УДК 517.987

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ КВАЗИМЕРЫ[1]

© 2008 М.Г. Свистула[2]

Рассмотрено понятие правильной обобщенной квазимеры. Доказана теорема о разложении пространства обобщенных квазимер в прямую сумму пространств обобщенных мер и правильных обобщенных квазимер. Полученные результаты перенесены на квазилинейные функционалы.

Ключевые слова: *обобщенная квазимера, пространство квазимер, квазилинейный функционал.*

1. Далее всюду X — компактное хаусдорфово пространство, τ — класс всех открытых, $\mathcal{C}$ — класс всех замкнутых(совпадающий с классом компактных) множеств, $\mathcal{A} = \tau \cup \mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра, $\beta(X)$ — множество всех подмножеств X, символом EF иногда обозначаем пересечение множеств E и F.

Определение 1. Обобщенной квазимерой называется функция множества $\mu : \mathcal{A} \to R$, удовлетворяющая условиям

1) если $E, F \in \mathcal{A}$, $E \cap F = \emptyset$ и $E \cup F \in \mathcal{A}$, то $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;

2) $\sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} < \infty$;

3) для любого $U \in \tau$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и если $E \in \mathcal{A}$ и $E \subset U \setminus C$, то $|\mu(E)| < \varepsilon$.

Заметим, что вместо условия 3) достаточно требовать: для любого $V \in \tau$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и $|\mu(U \setminus C)| < \varepsilon$.

Обобщенные (или знакопеременные) квазимеры впервые рассмотрел Д.Дж. Грубб в работе [1]. В его определении вместо условий 2) и 3) рассматриваются условия

2') существует такое $\alpha \in (0, +\infty)$, что если $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu(U_i)| \leqslant \alpha$;

3') для любого $U \in \tau$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и если $V \in \tau$ и $V \subset U \setminus C$, то $|\mu(V)| < \varepsilon$.

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

[2]Свистула Марина Геннадьевна (marinasvistula@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Нетрудно проверить эквивалентность приведенных определений.

Легко показать, что обобщенные квазимеры образуют линейное пространство, которое будем обозначать QM, и обладают следующими свойствами:

а) $\mu(\emptyset) = 0$;

б) если $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$, то $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^n E_i) = \sum\limits_{i=1}^n \mu(E_i)$;

в) для любого $C \in \mathcal{C}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существет такое $U \in \tau$, что $C \subset U$ и если $E \in \mathcal{A}$ и $E \subset U \setminus C$, то $|\mu(E)| < \varepsilon$.

Определение 2. Пусть $C(X)$ — пространство вещественнозначных непрерывных функций на X с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Квазилинейным называется функционал $\rho : C(X) \to R$, удовлетворяющий условиям

1) для любой функции $f \in C(X)$ функционал ρ является линейным на наименьшей банаховой подалгебре $C(X)$, содержащей f и тождественную единицу;

2) существует такое $\gamma \in R$, что $|\rho(f)| \leqslant \gamma\|f\|$ для всех $f \in C(X)$.

Квазилинейные функционалы образуют линейное пространство, обозначаемое QL; очевидно, оно содержит пространство линейных непрерывных функционалов на $C(X)$. В работе [1] установлено взаимнооднозначное соответствие между QM и QL, что и привлекло внимание к обобщенным квазимерам, хотя они представляют и самостоятельный интерес как обобщение обобщенных регулярных борелевских мер.

Очевидно, сужение регулярной обобщенной борелевской меры на $\mathcal{A}$ является обобщенной квазимерой. Известно, что не всякую обобщенную квазимеру можно продолжить до регулярной обобщенной борелевской меры (см.пример), однако если это возможно, то продолжение единственно в силу регулярности. Обощенную квазимеру, продолжимую до регулярной обобщенной борелевской меры, будем называть обобщенной мерой. Пространство обобщенных мер обозначаем M.

Неотрицательные обобщенные квазимеры, называемые квазимерами, были рассмотрены значительно раньше И.Ф.Аарнесом [2], и их теория более разработана. Очевидно, квазимеры образуют положительный конус, обозначаемый QM^+. Пусть $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$. Нетрудно показать, что $\mu \in QM^+$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

1) если $E, F \in \mathcal{A}$ и $E \subset F$, то $\mu(E) \leqslant \mu(F)$;

2) если $E, F \in \mathcal{A}$, $E \cap F = \emptyset$ и $E \cup F \in \mathcal{A}$, то $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;

3) если $U \in \tau$, то $\mu(U) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C},\ C \subset U\}$ (это условие можно заменить на 3') если $C \in \mathcal{C}$, то $\mu(C) = \inf\{\mu(U) : U \in \tau,\ C \subset U\}$).

Квазимеры, продолжаемые до регулярной борелевской меры, называем мерами; семейство мер обозначаем M^+.

Естественным является перенесение проблематики квазимер на обобщенные квазимеры, что частично сделано в работах [1] и [3]. В данной статье мы пытаемся распространить идеи работы [4] на случай обобщенных квазимер. Заметим, что разность квазимер есть обобщенная квазимера. Обратное, то есть представима ли всякая обобщенная квазимера в виде разности квазимер, остается на сегодняшний день открытым вопросом. Это делает невозможным автоматическое перенесение результатов с квазимер на обобщенные квазимеры. Новизна нашей работы в том, что здесь вводится понятие правильной обобщенной квазимеры (оно обобщает известное понятие правильной квазимеры [5; С. 3008]), для обобщенных квазимер доказаны теорема о разложении, критерий правильности, теорема о том, что правильные обобщенные квазимеры образуют замкнутое подпространство пространства QM. Применяя эти теоремы получили ряд новых, а также некоторые известные результаты.

При изучении обобщенных квазимер будем использовать полную вариацию. Наше определение полной вариации обобщенной квазимеры на классе τ такое же, как в работах [1. С. 1082] и [3. С. 1106], но отличается на классе C, на который мы продолжаем полную вариацию по регулярности.

Определение 3. Пусть $\mu \in QM$. Ее полной вариацией будем называть функцию множества $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$, задаваемую следующим образом:

$$|\mu|(U) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(U_i)| : U_i \in \tau,\ U_i \cap U_j = \emptyset \text{ при } i \neq j\},\ U \in \tau,$$

$$|\mu|(C) = \inf\{|\mu|(U) :\ U \in \tau,\ C \subset U\},\ C \in C.$$

Очевидно, если $\mu \in QM^+$, то $|\mu| = \mu$. Известно, что пространство QM с нормой $\|\mu\| = |\mu|(X)$ является банаховым [1].

Замечание 1. В силу регулярности $\mu \in QM$, определяя $|\mu|(U)$, вместо наборов $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ можно брать наборы из C или $\mathcal{A}$.

