$, $D_1 = 40A^4B$, $C_1 = \dfrac{20}{3}A^2$.

Критерии (6) и (7), в отличие от (1) и (5), имеют традиционный вид. Если разложение в ряд осуществить для экспоненциальной зависимости, согласно (1), и для синусоида, согласно (4), то оба критерия имели бы громоздкий вид.

Подставляя (2) и (3) в (6), критерий прочности приведем к развернутому виду:

$$\begin{gathered}\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]^{\frac{3}{2}} + \\ +\frac{C}{\sqrt{3}}\left(\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]^{\frac{1}{2}} + (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right) = D.\end{gathered} \tag{8}$$

Постоянные входящие в (8) могут быть определены из двух простых испытаний.

При одноосном растяжении получим:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sigma_P^3 + \frac{C}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}+1\right)\sigma_P = D. \tag{9}$$

При одноосном сжатии:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sigma_C^3 + \frac{C}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)\sigma_C = D, \tag{10}$$

где σ_P и σ_C — пределы прочности материала при одноосном растяжении и сжатии соответственно.

Решая совместно (9) и (10), получим

$$C = \frac{2\sqrt{2}\left(\sigma_C^3-\sigma_P^3\right)/3}{\left(\sqrt{2}+1\right)\sigma_P - \left(\sqrt{2}-1\right)\sigma_C} = 6A^2;$$

$$D = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sigma_P^3 + C\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\sigma_P.$$

Входящие в (7) постоянные связаны с C и D следующими зависимостями:

$$C_1 = \frac{10}{9}C, \qquad C_2 = \frac{20}{3}C, \qquad D_1 = \frac{20}{3}D.$$

2. Результаты сравнения критериев прочности

Проведем сравнение предложенного нами критерия (6) с критерием (1). Также рассмотрим известный критерий прочности Баландина [9], который в параметрах η и ξ выглядит в следующем виде:

$$1,5\eta^2 + \sqrt{3}\xi(\sigma_C - \sigma_P) = \sigma_C\sigma_P. \qquad (11)$$

В координатной системе η и ξ построим предельные кривые для полиметилметакрилата (ПММА) с характеристиками прочности $\sigma_C = 108$ МПа; $\sigma_P = 85$ МПа [5] (рис. 1).

