

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ РАБОТ ПО ПРОЕКТУ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

© 2008 А.И. Шашкин¹ М.М. Ширяев²

В данной статье рассматривается математическая модель календарного плана работ по проекту, представленного в виде нечеткого ориентированного графа. Исследуется возможность применения теории нечетких множеств, чтобы повысить качество решений, получаемых с помощью разработанных авторами генетических алгоритмов, которые описаны в ранее изданных статьях. Предлагается оригинальный алгоритм выбора одного из двух нечетких чисел. Материал статьи наиболее применим к решению вопросов автоматизации организаций, основные ресурсы которых — трудовые, а выполняемые задачи характеризуются сложностью и большим количеством взаимосвязей.

Ключевые слова: генетический алгоритм, календарное планирование, нечеткие данные, качество решения.

Введение

Календарное планирование работ — это одна из важных и трудоемких задач, с которой сталкивается менеджер проектов в своей повседневной деятельности. В предыдущих статьях, посвященных этой тематике, были описаны разработанные авторами генетические алгоритмы для генерации плана работ по проекту. Цель данной статьи — исследовать возможность применения теории нечетких множеств, чтобы повысить качество решений, получаемых с помощью созданных генетических алгоритмов.

¹Шашкин Александр Иванович (dean@amm.vsu.ru), факультет прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

²Ширяев Михаил Михайлович (m_shir@mail.ru), факультет прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

1. Нечеткая оценка длительности выполнения плана работ

Рассматривается следующая проблема: требуется назначить исполнителей для выполнения определенного множества задач, которые в совокупности представляют собой проект, обеспечив наилучшие значения критериев оптимальности решения. Исходными данными служат известные трудозатраты выполнения задач исполнителями, рабочий график исполнителей, зависимости задач друг от друга. Разработаны генетические алгоритмы, генерирующие планы работ по проекту. Необходимо рассмотреть возможность использования этих алгоритмов для работы с нечеткими данными.

В реальных условиях управления исходные данные, которыми оперируют руководители для принятия решений, характеризуются наличием неопределенностей. Как показывает опыт, наиболее значимой информацией в исходных данных, которая содержит неопределенность и существенно влияет на результат планирования, является информация о трудозатратах исполнителей на выполнение задач.

В связи с тем, что один и тот же исполнитель задействован в выполнении множества задач в ходе проекта, изменение продолжительности выполнения одной задачи может влиять не только на время начала выполнения других задач, но и на длительность их выполнения, т.к. потребуются замена назначенных на них исполнителей. Это означает, что нечеткость трудозатрат исполнителей на выполнение задач, и как следствие, нечеткость длительностей выполнения задач увеличивает степень неопределенности решаемой проблемы. На практике данным аспектом можно пренебречь, т.к. в процессе выполнения работ над проектом руководитель постоянно проводит актуализацию (корректировку) плана работ.

Значения трудозатрат задаются в виде гауссовых нечетких чисел. Выбор именно такой формы представления объясняется тем, что возникающие в задаче нечеткие множества являются по смыслу нормальными (максимальное значение функции принадлежности равно 1) и унимодальными (1 достигается в единственной точке), а также простотой определения арифметических операций [7].

Нечеткое число A называется гауссовым, если его функция принадлежности определяется как

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}, \quad x \in R, \quad \sigma > 0.$$

Параметр α определяет точку максимума функции принадлежности, σ описывает степень нечеткости числа, значения $\alpha \pm \sigma$ являются точками перегиба графика функции принадлежности. На рис. 1 изображен график функции принадлежности гауссова нечеткого числа "примерно три" с параметрами $\alpha = 3$, $\sigma = 1$.