Замечание 2. В работе [3] определяется

$$|\mu|(C) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(C_i)| : C_i \in C,\ C_i \subset C,\ C_i \cap C_j = \emptyset \text{ при } i \neq j\},\ C \in C.$$

Вопрос об эквивалентности этого определения нашему остается открытым. Для решения поставленных в статье задач продуктивным является определение 3.

Замечание 3. Нетрудно доказать, что если $\mu \in M$, то $|\mu|$ является сужением на $\mathcal{A}$ классической полной вариации регулярной обобщенной борелевской меры, продолжающей μ [6, С.32] и, следовательно, $|\mu| \in M^+$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\tilde{\mu}(U) = \sup\{|\mu(V)|: V \in \tau,\ V \subset U\},\ U \in \tau$. Очевидно, $\tilde{\mu}(U) = \sup\{|\mu(C)| : C \in C,\ C \subset U\} = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A},\ E \subset U\}$ и $\tilde{\mu}(U) \leqslant |\mu|(U) \leqslant 2\tilde{\mu}(U),\ U \in \tau$.

Пример [1, С. 1086]. Пусть $X = [0, 1] \times [0, 1]$, $C = \{x_1, x_2, x_3\} \subset X$, $E \in \mathcal{A}$ и является солидом в X, то есть E и $X \setminus E$ — связные. Положим

$$\mu_C(E) = \begin{cases} 0, & \text{если } card(E \cap C) \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } card(E \cap C) \geqslant 2. \end{cases}$$

Так определенная функция множества μ_c является солид–функцией и, следовательно, может быть однозначно продолжена до квазимеры μ_c на $\mathcal{A}$, принимающей значения 0 и 1. (Подробнее см. [7], где разработана теория солид–функций).

Пусть $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (1,0)$, $x_3 = (1,1)$, $x_4 = (0,1)$. Положим $C = \{x_1, x_2, x_3\}$, $D = \{x_2, x_3, x_4\}$. Рассмотрим $\mu = \mu_C - \mu_D$, Очевидно, $\mu \in QM$ и принимает значения $0, 1, -1$. В работе [1] показано, что $|\mu| \notin QM^+$, значит, в силу замечания 3 получаем $\mu \notin M$.

2. Как показывает приведенный пример, полная вариация обобщенной квазимеры, вообще говоря, не является квазимерой. Это становится камнем преткновения в представлении обобщенной квазимеры в виде разности квазимер и не позволяет легко переносить результаты с квазимер на обобщенные квазимеры.

Вводимый далее класс функций множества представляет для нас интерес скорее не сам по себе, а как некоторая абстракция полной вариации обобщенной квазимеры, удобная для решения задачи о разложении обобщенной квазимеры в сумму обобщенной меры и правильной обобщенной квазимеры.

Определение 4. Обозначим Ψ класс функций множества $\psi : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям

1) если $E, F \in \mathcal{A}$ и $E \subset F$, то $\psi(E) \leqslant \psi(F)$;

2) если $U_1, U_2 \in \tau$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, то $\psi(U_1 \cup U_2) = \psi(U_1) + \psi(U_2)$;

3) если $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ и $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, то $\psi(C_1 \cup C_2) = \psi(C_1) + \psi(C_2)$;

4) если $C \in \mathcal{C}$, то $\psi(C) = \inf\{\psi(U) : U \in \tau,\ C \subset U\}$;

5) если $U \in \tau$, то $\psi(U) = \sup\{\psi(C) : C \in \mathcal{C},\ C \subset U\}$.

Очевидно, $\psi(\emptyset) = 0$. Нетрудно проверить, что Ψ является положительным конусом.

Замечание 4. Легко показать, что, например, из монотонности ψ на τ и условий 2 и 4 следуют 1) и 3). Докажем условие 3. Согласно 4) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $U \in \tau$, что $C_1 \cup C_2 \subset U$ и $\psi(U) < \psi(C_1 \cup C_2) + \varepsilon$. В силу отделимости множеств из $\mathcal{C}$ существуют такие $U_1, U_2 \in \tau$, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $C_1 \subset U_1$, $C_2 \subset U_2$ и $U_1 \cup U_2 \subset U$. Используя 1) и 2), получаем $\psi(U) \geqslant \psi(U_1 \cup U_2) = \psi(U_1) + \psi(U_2) \geqslant \psi(C_1) + \psi(C_2)$. Тогда $\psi(C_1 \cup C_2) + \varepsilon \geqslant \psi(C_1) + \psi(C_2)$. Далее, в силу условий 1, 4 и отделимости для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $U_1, U_2 \in \tau$, что $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $C_1 \subset U_1$, $C_2 \subset U_2$, $\psi(U_1) < \psi(C_1) + \varepsilon$ И $\psi(U_2) < \psi(C_2) + \varepsilon$. Тогда $\psi(C_1 \cup C_2) \leqslant \psi(U_1 \cup U_2) = \psi(U_1) + \psi(U_2) \leqslant \psi(C_1) + \psi(C_2) + 2\varepsilon$.

Рассмотрим некоторые свойства функций класса Ψ, используемые в дальнейшем.

Предложение 1. Пусть $\psi \in \Psi$. Тогда

1) ψ супераддитивна, то есть если $E_1, E_2, E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$ и $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $\psi(E_1) + \psi(E_2) \leqslant \psi(E_1 \cup E_2)$;

2) для любых $U \in \tau$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и $\psi(U \setminus C) < \varepsilon$.

Доказательство. 1) Фактически достаточно рассмотреть случай, когда $E_1 \in \mathcal{C}$, $E_2 \in \tau$ и $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$. В силу условия 5 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset E_2$ и $\psi(C) > \psi(E_2) - \varepsilon$. Используя условия 1 и 3, получаем $\psi(E_1) + \psi(E_2) - \varepsilon \leqslant \psi(E_1) + \psi(C) = \psi(E_1 \cup C) \leqslant \psi(E_1 \cup E_2)$.

2) В силу условия 5 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и $\psi(C) > \psi(U) - \varepsilon$. Используя супераддитивность ψ, получаем $\psi(U) \geqslant \psi(C) + \psi(U \setminus C)$. Тогда $\psi(U \setminus C) \leqslant \psi(U) - \psi(C) < \varepsilon$.

Предложение 2. Если $\mu \in QM$, то $|\mu| \in \Psi$.

Доказательство. Монотонность на τ и условия 2 и 4 определения 4 легко следуют из определения $|\mu|$. Учитывая замечание 4, остается доказать условие 5.

Для любого $C \in \mathcal{C}$, где $C \subset U$, имеем $|\mu|(C) \leqslant |\mu|(U)$, так как $|\mu|$ монотонна. В силу замечания 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{C_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{C}$, что $\bigcup\limits_{i=1}^n C_i \subset U$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $|\mu|(U) - \varepsilon < \sum\limits_{i=1}^n |\mu(C_i)|$. Положим $C = \bigcup\limits_{i=1}^n C_i$. Имеем $|\mu|(U) - \varepsilon < \sum\limits_{i=1}^n |\mu(C_i)| \leqslant \sum\limits_{i=1}^n |\mu|(C_i) = |\mu|(C)$.