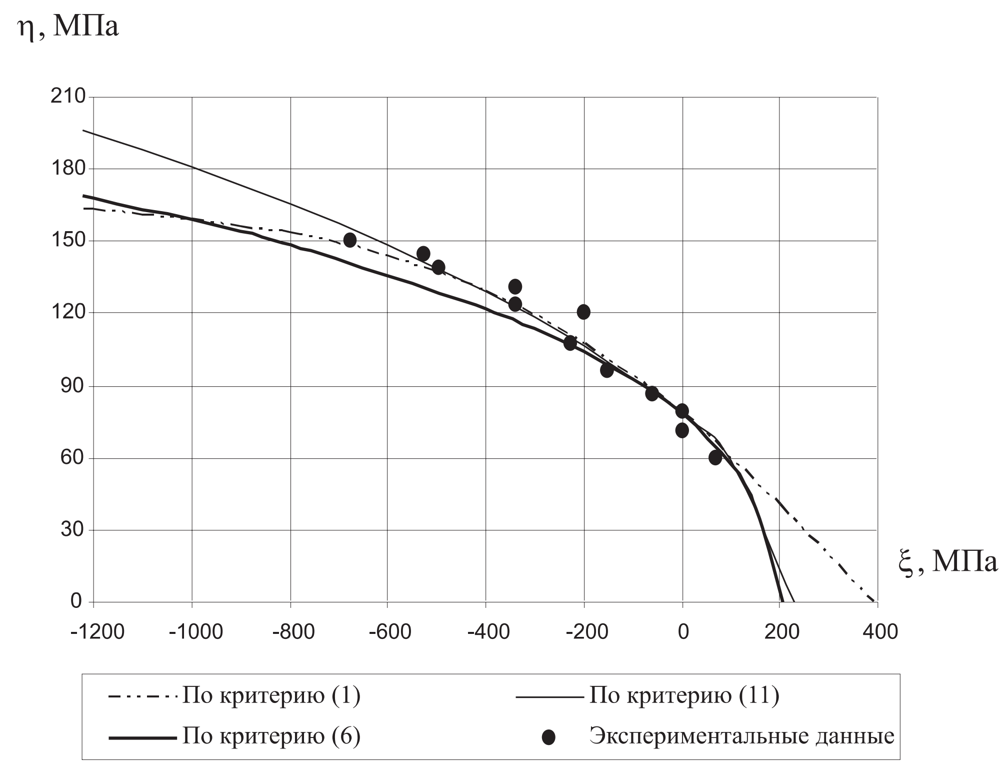

Рис. 1. Предельные кривые в плоскости η и ξ для ПММА

На рис. 2 представлены предельные кривые, построенные для эпоксидного компаунда с характеристиками прочности $\sigma_C = 38,6$ МПа; $\sigma_P =$ $= 26$ МПа [5].

Поверхность критерия (1) близка к конической при малых гидростатических давлениях и стремится к цилиндрической при возрастании гидро-

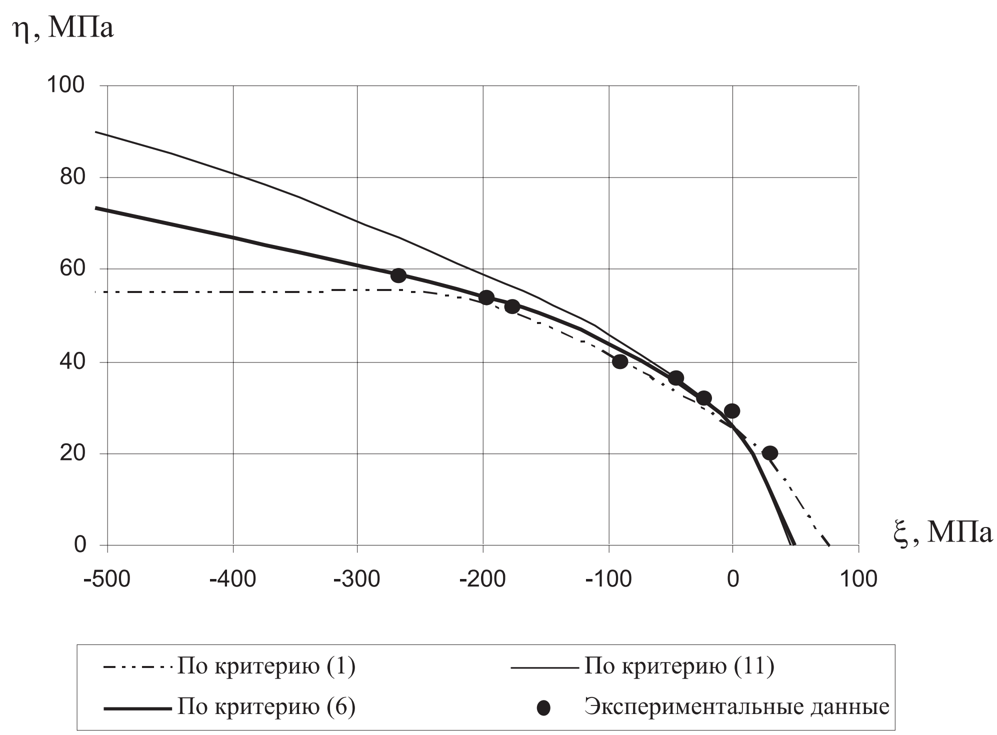

Рис. 2. Предельные кривые в плоскости η и ξ для эпоксидного компаунда

статического давления. Кривая, построенная по критерию (11), при возрастании такого давления резко отклоняется от (1). Поверхность критерия (6), предложенного нами, имеет вид кубической параболы, находящейся между поверхностями (1) и (11). Из данных рис. 1–2 также видно, что наибольшее отклонение происходит в областях всестороннего растяжения, тогда как критерии (11) и (6) почти совпадают, а критерий (1) завышает возможность сопротивления материала на действие такого типа нагружения.