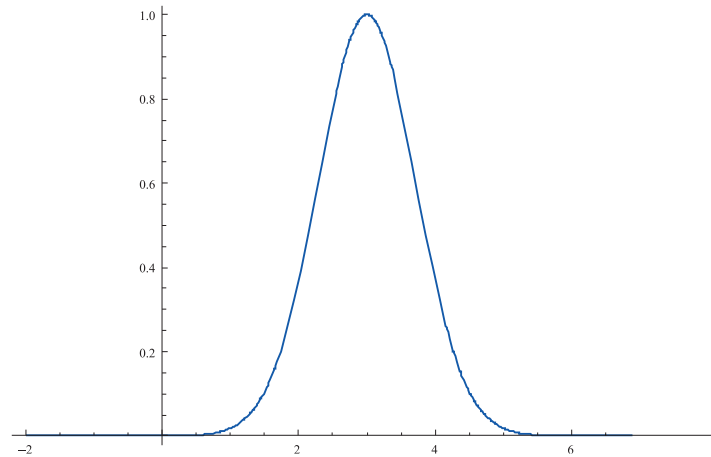


Рис. 1. Функция принадлежности гауссова нечеткого числа

Операция сложения для гауссовых чисел вводится следующим образом. Пусть число A задается параметрами (α, σ) , а число B — параметрами (b, t) . Тогда суммой $A+B$ будет нечеткое гауссово число с параметрами $(\alpha+b, \sigma+t)$ [8]. Расстояние между данными нечеткими числами A и B определяется по формуле $d^2(A, B) = (\alpha - b)^2 + (\sigma - t)^2/2$ [9].

На практике степень нечеткости трудозатрат зависит от типа работы, назначаемого исполнителя и других факторов.

Для работы созданных генетических алгоритмов необходимо:

- 1) вычислить длительность работы над проектом в виде гауссова нечеткого числа;
- 2) определить бинарную операцию на нечетких числах, выполняющую выбор наилучшего решения.

В [1] рассматривается похожая проблема — нечеткая оценка сроков начала и окончания работ над задачами проекта. Однако, в [1] продолжительности работ представлены нечеткими интервалами (L-R)-типа. Для разрабатываемой системы более удобен способ представления нечетких данных в виде гауссовых нечетких чисел, как с точки зрения расчетов, так и комфорта работы пользователей. Каждый нечеткий интервал представлен четырьмя параметрами, тогда как гауссовы числа требуют определения только двух интуитивно понятных параметров.

В соответствии со способом представления нечетких данных определяются используемые бинарные операции сложения и выбора одного из двух нечетких чисел.

Новизна данной статьи, в т.ч. по сравнению с [1], заключается в модернизации способа представления проекта в виде графа, обусловленной особенностями работы генетических алгоритмов, двух предлагаемых подходов для нечеткой оценки длительности работы над проектом, которые

используют критический путь графа проекта, а также новой является операция выбора "наибольшего" нечеткого числа.

План работ над проектом можно представить в виде ориентированного ациклического графа, вершины которого обозначают начало и окончание работ над задачами проекта (рис. 2). Существует две фиктивные вершины, соответствующие началу и окончанию проекта.

Дуги графа бывают двух видов, перечисленных далее.

- 1) Дуга, обозначающая выполнение задачи. Направленные дуги — от вершины начала задачи к вершине ее окончания. Вес дуги — это длительность выполнения задачи.
- 2) Дуга, обозначающая зависимость задач. Направление дуги — от вершины окончания задачи к вершине начала зависимой от нее задачи. Вес дуги — длительность простоя между выполнением задач.

Вершины начала задач, которые не зависят от других, соединяются с вершиной начала проекта дугами 2-го вида. Их вес равен длительности задержки от начала проекта до старта выполнения задачи. Вершины окончания задач, от которых не зависят другие, соединяются с вершиной окончания проекта дугами 2-го вида с нулевым весом.