Замечание 5. Очевидно, $QM^+ \subset \Psi$. Вместе с тем есть функции из класса Ψ, не принадлежащие QM^+, например, $|\mu|$, где μ из рассмотренного выше примера.

Ряд понятий и теорем, рассмотренных в работах [4]и [5] для квазимер, удается обобщить на функции класса Ψ.

Определение 5. Пусть $\psi \in \Psi$. Определелим функцию множества $\psi^* : \beta(X) \to [0, +\infty)$ следующим образом:

$$\psi^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^n \psi(E_i) : \ E_i \in \mathcal{A}, \ E \subset \bigcup_{i=1}^n E_i\}, \ E \subset X.$$

Предложение 3. Функция ψ^* обладает следующими свойствами:

1) $\psi^*(\emptyset) = 0$;

2) если $E \subset F$, то $\psi^*(E) \leqslant \psi^*(F)$;

3) $\psi^*(E \cup F) \leqslant \psi^*(E) + \psi^*(F)$;

4) $\psi^*(E) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^n \psi(U_i) : \ U_i \in \tau, \ E \subset \bigcup\limits_{i=1}^n U_i\}$;

5) если $E \in \mathcal{A}$, то $\psi^*(E) \leqslant \psi(E)$;

6) если $U \in \tau$, то $\psi^*(U) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^n \psi(U_i) : \ U_i \in \tau, \ U = \bigcup\limits_{i=1}^n U_i\}$;

7) если $C \in \mathcal{C}$, то $\psi^*(C) = \inf\{\sum\limits_{i=1}^n \psi(C_i) : \ C_i \in \mathcal{C}, \ C = \bigcup\limits_{i=1}^n C_i\}$;

8) если $K, C \in \mathcal{C}$ и $K \cap C = \emptyset$, то $\psi^*(K \cup C) = \psi^*(K) + \psi^*(C)$;

9) $\psi^*(E) = \inf\{\psi^*(U) : U \in \tau, \ E \subset U\}$;

10) если $U \in \tau$, то $\psi^*(U) = \sup\{\psi(C) : C \in \mathcal{C}, \ C \subset U\}$;

11) сужение $\psi^*|_{\mathcal{B}}$ является регулярной борелевской мерой.

Доказательство. Пункты 1,2,3,5 легко следуют из определения ψ^*.

4) Обозначим правую часть равенства через α. Согласно определению $\psi^*(E) \leqslant \alpha$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^n E_i$ и $\sum\limits_{i=1}^n \psi(E_i) < \psi^*(E) + \varepsilon$. По условию 4 определения 4 для любого

E_i найдется такое $U_i \in \tau$, что $E_i \subset U_i$ и $\psi(U_i) < \psi(E_i) + \dfrac{\varepsilon}{n}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi(U_i) < \psi^*(E) + 2\varepsilon$. Отсюда $\alpha \leqslant \psi^*(E)$.

6) следует из 4).

7) Обозначим правую часть равенства через γ. Из определения $\psi^*(C) \leqslant \gamma$. Согласно 4) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subset \tau$, что $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi(U_i) < \psi^*(C) + \varepsilon$. Известно [8; §50, теорема 1], что существует набор $\{C_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{C}$, для которого $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ и $C_i \subset U_i$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi(C_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \psi(U_i) < \psi^*(C) + \varepsilon$. Отсюда $\gamma \leqslant \psi^*(C)$.

8) Согласно 7) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{C_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{C}$, что $K \cup C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi(C_i) < \psi^*(K \cup C) + \varepsilon$. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi(C_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \psi(KC_i) + \sum\limits_{i=1}^{n} \psi(CC_i) \geqslant \psi^*(K) + \psi^*(C)$. Тогда $\psi^*(K) + \psi^*(C) \leqslant \psi^*(K \cup C)$. Противоположное неравенство выполняется в силу 3).

9) Если $U \in \tau$ и $E \subset U$, то $\psi^*(E) \leqslant \psi^*(U)$ в силу монотонности ψ^*. Согласно 4) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subset \tau$, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi(U_i) < \psi^*(E) + \varepsilon$. Положим $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Тогда $V \in \tau$, $E \subset V$ и $\psi^*(V) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \psi(U_i) < \psi^*(E) + \varepsilon$.

10) В силу монотонности ψ^*, если $C \in \mathcal{C}$ и $C \subset U$, то $\psi^*(C) \leqslant \psi^*(U)$. Согласно предложению 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$ и $\psi(U \setminus C) < \varepsilon$. Тогда $\psi^*(U) \leqslant \psi^*(U \setminus C) + \psi^*(C) \leqslant \psi(U \setminus C) + \psi^*(C) < \varepsilon + \psi^*(C)$.

11) Сужение $\psi^*|_{\mathcal{C}}$ является объемом в силу пунктов 1, 2, 3, 8 [8; §53]. В силу 10) внутренний объем, индуцированный этим объемом, равен $\psi^*|_{\tau}$. Тогда в силу 9) внешняя мера будет равна ψ^*. Как известно [8; §53, теорема 5], сужение $\psi^*|_{\mathcal{B}}$ является регулярной борелевской мерой.

Зададимся вопросом, при каких условиях функция $\psi \in \Psi$ будет продолжима до борелевской меры. Заметим, что если ψ продолжается до борелевской меры, то эта мера необходимо будет внешне регулярной на классе $\mathcal{C}$ и, следовательно, регулярной [8; §52, теорема 6]; из регулярности продолжения следует его единственность.

Функцию $\psi \in \Psi$ называем полуаддитивной, если для любых $E, F \in \mathcal{A}$, где $E \cup F \in \mathcal{A}$, выполняется $\psi(E \cup F) \leqslant \psi(E) + \psi(F)$.

Предложение 4. Функция $\psi \in \Psi$ продолжима до регулярной борелевской меры тогда и только тогда, когда она полуаддитивна. При этом ее продолжением будет $\psi^*|_{\mathcal{B}}$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Из пунктов 6 и 7 предложения 3 и полуаддитивности ψ следует, что

$\psi(E) \leqslant \psi^*(E)$, $E \in \mathcal{A}$. Учитывая пункт 5, получаем $\psi = \psi^*|_{\mathcal{A}}$. Согласно пункту 11 $\psi^*|_{\mathcal{B}}$ — регулярная борелевская мера.

В качестве следствия получаем известный критерий о продолжении квазимеры [7]: квазимера продолжима до регулярной борелевской меры тогда и только тогда, когда она полуаддитивна.

Предложение 5. Пусть $\psi \in \Psi$. Тогда ψ^* является наибольшей из мер, мажорируемых ψ.