3. Плоское напряженное состояние

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$) критерий (6) будет иметь вид

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+\sigma_1^2+\sigma_2^2\right]^{\frac{3}{2}}+ \\ +\frac{C}{\sqrt{3}}\left(\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+\sigma_1^2+\sigma_2^2\right]^{\frac{1}{2}}+(\sigma_1+\sigma_2)\right)=D, \tag{12}$$

а критерий Баландина

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2+(\sigma_C-\sigma_P)(\sigma_1+\sigma_2)=\sigma_C\sigma_P. \tag{13}$$

Для сравнения результатов в условиях плоского напряженного состояния также рассмотрим критерий Друккера–Прагера [10], который в координатах ξ и η имеет вид:

$$\eta + A\,\xi + B = 0,$$

а в плоском напряженном состоянии

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\frac{\sigma_C - \sigma_P}{\sigma_C + \sigma_P}(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\sqrt{2}\frac{\sigma_P\sigma_C}{\sigma_P + \sigma_C}. \qquad (14)$$

По критериям (12)–(14) в координатной системе σ_1 и σ_2 построены кривые прочности для полиметилметакрилата (ПММА) (рис. 3) и эпоксидного компаунда (рис. 4).

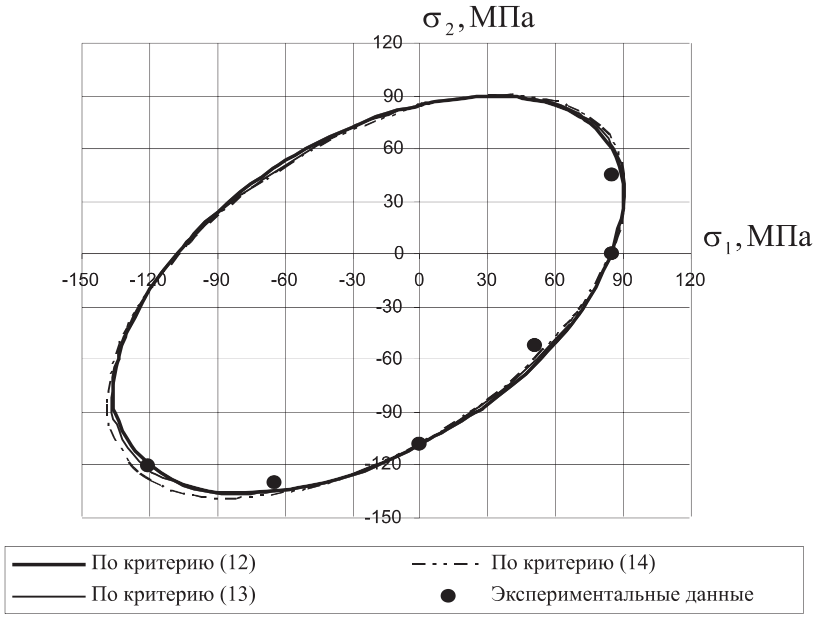

Рис. 3. Предельные линии в плоскости главных напряжений для ПММА

Сопоставив результаты, получим следующее: максимальное отклонение между кривыми, построенными по критериям (12) и (14), составляет 14%, а между критериями (12) и (13) — 5%.

4. Плоская деформация

Для получения условия текучести пластичного полимерного материала, неодинаково сопротивляющегося на растяжение и сжатие в условиях плоской деформации, одна из главных относительных деформаций приравнивается к нулю.

Принимаем (6) в виде пластического потенциала

Для случая плоской деформации при $\varepsilon_z = \varepsilon_3 = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0$ получим

$$3\eta^2(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) + C(\eta + \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) = 0.$$