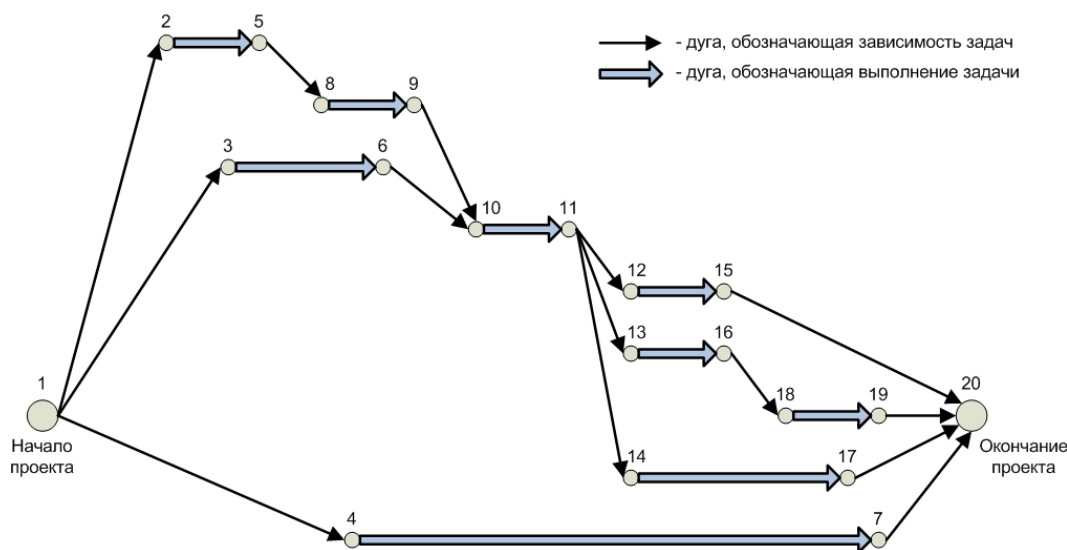


Рис. 2. Граф, описывающий план работ над проектом

Чтобы получить длительность работы над проектом достаточно найти длину критического пути в описанном графе. Далее приводится экономичный алгоритм нахождения критического пути, который учитывает специфику обрабатываемого графа [4].

Пусть вершины пронумерованы так, что дуга (x_i, x_j) всегда ориентирована от вершины x_i к вершине x_j , имеющей больший номер, как показано на рис. 2. Для ациклического графа такая нумерация всегда возможна и производится очень легко. При этом начальная вершина получает номер 1, а конечная — номер n .

Присвоим вершине x_j пометку $l(x_j)$, равную длине самого длинного пути от 1 до x_j , используя для этого соотношения

$$l(x_j) = \max_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_j)} [l(x_i) + c_{ij}],$$

где c_{ij} — вес дуги от вершины x_i к x_j , $\Gamma^{-1}(x_j)$ — множество дуг, предшествующих x_j . Затем, снова применяя указанную формулу, присваивается пометка вершине $(x_j + 1)$, и так далее до тех пор, пока последняя вершина n не получит пометку $l(n)$. $l(1)$ полагается равным нулю. Если вершина x_j помечена, то пометки $l(x_i)$ известны для всех вершин $x_i \in \Gamma^{-1}(x_j)$, так как в соответствии со способом нумерации это означает, что $x_i < x_j$ и, следовательно, вершины x_i уже помечены в процессе применения алгоритма.

Пометка $l(n)$ равна длине самого длинного пути от 1 до n . Сами дуги, образующие путь, могут быть найдены обычным способом последовательного возвращения. А именно дуга (x_i, x_j) принадлежит пути тогда и только тогда, когда $l(x_j) = l(x_i) + c_{ij}$. Начиная с вершины x_j равной n , полагаем на каждом шаге x_j равной такой вершине x_i (скажем, x_i^*), для которой выполняется это последнее равенство, и так продолжаем до тех пор, пока не будет достигнута начальная вершина (т. е. пока не будет $x_i^* = 1$).

В описанном алгоритме используются две операции: сложение весов дуг и сравнение (для нахождения максимума).

Первый подход применения этого алгоритма заключается в нахождении критического пути, работая с четкими числами, т.е. используя составляющую а нечетких чисел. Затем по найденному пути с помощью описанной выше операции сложения гауссовых чисел вычисляется нечеткая длительность работы над проектом.

Во втором подходе критический путь ищется с применением нечеткой операции сложения и операции выбора, определенной на нечетких числах. Первый подход требует меньше вычислительных ресурсов по сравнению со вторым, но способен привести к неточной оценке длительности работы над проектом.