Доказательство. Пусть $\lambda \in M^+$ и $\lambda \leqslant \psi$. Так как $\lambda \in M^+$, то она полуаддитивна. Если $E \in \mathcal{A}$, $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^n U_i$, то $\lambda(E) \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \lambda(U_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \psi(U_i)$. В силу пункта 4 предложения 3 $\lambda(E) \leqslant \psi^*(E)$.

Определение 6. Функцию $\psi \in \Psi$ будем называть правильной, если из того, что $\lambda : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$, $\lambda \leqslant \psi$ и λ — мера, следует $\lambda = 0$.

Далее будет полезным

Предложение 6. Пусть $\mu \in QM$, $\psi \in \Psi$ и $\mu \leqslant \psi$. Тогда $\psi - \mu \in \Psi$.

Доказательство. Положим $\nu = \psi - \mu$. Очевидно, ν удовлетворяет условиям 2 и 3.

Пусть $C \in \mathcal{C}$, $U \in \tau$ и $C \subset U$. Покажем, что $\nu(C) \leqslant \nu(U)$. В силу супераддитивности $\psi(U) - \psi(C) \geqslant \psi(U \setminus C)$. По условию $\psi(U \setminus C) \geqslant \mu(U \setminus C)$. Имеем $\nu(U) - \nu(C) = [\psi(U) - \psi(C)] - [\mu(U) - \mu(C)] \geqslant \psi(U \setminus C) - \mu(U \setminus C) \geqslant 0$.

Покажем, что $\nu(U) = \sup\{\nu(C) : C \in \mathcal{C},\ C \subset U\}$, $U \in \tau$. Выше было показано, что $\nu(C) \leqslant \nu(U)$, если $C \in \mathcal{C}$, $U \in \tau$ и $C \subset U$. При этом $\nu(U) - \nu(C) \leqslant [\psi(U) - \psi(C)] + |\mu(U \setminus C)|$. Из определений 4 и 3 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, что $C_1, C_2 \subset U$, $\psi(U) - \psi(C_1) < \varepsilon$ и $\tilde{\mu}(U \setminus C_2) < \varepsilon$. Положим $C = C_1 \cup C_2$. Тогда $C \in \mathcal{C}$, $C \subset U$, $\psi(U) - \psi(C) \leqslant \psi(U) - \psi(C_1) < \varepsilon$ и $|\mu(U \setminus C)| \leqslant \tilde{\mu}(U \setminus C_2) < \varepsilon$. Следовательно, $\nu(U) - \nu(C) < 2\varepsilon$.

Теперь покажем, что $\nu(C) = \inf\{\nu(U) : U \in \tau,\ C \subset U\}$, $C \in \mathcal{C}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $U_1, U_2 \in \tau$, что $C \subset U_1$, $C \subset U_2$, $\psi(U_1) - \psi(C) < \varepsilon$ и $\tilde{\mu}(U_2 \setminus C) < \varepsilon$. Положим $U = U_1 \cap U_2$. Тогда $U \in \tau$, $C \subset U$, $\psi(U) - \psi(C) \leqslant \psi(U_1) - \psi(C) < \varepsilon$ и $|\mu(U \setminus C)| \leqslant \tilde{\mu}(U_2 \setminus C) < \varepsilon$. Следовательно, $\nu(U) - \nu(C) < 2\varepsilon$.

Из уже доказанных свойств функции ν легко следует ее монотонность на всем $\mathcal{A}$. Таким образом, $\nu \in \Psi$.

Теорема 1. Пусть $\psi \in \Psi$. Тогда $\nu = \psi - \psi^*|_{\mathcal{A}}$ будет правильной функцией из Ψ. Разложение $\psi = \psi^*|_{\mathcal{A}} + \nu$ является единственным разложением ψ в виде суммы меры и правильной функции из Ψ.

Доказательство. В силу предложения 6 $\nu \in \Psi$. ν является правильной, так как в противном случае $\psi^*|_{\mathcal{A}}$ не была бы наибольшей из мер, мажорируемых ψ, что противоречит предложению 5.

Докажем единственность разложения. Пусть $\psi = \psi_1 + \nu_1$, где $\psi_1 \in M^+$ и ν_1 — правильная из Ψ. Имеем $\psi^*|_{\mathcal{A}} + \nu = \psi_1 + \nu_1$, откуда $\psi^*|_{\mathcal{A}} - \psi_1 + \nu = \nu_1$. Здесь $0 \leqslant \psi^*|_{\mathcal{A}} - \psi_1 \leqslant \nu_1$, $\psi^*|_{\mathcal{A}} - \psi_1$ является мерой, ν_1 — правильная. Тогда $\psi^*|_{\mathcal{A}} - \psi_1 = 0$. Значит, $\psi^*|_{\mathcal{A}} = \psi_1$ и $\nu_1 = \nu$. Теорема доказана.

Если ψ — квазимера, то ν, очевидно, тоже будет квазимерой и в качестве следствия получаем теорему о разложении квазимеры [4; теорема 1].

Следующая теорема дает критерий правильности функции из Ψ.

Теорема 2. Функция $\psi \in \Psi$ является правильной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^n U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^n \psi(U_i) < \varepsilon$.

Доказательство. По теореме о разложении ψ будет правильной тогда и только тогда, когда $\psi^*(X) = 0$. Согласно пункту 4 предложения 3 это эквивалентно тому, что

$$\inf\{\sum_{i=1}^n \psi(U_i) : \ U_i \in \tau, \ X = \bigcup_{i=1}^n U_i\} = 0$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Заметим, что в формулировке теоремы вместо конечного набора открытых множеств можно брать набор замкнутых множеств или множеств из $\mathcal{A}$ и при доказательстве обращаться к пункту 7 предложения 3 или, соответственно, определению ψ^*.

Если ψ — квазимера, то получаем в качестве следствия критерий правильной квазимеры [4; теорема 2].

Теорема 3. Пусть ψ_1, ψ_2 — правильные функции из Ψ. Тогда $\psi_1 + \psi_2$ тоже правильная из Ψ.

Доказательство. Пусть $\lambda \in M^+$ и $\lambda \leqslant \psi_1 + \psi_2$. Продолжим λ на $\mathcal{B}$ до регулярной борелевской меры и будем считать, что λ и есть это продолжение.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как ψ_1 и ψ_2 — правильные из Ψ, то существуют по теореме 2 такие наборы $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$ и $\{F_i\}_{j=1}^m \subset \mathcal{A}$, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^n E_i = \bigcup\limits_{j=1}^m F_j$, $\sum\limits_{i=1}^n \psi_1(E_i) < \varepsilon$, $\sum\limits_{j=1}^m \psi_2(F_j) < \varepsilon$.

Положим $A_1 = E_1$, $A_2 = E_2 \setminus E_1, \ldots, A_n = E_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} E_i$; аналогично, $B_1 = F_1$, $B_2 = F_2 \setminus F_1, \ldots, B_m = F_m \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} F_j$. Очевидно, A_i и B_j борелевские, A_i попарно не пересекаются, B_j также попарно не пересекаются, $A_i \subset E_i$, $B_j \subset F_j$, $X = \bigcup\limits_{i=1}^n A_i = \bigcup\limits_{j=1}^m B_j$.

