УДК 517.95

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КВАЗИМОДЕЛЬНЫМИ КОНЦАМИ

© 2008 С.А. Корольков, А.Г. Лосев,[1] Е.А. Мазепа[2]

В работе рассматриваются гармонические функции на римановых многообразиях с квазимодельными концами. На основе спектральных свойств данных многообразий получены условия существования и единственности некоторых краевых задач, а также условия выполнения теорем типа Лиувилля.

Ключевые слова: *риманово многообразие, квазимодельные концы, гармонические функции, спектральное свойство.*

Введение и основные теоремы

Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. В последнее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено обобщенное (A, L)-лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A, имеет конечную размерность. Оценки размерностей различных пространств решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях были получены в работах ряда математиков. Достаточно подробно об этой тематике написано, например, в обзоре А.А. Григорьяна [1]. Кроме того, во многих работах (см., например, [1–4]) рассматривался вопрос о разрешимости различных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на римановых многообразиях. Так, в [2] рассматривается вопрос разрешимости задачи Дирихле о восстановлении решения стационарного уравнения

[1]Корольков Сергей Алексеевич (sergei.korolkov@rambler.ru), Лосев Александр Георгиевич (alexander.losev@volsu.ru), кафедра математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета, 400062, Россия, г. Волгоград, пр-т Университетский, 100.

[2]Мазепа Елена Алексеевна (lmazepa@rambler.ru), кафедра фундаментальной информатики и оптимального управления Волгоградского государственного университета, 400062, Россия, г. Волгоград, пр-т Университетский, 100.

Шредингера $Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0$ по граничным данным на "бесконечности". При рассмотрении гармонических функций появляется возможность постановки краевых задач с условиями на потоки (см. [3]).

Ряд работ был посвящен изучению гармонических функций на многообразиях с концами. Пусть M — полное некомпактное риманово многообразие и $B \subset M$ — компактное множество. Связную неограниченную компоненту $D \subset M \setminus B$ такую, что ∂D — компакт, будем называть концом M по отношению к B (см., например, [1]). Различают концы параболического и гиперболического типа. Конец называется концом *параболического типа*, если его емкостный потенциал тождественно равен константе, и *гиперболического типа* в противном случае (определение см. ниже, также в [1]).

В работе [5] было доказано, что если многообразие M имеет m концов, то размерность пространства гармонических на M функций, ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия, не меньше, чем m. Там же было доказано, что если M имеет гиперболический тип, то размерность конуса неотрицательных гармонических на M функций также не меньше, чем m.

На многообразиях с *регулярными концами* А.А. Григорьяном [3] была доказана разрешимость некоторых краевых задач, содержащих условия на потоки, для положительных гармонических функций и были получены оценки размерности пространства ограниченных и конуса положительных гармонических функций. Здесь под регулярностью конца понимается выполнение неравенства Харнака для неотрицательных гармонических функций на соответствующем конце.

А.Г. Лосевым в работе [6] были получены условия выполнения теорем типа Лиувилля на многообразиях с модельными концами, а также даны точные оценки размерности пространства ограниченных и конуса положительных гармонических функций на таких многообразиях.

В данной работе рассматриваются гармонические функции на римановых многообразиях с квазимодельными концами D_i, т.е. каждый конец D_i многообразия M изометричен прямому произведению $[r_0, +\infty) \times S_{i1} \times \times S_{i2} \times ... \times S_{ik}$ с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g_{i1}^2(r)d\theta_{i1}^2 + ... + g_{ik}^2(r)d\theta_{ik}^2,$$

где S_{ij} — компактные римановы многообразия без края, $g_{ij}(r)$ — положительные гладкие на $[r_0, +\infty)$ функции, $d\theta_{ij}^2$ — метрика на S_{ij}, $k = k(i)$. В случае, когда некоторый конец D_i изометричен прямому произведению $[r_0, +\infty) \times S_i$, где S_i — компакт, конец D_i называется *модельным*. Заметим, что в поведении решений эллиптических уравнений на многообразиях с квазимодельными и модельными концами есть отличия. Например, на многообразиях с модельными концами из выполнения теоремы Лиувилля для ограниченных гармонических функций следует выполнение теоремы Лиувилля для ограниченных решений уравнения $\Delta u - u = 0$ (см. [7]). На произвольных многообразиях с квазимодельными концами данное свойство не выполняется (см. [4]).