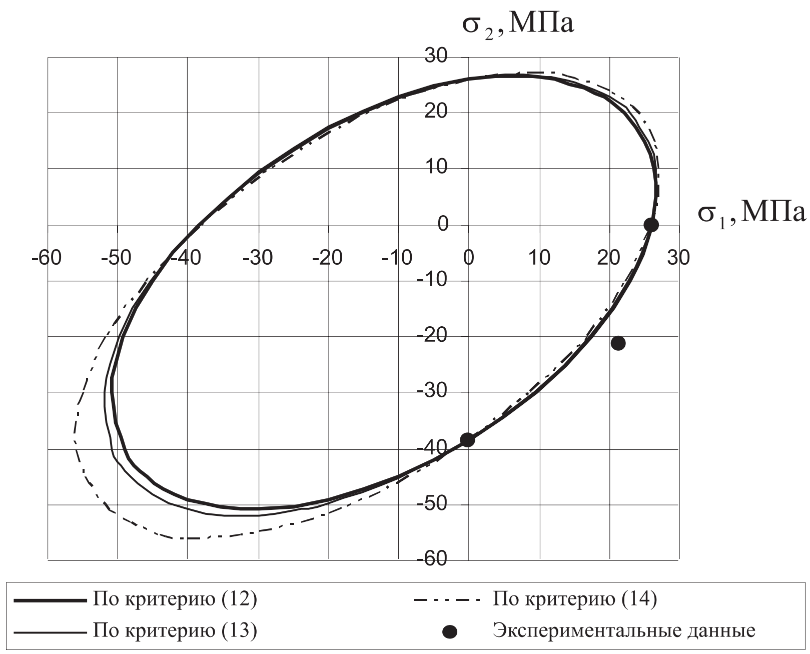

Рис. 4. Предельные линии в плоскости главных напряжений для эпоксидного компаунда

Отсюда точное выражение σ_3 через прочностные параметры и другие компоненты напряжений аналитически не представляется возможным.

Точно такая же сложность возникла в работе [9] при выводе условия текучести для плоской деформации, когда поверхность текучести включает третий инвариант девиатора напряжений.

Принимая линейную зависимость в виде

$$\sigma_3 = 0,5\,(\sigma_1 + \sigma_2) + 0,5\,(\sigma_C - \sigma_P)\,, \tag{15}$$

получено приемлемое решение. При этом максимальное отклонение между точным решением и принятым находилось в пределах 4–10%.

Исходя из такого подхода, мы также принимаем σ_3 подобно (15), в виде

$$\sigma_3 = k\,(\sigma_1 + \sigma_2) + 0,5\,(\sigma_C - \sigma_P)\,, \tag{16}$$

где k — постоянное, безразмерное число.

Подставляя (16) в (2) и (3), получим

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Big\{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + [k\,(\sigma_1 + \sigma_2) + 0,5\,(\sigma_C - \sigma_P)]^2 -$$
$$-\sigma_1\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\,[k\,(\sigma_1 + \sigma_2) + 0,5\,(\sigma_C - \sigma_P)]\Big\}^{\frac{1}{2}},$$
$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}\,[\sigma_1 + \sigma_2 + k\,(\sigma_1 + \sigma_2) + 0,5\,(\sigma_C - \sigma_P)]\,.$$

Обозначим

$$p = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2), \qquad q = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Тогда главные напряжения и параметры η и ξ будут определяться следующими зависимостями:

$$\sigma_1 = p + q, \qquad \sigma_2 = p - q,$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Big[(p+q)^2 + (p-q)^2 + (2kp + a_1)^2 - \\ - \left(p^2 - q^2\right) - 2p\,(2kp + a_1)\Big]^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[+kp + 0,5\,(\sigma_{-}\sigma_P)\right], \tag{18}$$

где $a_1 = 0,5\,(\sigma_C - \sigma_P)$.

Подставляя (17) и (18) в (6) и возводя в квадрат, а затем, группируя, получим

$$d_1q^6 + m_5q^4 + m_4q^2 + p^2\,(m_8 - m_{11}) + p\,(m_9 + m_{10}) + (m_2 - m_{13} - m_{12}) + \\ + \big[\, d_2p^6 + m_1p^3 + d_5q^2p^4 + q^2p^2m_3 + d_8q^4p^2 + d_9q^4p + d_{11}q^2p^3 + \\ + q^2pm_6 + p^4m_7 + d_{14}p^5\big] = 0.$$

Анализируя полученный критерий, в условиях плоской деформации для различных полимеров (ПММА, эпоксидное связующее, эпоксидный компаунд, полиэфирное связующее) и принимая, например, $k = 0,48$, видим, что при отбрасывании членов полинома, заключенных в квадратные скобки, погрешность в процентном соотношении не превышает 0,2%. При других значениях k погрешность значительно возрастает.

Таким образом, в условиях плоской деформации критерий (6) приводится к следующему виду:

$$d_1q^6 + m_5q^4 + m_4q^2 + p^2h_1 + ph_2 + h_3 = 0, \tag{19}$$

где d_1, m_5, m_4, h_1, h_2, h_3 выражаются через σ_C, σ_P, C, D, k.