Рассмотрим набор $\{A_iB_j\}$, $i \in \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Эти множества борелевские, попарно не пересекаются, $\bigcup\limits_{i,j} A_iB_j = X$, $\bigcup\limits_{j=1}^m A_iB_j = A_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^n A_iB_j = B_j$.

Поскольку λ — регулярная борелевская мера, существует такой набор $\{C_{ij}\} \subset C$, что $C_{ij} \subset A_iB_j$ и $\sum\limits_{i,j} \lambda(Cij) > \sum\limits_{i,j} \lambda(A_iB_j) - \varepsilon = \lambda(X) - \varepsilon$.

С другой стороны,

$$\sum_{i,j} \lambda(C_{ij}) \leqslant \sum_{i,j} \psi_1(C_{ij}) + \sum_{i,j} \psi_2(C_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \psi_1(C_{ij}) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \psi_2(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_1(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}) + \sum_{j=1}^{m} \psi_2(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \psi_1(E_i) + \sum_{j=1}^{m} \psi_2(F_j) < 2\varepsilon.$$

Тогда $\lambda(X) < 3\varepsilon$. Отсюда $\lambda(X) = 0$. Значит, $\lambda = 0$ и $\psi_1 + \psi_2$ — правильная из Ψ по определению.

В качестве следствия получаем, что сумма правильных квазимер есть правильная квазимера [4; теорема 3].

Очевидно, правильные функции из Ψ образуют положительный конус.

Предложение 7. Пусть $\psi_1 \leqslant \psi_2$, $\psi_1 = \mu_1 + \nu_1$, $\psi_2 = \mu_2 + \nu_2$, где ψ_1 — квазимера, $\psi_2 \in \Psi$, μ_1 и μ_2 — меры, ν_1 — правильная квазимера, ν_2 — правильная из Ψ. Тогда $\mu_1 \leqslant \mu_2$ и $\nu_1 \leqslant \nu_2$.

Доказательство. Положим $\psi = \psi_2 - \psi_1$. В силу предложения 6 $\psi \in \Psi$. По теореме 1 $\psi = \mu + \nu$, где μ — мера, ν — правильная из Ψ. Тогда $\psi_2 = (\mu_1 + \mu) + (\nu_1 + \nu) = \mu_2 + \nu_2$, где $\mu_1 + \mu_2$ — мера и $\nu_1 + \nu_2$ — правильная из Ψ по теореме 3. В силу единственности разложения $\mu_1 + \mu = \mu_2$ и $\nu_1 + \nu = \nu_2$ Отсюда $\mu_1 \leqslant \mu_2$ и $\nu_1 \leqslant \nu_2$.

3. Применим теорию функций класса Ψ к обобщенным квазимерам.

Напомним, что если $\mu \in QM$, то $|\mu| \in \Psi$ в силу предложения 2.

Определение 7. μ из QM будем называть правильной, если $|\mu|$ является правильной из Ψ.

Замечание 6. Обобщенная мера μ будет правильной тогда и только тогда, когда $|\mu|$, являющаяся в этом случае мерой, будет правильной, что согласно определению 6 эквивалентно $\mu = 0$. Следовательно, правильная обобщенная мера — это нулевая функция множества.

Из теоремы 2 сразу следует

Теорема 4. μ из QM будет правильной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ из τ (или из C, или из $\mathcal{A}$), что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu|(U_i) < \varepsilon$.

В силу неравенства $\tilde{\mu}(U) \leqslant |\mu|(U) \leqslant 2\tilde{\mu}(U)$, $U \in \tau$, справедливо

Предложение 8. μ из QM будет правильной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_1\}_{i=1}^{n} \subset \tau$, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(U_i) < \varepsilon$.

Класс правильных обобщенных квазимер обозначим PQM.

Теорема 5. PQM является замкнутым подпространством банахова пространства QM.

Доказательство. Легко показать, что полная вариация обладает свойством $|\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2| \leqslant |\alpha_1||\mu_1| + |\alpha_2||\mu_2|$, где $\mu_1, \mu_2 \in QM$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Если $\mu_1, \mu_2 \in PQM$, то $|\mu_1|$ и $|\mu_2|$ — правильные из Ψ. Тогда $|\alpha_1||\mu_1| + |\alpha_2||\mu_2|$ тоже правильная из Ψ (см.теорему 3) и таковой же является мажорируемая ею функция $|\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2|$ Следовательно, $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 \in PQM$ и PQM — линейное подпространство QM.

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset PQM$ и $\|\mu_n - \mu_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Поскольку известно [1], что пространство QM банахово, то существует такая $\mu \in QM$, что $|\mu - \mu_n|(X) = \|\mu - \mu_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\mu \in PQM$.

Далее нам понадобится неравенство $|\mu| \leqslant |\mu - \mu_n| + |\mu_n|$.

Пусть $\lambda \in M^+$ и $\lambda \leqslant |\mu|$. Покажем, что $\lambda = 0$. Продолжение λ до регулярной борелевской меры тоже обозначим λ.

Так как $|\mu - \mu_n|(X) \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in N$, что $|\mu - \mu_k|(E) < \varepsilon$ сразу для всех $E \in \mathcal{A}$. Поскольку $\mu_k \in PQM$, то по теореме 4 существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^m \subset \tau$, что $X = \bigcup_{i=1}^m U_i$ и $\sum_{i=1}^m |\mu_k|(U_i) < \varepsilon$. Положим $E_1 = U_1$, $E_2 = U_2 \setminus U_1, ..., E_m = U_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} U_i$. Очевидно $E_i \in \mathcal{B}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $E_i \subset U_i$, $\bigcup_{i=1}^m E_i = X$. В силу регулярности борелевской меры λ существует такой набор $\{C_i\}_{i=1}^m \subset C$, что $C_i \subset E_i$ и $\lambda(C_i) > \lambda(E_i) - \dfrac{\varepsilon}{m}$. Тогда

$$\lambda(X) = \sum_{i=1}^m \lambda(E_i) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^m \lambda(C_i) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^m |\mu|(C_i) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^m |\mu - \mu_k|(C_i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^m |\mu_k|(C_i) \leqslant \varepsilon + |\mu - \mu_k|(\bigcup_{i=1}^m C_i) + \sum_{i=1}^m |\mu_k|(U_i) \leqslant 3\varepsilon.$$

Отсюда $\lambda(X) = 0$. Значит, $\lambda = 0$ и $|\mu|$ — правильная из Ψ. Тогда $\mu \in PQM$.