2. Операция выбора одного из двух нечетких чисел

Для работы алгоритма поиска критического пути нечеткого графа и отбора решений в генетическом алгоритме необходимо определить операцию, которая производит выбор "наибольшего" из двух нечетких гауссовых чисел. Для этого не потребуется создавать нечеткое бинарное отношение

предпочтения, т.к. нужно однозначно выбрать нечеткое число, а нечеткое отношение такого выбора не обеспечивает.

Рассмотрим величину

$$p(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \mu(y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(y) dy}, \quad \text{где } \mu(y) = e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{\sigma^2}}.$$

Данную величину можно интерпретировать как вероятность того, что число μ реализуется в четкое значение большее или равное x [7]. Введенная величина $p(x)$ равна отношению площади, ограниченной слева числом x , снизу осью абсцисс и сверху функцией принадлежности μ , к площади всей области, определяемой осью абсцисс и функцией принадлежности (рис. 3).

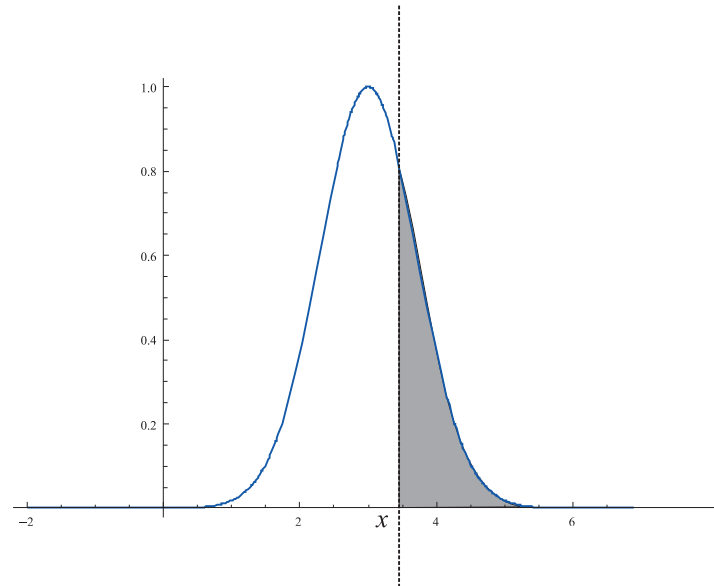


Рис. 3. Геометрический смысл величины $p(x)$

Интегралы, необходимые для вычисления $p(x)$, вычисляются путем сведения их к известной функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp \frac{-t^2}{2} dt.$$

С помощью замены $\frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{y - \alpha}{\sigma}$ отношение для $p(x)$ преобразуется к

виду

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{\int_{\frac{\sqrt{2}(x-\alpha)}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}(x-\alpha)}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} = \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \left(\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}(x-\alpha)}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} = \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{\frac{\sqrt{2}(x-\alpha)}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(x-\alpha)}{\sigma}\right).
 \end{aligned}$$

В результате искомая вероятность того, что реализация гауссова нечеткого числа будет больше или равна x , равна

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(x-\alpha)}{\sigma}\right), \quad \text{если } x \geq \alpha, \\
 &\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(x-\alpha)}{\sigma}\right), \quad \text{если } x < \alpha.
 \end{aligned}$$

Функция $p(x)$ является непрерывно-дифференцируемой, убывающей,

$$p(\alpha) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0.$$

Проблема выбора из двух нечетких чисел, обозначающих длительность выполнения одной задачи (или проекта целиком), решается на основе логики, которой зачастую пользуется руководитель проекта (эксперт). Первая задача считается менее предпочтительной, чем вторая, если существует определенная вероятность того, что первая задача будет иметь большую длительность выполнения.

В наших обозначениях это приводит к необходимости решить два уравнения: $p_1(x) = P$ и $p_2(x) = P$, где p_1 и p_2 — функции вероятности для сравниваемых гауссовых чисел, P — вероятность, которая является параметром, определяющим уровень риска. Предпочтение отдается тому нечеткому числу, для которого корень соответствующего уравнения наименьший.