Сделав подстановку $q^2 = t$, получим

$$t^3 + t^2\frac{m_5}{d_1} + t\frac{m_4}{d_1} + \frac{N}{d_1} = 0, \tag{20}$$

где $N = p^2h_1 + ph_2 + h_3$.

Кубическое уравнение (20) с помощью подстановки

$$t = y - \frac{m_5}{3d_1}$$

приводим к следующему виду

$$y^3 + uy + z = 0,$$

где

$$u = \frac{m_4}{d_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{m_5}{d_1}\right)^2; \qquad z = \frac{2}{27}\left(\frac{m_5}{d_1}\right)^3 - \frac{m_4m_5}{3d_1^2} + \frac{N}{d_1}.$$

Решение кубического уравнения, например, в тригонометрической форме имеет вид

$$y = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{3},$$

где $n = 0, 1, 2$;

$$r = \sqrt{-\frac{u^3}{27}}; \qquad \cos\varphi = -\frac{z}{2r}.$$

Таким образом, вещественный корень кубического уравнения получим в следующем виде

$$q = \sqrt{2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{3} - \frac{m_5}{3d_1}}. \tag{21}$$

Выражение (21) является условием текучести рассматриваемой среды при плоской ее деформации.

Литература

[1] Ашкенази, Е.К. Анизотропия конструкционных материалов / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1972. – С.216.

[2] Ol'khovik, O. Criterion of static strength for polyester glass-fiber plastic binder in triaxial stress state / O. Ol'khovik, J. Figovsky , V. Feigin // J. Mech. Behavior of Mater. – 1998. – V. 9. – №4. – P. 291–295.

[3] Rabinowitz, S. The effect of hydrostatic pressure on the shear yield behavior of polymers / S. Rabinowitz, I.M. Ward, J.S. Parry // J. Mater. Sci. – 1970. – V. 5. – P. 29–39.

[4] Зиновьев, П.А. Прочность однонаправленных композитов в условиях высокого гидростатического давления / П.А. Зиновьев, С.В. Цветков, Г.Г. Кулиш // Механика композит. материалов . – 2001. – Т. 37. – №4. – С. 451–462.

[5] Альтенбах, Х. Новый критерий статической прочности изотропных полимеров / Х. Альтенбах, К. Туштев // Механика композитных материалов. – 2001. – Т. 37. – №5/6. – С. 732–739.

[6] Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969.

[7] Ягн, Ю.И. Новые методы расчета на прочность / Ю.И. Ягн // Вестник инженеров и техников. – 1931. – №6. – С. 237–244.

[8] Гольденблат, И.И. Критерий прочности анизотропных стеклопластиков / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – №5. – С. 5–9.

[9] Гениев, Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.

[10] Drucker, D.C. Soil mechanics and plastic analysis or limit design / D.C. Drucker, W. Prager // Quarterly of Applied Mathematics. – 1952. – 10. – №2. – P. 157–165; русский перевод: Б.А. Иванов, сб. Механика. – 1975. – №2. – С. 166–177.

Поступила в редакцию 3/*IV*/2008;
в окончательном варианте — 3/*IV*/2008.

VARIANT CRITERION OF STRENGTH FOR ISOTROPIC POLYMERS

© 2008 M.M. Aliev, N.G. Karimova[2]

In the paper a new criterion of strength for isotropic polymers under hydrostatic pressure conditions is considered. The results of comparison with the strength criterion as the exponential function between the first invariant of stresses tensor and the second invariant of the stresses deviator as well as with the known criteria of strength Ballandin, Drucker-Prager are received. In comparison with the strength criteria for isotropic materials the new criterion advantage is that it has only two strength parameters (tensile and compressive strength limit).

Keywords: *isotropic polymer, criterion of strength, stress tensor.*

Paper received $3/IV/2008$.
Paper accepted $3/IV/2008$.

[2]Aliev Mekhrali Mirzali-Ogli (`alievmm@rambler.ru`), Karimova Natalia Gennadievna (`karimovang@mail.ru`), Dept. of Applied, Almet'evsk State Petroleum Institute, Almet'evsk, 423450, Russia.