Замечание 7. Из теоремы 5 и замечания 6 следует, что если $\mu_1, \mu_2 \in PQM$ и $\mu = \mu_1 - \mu_2$ принимает значения разных знаков, то μ дает пример правильной обобщенной квазимеры, принимающей значения разных знаков и, следовательно, не являющейся обобщенной мерой. В примере из первой части статьи X можно представить как объединение конечного числа открытых солидов, каждый из которых содержит не более одной точки из множества $\{x_i\}_{i=1}^4$, поэтому μ_C и μ_D на них равно 0. Следовательно, в силу критерия μ_C и μ_D — правильные квазимеры. Тогда $\mu = \mu_C - \mu_D$ обладает указанными выше свойствами.

Теорема 6. Для любой $\mu \in QM$ справедливо единственное разложение в виде $\mu = \lambda + \nu$, где $\lambda \in M$ и $\nu \in PQM$, то есть $QM = M \oplus PQM$.

Доказательство. Очевидно, $\mu = |\mu| - (|\mu| - \mu)$, где $|\mu|$, $|\mu| - \mu \in \Psi$ (см. предложения 2 и 6). В силу теоремы 1 имеем $|\mu| = \lambda_1 + \nu_1$ и $|\mu| - \mu = \lambda_2 + \nu_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in M$ и ν_1, ν_2, — правильные из Ψ. Положим $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ и $\nu = \nu_1 - \nu_2$. Тогда $\mu = \lambda + \nu$, где $\lambda \in M$ и $\nu = \mu - \lambda \in QM$. Легко показать, что $|\nu| \leqslant \nu_1 +$

$+\nu_2$. Так как ν_1, ν_2 — правильные из Ψ, то в силу теоремы 3 $\nu_1+\nu_2$ тоже правильная из Ψ. Тогда, очевидно, $\nu \in PQM$.

Докажем единственность разложения. Пусть $\mu = \lambda' + \nu'$, где $\lambda' \in M$ и $\nu' \in PQM$. Тогда $\lambda - \lambda' = \nu' - \nu$. С одной стороны $\lambda - \lambda' \in M$, с другой стороны в силу теоремы 5 $\nu - \nu' \in PQM$. Учитывая замечание 6, получаем $\lambda - \lambda' = \nu - \nu' = 0$.

Предложение 9. Пусть $\mu_1 = \lambda_1 + \nu_1$, $\mu_2 = \lambda_2 + \nu_2$, где $\mu_1, \mu_2 \in QM$, $\lambda_1, \lambda_2 \in M$, $\nu_1, \nu_2 \in PQM$. Пусть, далее, $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Тогда $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ и $\nu_1 \leqslant \nu_2$.

Доказательство. Положим $\mu = \mu_2 - \mu_1$. Тогда $\mu \in QM^+$. По теореме о разложении $\mu = \lambda+\nu$, где $\lambda \in M^+$, $\nu \in PQM^+$. Получаем $\mu_2 = (\lambda_1+\lambda)+(\nu_1+\nu) = \lambda_2 + \nu_2$, где $\lambda_1 + \lambda \in M$, $\nu_1 + \nu \in PQM$. В силу единственности разложения $\lambda_1 + \lambda = \lambda_2$ и $\nu_1 + \nu = \nu_2$. Так как $\lambda, \nu \geqslant 0$, то $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ и $\nu_1 \leqslant \nu_2$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия предложения 9 и, кроме того, $\mu_2 \geqslant 0$ и $|\mu_1(E)| \leqslant \mu_2(E)$ для любого $E \in \mathcal{A}$. Тогда $|\lambda_1(E)| \leqslant \lambda_2(E)$ и $|\nu_1(E)| \leqslant \nu_2(E)$.

Доказательство. Очевидно, $-\mu_2 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2$. Тогда в силу предложения 9 имеем $-\lambda_2 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$ и $-\nu_2 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2$.

Следствие 2. Пусть $\mu_1 \in QM$, $\mu_2 \in M^+$ и $|\mu_1(E)| \leqslant \mu_2(E)$ для любого $E \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu_1 \in M$.

Доказательство. По теореме о разложении $\mu_1 = \lambda_1 + \nu_1$, где $\lambda_1 \in M$ и $\nu_1 \in PQM$. Для μ_2 аналогичное разложение имеет вид $\mu_2 = \mu_2 + 0$. В силу следствия 1 получаем $|\nu_1(E)| \leqslant 0$, $E \in \mathcal{A}$. Значит, $\nu_1 = 0$ и $\mu_1 = \lambda_1$.

Следствие 3. Пусть $\mu \in QM$ и $|\mu| \in M^+$. Тогда $\mu \in M$.

Доказательство. Очевидно, $|\mu(E)| \leqslant |\mu|(E)$, $E \in \mathcal{A}$. Применим следствие 2.

4. В работе [3] получен критерий того, чтобы обобщенная квазимера являлась обобщенной мерой, а также доказано, что если $\dim X \leqslant 1$, то $QM = M$. Покажем, как можно получить эти результаты с помощью теорем пункта 3.

Предложение 10. Пусть $\nu \in PQM$. $\nu = 0$ тогда и только тогда, когда для любых $U, V \in \tau$

$$\nu(U \cup V) = \nu(U) + \nu(V) - \nu(U \cap V). \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Из (1) следует, что для любого набора $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ выполняется

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = \sum_{i=1}^{n} \nu(U_i) - \nu(U_1 \cap U_2) - \ldots - \nu(\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i \cap U_n).$$

Тогда $|\nu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i)| \leqslant 2 \sum\limits_{i=1}^{n} |\nu|(U_i)$. В силу теоремы 4 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} |\nu|(U_i) < \varepsilon$.

Возьмем $\Theta \in \tau$. Тогда $|\nu(\Theta)| \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|\nu|(\Theta U_i) \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|\nu|(U_i) < 2\varepsilon$. Значит, $\nu(\Theta) = 0$ для любого $\Theta \in \tau$. В силу регулярности $\nu(C) = 0$ для любого $C \in \mathcal{C}$.

Предложение 11. Пусть $\mu \in QM$. μ является обобщенной мерой тогда и только тогда, когда для любых $U, V \in \tau$ выполняется равенство (1).

Доказательство. В силу теоремы 6 $\mu = \lambda + \nu$, где $\lambda \in M$ и $\nu \in PQM$. Легко проверить, что μ удовлетворяет (1) тогда и только тогда, когда ν удовлетворяет (1), что в силу предложения 10 эквивалентно $\nu = 0$, а это эквивалентно $\mu = \lambda$.

Как известно [9, 7.1.7. Теорема], $\dim X \leqslant 1$ означает, что для любого набора $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, где $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$ существует такой набор $\{O_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $O_i \subset U_i$, $\bigcup_{i=1}^{n} O_i = X$ и $O_i \cap O_j \cap O_k = \emptyset$ для любой тройки попарно различных i, j, k.

Предложение 12. Пусть $\dim X \leqslant 1$ и $\nu \in PQM$. Тогда $\nu = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 4 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ и $\sum_{i=1}^{n}|\nu|(U_i) < \varepsilon$.