Пусть $n_{ij} = \dim S_{ij}$. Введем следующие обозначения:

$$s_i(t) = g_{i1}^{n_{i1}}(t)...g_{ik}^{n_{ik}}(t), \quad q_{ij}(t) = \frac{s_i(t)}{g_{ij}^2(t)},$$

$$J_{ij} = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{s_i(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} q_{ij}(z)dz \right) dt,$$

$$K_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{s_i(t)} dt, \quad N_{ij} = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{s_i(t)} \left(\int\limits_{t}^{\infty} q_{ij}(z)dz \right) dt,$$

где $j = 1, ..., k$.

Введем понятие емкостного потенциала произвольного конца D_i. Пусть $\{B_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание конца D_i, т.е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств конца D_i с гладкими границами ∂B_n^i таких, что $\partial D_i \subset \partial B_n^i$, $\overline{B_n^i} \setminus \partial D_i \subset B_{n+1}^i$ для всех n и $D_i \setminus \partial D_i = \cup_{n=1}^{\infty} B_n^i$. Пусть $\{v_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность решений следующих задач Дирихле

$$\begin{cases} \Delta v_n^i = 0 & \text{в} & B_n^i, \\ v_n^i = 1 & \text{на} & \partial B_n^i \setminus D_i, \\ v_n^i = 0, & \text{на} & \partial D_i. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{v_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума убывает. Кроме того, $0 \leqslant v_n^i \leqslant 1$ в B_n^i. Отсюда следует, что существует предельная функция $v_i(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n^i(x)$, которая является гармонической и $0 \leqslant v_i(x) \leqslant 1$ на D_i. Функция $v_i(x)$ называется *емкостным потенциалом конца* D_i.

Определение 1. Говорят, что конец D_i многообразия M имеет *параболический тип*, если его емкостный потенциал тождественно равен нулю. В противном случае говорят, что конец D_i имеет *гиперболический тип*.

Заметим, что конец D_i имеет гиперболический тип тогда и только тогда, когда $K_i < \infty$ (см., например, [2]).

Очевидно, что на каждом квазимодельном конце D_i гиперболического типа выполнено в точности одно из следующих условий:

1) $K_i < \infty$, $J_{ij} = \infty$ для всех $j = 1, ..., k$. В этом случае будем говорить, что конец D_i имеет *нестрого гиперболический тип*.

2) $K_i < \infty$ и существует номер s, $1 \leqslant s \leqslant k$ такой, что $J_{ij} < \infty$ для всех $j \leqslant s$ и $J_{ij} = \infty$ при $j > s$. В этом случае будем говорить, что конец D_i имеет *строго гиперболический тип порядка* (k, s).

Будем говорить, что конец параболического типа D_i имеет *строго параболический тип*, если $N_{ij} = \infty$ для всех $j = 1, ..., k$. В противном случае будем говорить, что конец D_i имеет *нестрого параболический тип*.

Обозначим $\theta^i = (\theta_{i1}, \ldots, \theta_{ik})$.

Введем понятие предела по концу многообразия.

Определение 2. Будем говорить, что функция $\Phi(\theta^i)$ является пределом функции $u(x)$ по концу D_i, и использовать обозначение $\lim\limits_{D_i} u(x) = \Phi(\theta^i)$, если

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{S_{i1}\times S_{i2}\times\ldots\times S_{ik}} |u(r,\theta^i) - \Phi(\theta^i)| = 0.$$

Будем говорить, что предел функции $u(x)$ по концу D_i равен бесконечности $\lim\limits_{D_i} u(x) = +\infty$, $(\lim\limits_{D_i} u(x) = -\infty)$, если

$$\lim_{r\to\infty} \inf_{S_{i1}\times S_{i2}\times\ldots\times S_{ik}} u(x) = +\infty \quad (\lim_{r\to\infty} \sup_{S_{i1}\times S_{i2}\times\ldots\times S_{ik}} u(x) = -\infty).$$

Определим поток гармонической функции по концу многообразия.