На рис. 4 показан пример выбора из двух нечетких чисел $A = (3, 1)$, $B = (2, 4)$ с уровнем риска $P = 0,1$. Результатом выбора является число A .

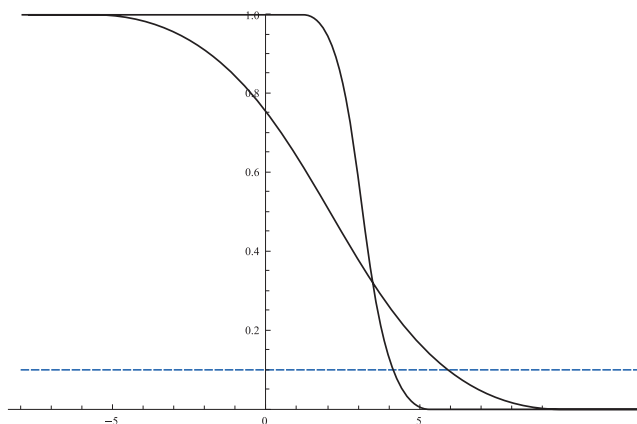


Рис. 4. Выбор из двух нечетких чисел

Функция Лапласа не выражается через элементарные функции, поэтому для решения данных уравнений следует использовать численные методы. Возникают две задачи:

- 1) необходима процедура, вычисляющая интеграл для функции Лапласа с заданной точностью;
- 2) требуется реализовать численный метод решения уравнения для непрерывно-дифференцируемой монотонной функции (например, метод Ньютона).

Применение численных методов для решения указанных задач является классическим и описано в различных источниках.

Заключение

Можно сделать вывод: применение теории нечетких множеств позволяет качественно расширить объем выходной информации алгоритмов генерации планов работ по проектам. Менеджеру проектов предоставляются данные о возможных вариантах развития ситуации.

Завершив исследование математических аспектов управления проектами, планируется получить материал, который станет отправной точкой для разработки информационной системы и ее промышленного внедрения.

Литература

- [1] Дюбуа, Д. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад. — М.: Радио и связь, 1990. — 288 с.

- [2] Рыжков, А.П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А.П. Рыжков. – М.: Диалог-МГУ, 1998. – 81 с.
- [3] Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон. / К. Асаи [и др.]; под редакцией Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
- [4] Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес; Пер. с англ. Э.В. Вершкова, И.В. Коновальцева под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
- [5] Емельянов, В.В. Теория и практика эволюционного моделирования / В.В. Емельянов, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
- [6] Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Г.К. Вороновский [и др.]. – Х.: ОСНОВА, 1997. – 112 с.
- [7] Семенов, Б.А. Генетический алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях при нечетких коэффициентах целевой функции / Б.А. Семенов, И.Л. Каширина // Вестник ВГУ, серия: системный анализ и информационные технологии. – Воронеж, 2006. – №1. – С. 102–108.
- [8] Xu, R. Multidimensional least-squares fitting with fuzzy model / R. Xu, C. Li // Fuzzy sets and Systems. – 2001. – No. 119. – P. 215–223.
- [9] Zadeh L.A. Fuzzy sets, Inform. and Control 8 (1965) 338–353.

Поступила в редакцию 29/V/2008;
в окончательном варианте — 29/V/2008.

JOB SCHEDULING BASED ON FUZZY INPUT DATA

© 2008 A.I. Shashkin³ M.M. Shiryaev⁴

This article describes mathematical model of project job scheduling that represented as oriented fuzzy graph. Possibility of fuzzy sets using to increase quality of authors developed genetic algorithms working results is investigated. The article source is most applicable for automation solutions in firms where primary resources are manpower resources and duties are complex.

Keywords: *genetic algorithm, schedule, fuzzy data, results quality.*

Paper received 29/V/2008.

Paper accepted 29/V/2008.

³Shashkin Alexander Ivanovich (dean@amm.vsu.ru), Dept. of Applied Mathematics, Information Science and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Universitetskaya pl., 1.

⁴Shiryaev Mihail Mihailovich (m_shir@mail.ru), Dept. of Applied Mathematics, Information Science and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Universitetskaya pl., 1.