Пусть $A \in \tau$. Из определения обобщенной квазимеры легко следует существование такого $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset A$ и если $U \in \tau$, $C \subset U \subset A$, то $|\nu(A) - \nu(U)| < \varepsilon$. Положим $B = X \setminus C$. Очевидно, $B \in \tau$.

Рассмотрим семейство $\{U_iA,\ U_iB\}_{i=1}^n \subset \tau$. По этому набору найдем набор $\{O_i\}_{i=1}^m$, как указано выше в связи с $\dim X \leqslant 1$. Тогда $O_i \in \tau$, $\bigcup_{i=1}^{m} O_i = X$, $O_i \cap O_j \cap O_k = \emptyset$ для любой тройки попарно различных i, j, k, для любого i выполняется хотя бы одно из включений $O_i \subset A$ или $O_i \subset B$ и $\sum_{i=1}^{n}|\nu|(O_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\nu|(U_iA) + \sum_{i=1}^{n}|\nu|(U_iB) \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|\nu|(U_i) < 2\varepsilon$.

Рассмотрим семейство, состоящее из множеств

$$C_i = O_i \setminus \bigcup_{j \neq i, j=1}^{m} O_j,\ i \in \overline{1,m},\ \Theta_\gamma = O_i \cap O_j,\ i \neq j,\ \gamma \in \overline{1,k}.$$

Легко проверить, что эти множества попарно не пересекаются, их объединение равно X, $C_i \in \mathcal{C}$, $\Theta_\gamma \in \tau$.

В силу супераддитивности полной вариации

$$|\nu|(O_i) \geqslant |\nu|(C_i) + \sum_{j \neq i, j=1}^{m} |\nu|(O_iO_j).$$

Отсюда $\sum_{i=1}^{m}|\nu|(O_i) \geqslant \sum_{\gamma=1}^{k}|\nu|(\Theta_\gamma)$.

Обозначим $I = \{i \in \overline{1,m} : C_i \cap A \neq \emptyset\}$ и $\Gamma = \{\gamma \in \overline{1,k} : \Theta_\gamma \cap A \neq \emptyset\}$ Очевидно, $A \subset \bigcup_{i \in I} C_i \cup \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma$. Положим $I_1 = \{i \in I : C_i \not\subset A\}$, $I_2 = I \setminus I_1$. Если $i \in I_1$, то $C_i \not\subset A$ и, следовательно, $O_i \not\subset A$, значит, $O_i \subset B$ и $C_i \subset B$. Обозначим $U = A \setminus \bigcup_{i \in I_1} C_i$.

Тогда $U \in \tau$, $C \subset U \subset A$, $U = \bigcup\limits_{i \in I_2} C_i \cup \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \Theta_\gamma A$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{m} |\nu|(C_i) + \sum_{\gamma=1}^{k} |\nu|(\Theta_\gamma) \geqslant \sum_{i \in I_2} |\nu|(C_i) + \sum_{\gamma \in \Gamma} |\nu|(\Theta_\gamma A) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i \in I_2} |\nu(C_i)| + \sum_{\gamma \in \Gamma} |\nu(\Theta_\gamma A)| \geqslant |\nu(U)| \geqslant |\nu(A)| - \varepsilon.$$

Окончательно получаем $2\varepsilon \geqslant |\nu(A)| - \varepsilon$. Отсюда $\nu(A) = 0$ для любого $A \in \tau$. Значит, $\nu = 0$.

Используя теорему 6 и предложение 12 сразу получаем

Предложение 13. Пусть $\dim X \leqslant 1$. Тогда $QM = M$.

5. Перенесем результаты, полученные для обобщенных квазимер, на квазилинейные функционалы.

Пусть $\mu \in QM$, $f \in C(X)$, $\mathcal{B}_R$ — борелевская σ-алгебра в R.

Для любого открытого или замкнутого множества $E \in \mathcal{B}_R$ положим

$$\mu_f(E) = \mu(f^{-1}(E)).$$

В работе [1] показано, что μ_f однозначно продолжается до обобщенной регулярной борелевской меры на $\mathcal{B}_R$, которую также обозначим μ_f. Рассмотрим σ-алгебру $\Sigma_f = f^{-1}(\mathcal{B}_R)$. Очевидно, $\Sigma_f \subset \mathcal{B}_X$. Для $B \in \Sigma_f$, где $B = f^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{B}_R$, положим $\varphi_f(B) = \mu_f(A)$. Очевидно, φ_f корректно определена и является обобщенной мерой на Σ_f, причем для любого $B \in \Sigma_f$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C} \cap \Sigma_f$, что для всех $D \subset B \setminus C$, где $D \in \Sigma_f$, выполняется $|\varphi_f(D)| < \varepsilon$. Заметим, что $|\varphi_f|(E) \leqslant |\mu|(E)$, $E \in \mathcal{A}$.

Положим

$$\rho_\mu(f) = \rho(f) + \int\limits_X f d\varphi_f \qquad (2)$$

(интеграл Лебега).

Нетрудно показать, что функционал ρ_μ совпадает с одноименным функционалом из работы [1, С. 1083], где доказано, что ρ_μ — квазилинейный функционал на $C(X)$ и формула (2) задает линейную биекцию $\Pi : QM \to QL$, при которой $\|\rho_\mu\| = \|\mu\|$, $\mu_1 \leqslant \mu_2$ эквивалентно тому, что $\rho_{\mu_1} \leqslant \rho_{\mu_2}$ (пусть $\rho_1, \rho_2 \in QL$, пишем $\rho_1 \leqslant \rho_2$, если $\rho_1(f) \leqslant \rho_2(f)$ для всех $f \geqslant 0$, $f \in C(X)$), Известно, что $\rho_\mu \in L$ тогда и только тогда, когда $\mu \in M$; при этом формула (2) примет вид $\rho_\mu(f) = \int\limits_X f d\mu$, где интеграл берется по обобщенной регулярной борелевской мере, продолжающей μ.

Определение 8. Квазилинейный функционал ρ_μ назовем правильным, если $\mu \in PQM$.

Обозначим множество всех правильных квазилинейных функционалов PQL.

Из свойств биекции Π и теорем 5 и 6 сразу следует

Теорема 7. PQL является замкнутым подпространством банахова пространства QL. Для любого $\rho \in QL$ справедливо единственное разложение в виде $\rho = \rho_1 + \rho_2$, где $\rho_1 \in L$ и $\rho_2 \in PQL$, то есть $QL = L \oplus PQL$.

Замечание 8. Используя свойства биекции Π, легко получить аналоги предложения 9 и следствий 1 и 2 для квазилинейных функционалов. Например: пусть $\rho_1 \in QL$, ρ_2 — положительный линейный функционал на $C(X)$; пусть, далее, $|\rho_1(f)| \leqslant \rho_2(f)$ для всех $f \geqslant 0$, $f \in C(X)$. Тогда $\rho_1 \in L$.

Следующий критерий правильного квазилинейного функционала сформулирован без обращения к порождающей его обобщенной квазимере.

Теорема 8. ρ из QL будет правильным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{f_i\}_{i=1}^n \subset C(X)$, что $0 \leqslant f_i \leqslant 1$, $\bigvee\limits_{i=1}^n f_i = 1$ и для любого набора $\{g_i\}_{i=1}^n \subset C(X)$, где $0 \leqslant g_i \leqslant f_i$, выполняется $\sum\limits_{i=1}^n |\rho(g_i)| < \varepsilon$.

Доказательство. Далее обозначим $\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$, где $f : X \to R$.

Необходимость. Пусть $\rho = \rho_\mu \in PQL$. Тогда $\mu \in PQM$ и в силу теоремы 4 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, что $X = \bigcup\limits_{i=1}^n U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^n |\mu|(U_i) < \varepsilon$. Согласно свойствам компактного хаусдорфова пространства существует такой набор $\{C_i\}_{i=1}^n \subset C$, что $C_i \subset U_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^n C_i = X$. Известно [9, 1.5.10 Теорема], что найдутся такие $f_i \in C(X)$, что $0 \leqslant f_i \leqslant 1$, $f_i(x) = 1$ для $x \in C_i$ и $f_i(x) = 0$ для $x \in X \setminus U_i$, $i \in \overline{1,n}$. Очевидно, $\bigvee\limits_{i=1}^n f_i = 1$. Пусть $g_i \in C(X)$, $0 \leqslant g_i \leqslant f_i$. Очевидно, $U_i \supset \operatorname{supp} g_i \in \tau$. Имеем $|\rho(g_i)| = |\int\limits_X g_i d\varphi_{g_i}| \leqslant \int\limits_{\operatorname{supp} g_i} g_i d|\varphi_{g_i}| \leqslant |\varphi_{g_i}|(\operatorname{supp} g_i) \leqslant |\mu|(\operatorname{supp} g_i) \leqslant |\mu|(U_i)$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^n |\rho(g_i)| < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\rho = \rho_\mu$. Возьмем $0 < \alpha < 1$. Положим $U_i = \{x \in X : f_i(x) > 1 - \alpha\}$, $i \in \overline{1,n}$. Очевидно, $U_i \in \tau$ и $\bigcup\limits_{i=1}^n U_i = X$.

Пусть $C_i \in C$ и $C_i \subset U_i$, $i \in \overline{1,n}$. Согласно свойствам полной вариации найдутся такие $V_i \in \tau$, что $C_i \subset V_i \subset U_i$ и $|\mu|(V_i \setminus C_i) < \frac{\varepsilon}{n}$. Существуют такие $g_i \in C(X)$, что $0 \leqslant g_i \leqslant 1 - \alpha$, $g_i(x) = 1 - \alpha$ для $x \in C_i$ и $g_i(x) = 0$ для $x \in X \setminus V_i$. Очевидно, $0 \leqslant g_i \leqslant f_i$. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^n |\rho(g_i)| < \varepsilon$.

Имеем $\rho(g_i) = \int\limits_X g_i d\varphi_{g_i} = \int\limits_{A_i} g_i d\varphi_{g_i} + \int\limits_{B_i} g_i d\varphi_{g_i}$ где $A_i = \{x \in X : o < g_i(x) < 1 - \alpha\}$ и $B_i = \{x \in X : g_i(x) = 1 - \alpha\}$. Очевидно, $A_i \in \tau$ и $A_i \subset V_i \setminus C_i$, $B_i \in C$

и $C_i \subset B_i \subset V_i$. Получаем $(1-\alpha)|\mu(B_i)| = (1-\alpha)|\varphi_{g_i}(B_i)| = |\int\limits_{B_i} g_i d\varphi_{g_i}| \leqslant |\rho(g_i)| + $ $+ |\int\limits_{A_i} g_i d\varphi_{g_i}| \leqslant |\rho(g_i)| + |\varphi_{g_i}|(A_i) \leqslant |\rho(g_i)| + |\mu|(V_i \setminus C_i) \leqslant |\rho(g_i)| + \dfrac{\varepsilon}{n}$. Имеем $|\mu(C_i)| \leqslant$ $\leqslant |\mu(C_i) - \mu(V_i)| + |\mu(V_i) - \mu(B_i)| + |\mu(B_i)| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{n} + |\mu(B_i)|$. Тогда $(1-\alpha)\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu(C_i)| \leqslant 2(1-$ $-\alpha)\varepsilon + \varepsilon + \sum\limits_{i=1}^{n} |\rho(g_i)| \leqslant 2\varepsilon(2-\alpha)$. Пусть $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu(C_i)| \leqslant 6\varepsilon$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(U_i) \leqslant 6\varepsilon$ и в силу предложения 8 $\mu \in PQM$. Тогда по определению $\rho_\mu \in PQL$.

Литература

[1] Grubb, D.J. Signed quasi-measures / D.J. Grubb // Trans. Amer. Math. Soc. – 1997. – V. 349. – No. 3. – P. 1081–1089.

[2] Aarnes, J.F. Quasi-states and quasi-measures / J.F. Aarnes // Adv. Math. – 1991. – No. 86. – P. 41–67.

[3] Grubb, D.J. Signed quasi-measures and dimension theory / D.J. Grubb //Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 128. – No. 4. – P. 1105–1108.

[4] Свистула, М.Г. Критерий правильной квазимеры / М.Г. Свистула // Мат. заметки. – 2007. – Т. 81. – В. 5. – С. 751–7599.

[5] Grubb, D.J. Additivity of quasi-measures / D.J. Grubb, Tim LaBerge // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126. – No. 10. – P. 3007–3012.

[6] Вахания, Н.Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н.Н. Вахания, В.И. Тариеладзе, С.А. Чобанян. – М.: Наука, 1985. – 386 с.

[7] Aarnes, J.F. Construction of non-subadditive measures and discretization of Borel measures / J.F. Aarnes // Fund. Math. – 1995. – No. 147. – P. 213–237.

[8] Халмош, П. Теория меры / П. Халмош. – М.: Иностр. лит., 1953. – 291 с.

[9] Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М.: МИР, 1986. – 752 с.

Поступила в редакцию 11/*III*/2008;
в окончательном варианте — 11/*III*/2008.

A SIGNED QUASI-MEASURE DECOMPOSITION[3]

 M.G. Svistula[4]

The concept of a proper signed quasi-measure is considered. The theorem about expansion of space of signed quasi-measures in a direct sum of the space of signed measures and the space of proper signed quasi-measures is proved. Finally, we apply our results to the quasi-linear functionals.

Keywords: *signed quasi-measure, space quasi-measures, quasi-linear functional.*

Paper received 11/*III*/2008.
Paper accepted 11/*III*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4]Svistula Marina Gennadievna (`marinasvistula@mail.ru`), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.