Определение 3. Потоком гармонической функции u по концу D_i назовем число

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u = \int\limits_{\partial B_n^i \cap D_i} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mu',$$

где ν — единичная внешняя нормаль к B_n^i, $d\mu'$ — элемент объема на ∂B_n^i.

Заметим, что в силу формулы Грина определение потока не зависит от выбора B_n^i.

Обозначим через $\mathbb{H}(M)$ пространство гармонических на M функций, через $\mathbb{H}'(M)$, $\mathbb{BH}(M)$ и $\mathbb{H}^+(M)$ — пространство гармонических на M функций, ограниченных с одной стороны на каждом конце многообразия M; пространство ограниченных гармонических на M функций и конус неотрицательных гармонических на M функций, соответственно.

Основные результаты работы содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. Пусть M — многообразие с квазимодельными концами, имеющее l концов $D_1, \ldots, D_l$ параболического типа, m концов $D_{l+1}, \ldots, D_{l+m}$ нестрого гиперболического типа и p концов D_{l+m+1}, ..., D_{l+m+p} строго гиперболического типа порядков (k_1, s_1), ..., (k_p, s_p), соответственно. Пусть $m + p \geqslant 1$. Тогда для любого набора $(a_1, \ldots, a_l,\ b_{l+1}, \ldots, b_{l+m},\ \Phi_{l+m+1}, \ldots, \Phi_{l+m+p})$, где $a_1, \ldots, a_l$, $b_{l+1}, \ldots, b_{l+m}$ — произвольные константы, а $\Phi_i = \Phi_i(\theta_{i1}, \ldots, \theta_{is_i})$ — непрерывные на $S_{i1} \times \ldots \times S_{ik}$ функции, существует функция $u \in \mathbb{H}'(M)$ такая, что

$$\begin{gathered} \operatorname*{flux}_{D_i} u = a_i, \quad i = 1, \ldots, l; \\ \lim_{D_i} u = b_i, \quad i = l+1, \ldots, l+m; \\ \lim_{D_i} u(r,\theta^i) = \Phi_i(\theta_{i1}, \ldots, \theta_{is_i}), \quad i = l+m+1, \ldots, l+m+p. \end{gathered} \tag{1}$$

При этом, если все концы параболического типа $D_1, \ldots, D_l$ имеют строго параболический тип, то данное решение краевой задачи (1) будет единственным в $\mathbb{H}(M)$.

Заметим, что в [2] были найдены условия разрешимости краевой задачи, аналогичной (1), для ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера, и, в частности, для обычных ограниченных гармонических функций без условий на концы параболического типа.

Теорема 2. Пусть M — многообразие с квазимодельными концами, имеющее l концов $D_1, \dots D_l$ строго параболического типа, m концов $D_{l+1}, \dots D_{l+m}$ нестрого гиперболического типа и не имеющее концов других типов. Тогда

$$\dim \mathbb{BH}(M) = m, \quad \dim \mathbb{H}'(M) = l + m,$$

$$\dim \mathbb{H}^+(M) = \begin{cases} l + m, & \text{если } m \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } m = 0. \end{cases}$$

Заметим, что в случае, когда M имеет хотя бы один конец строго гиперболического типа, пространства $\mathbb{BH}(M)$, $\mathbb{H}'(M)$ и конус $\mathbb{H}^+(M)$ являются бесконечномерными (см., например, [2]).

1. Гармонические функции на квазимодельных концах

В данной части работы рассматриваются гармонические функции на квазимодельных концах многообразия. Через $\mathbb{H}^+(D_i)$ обозначим конус неотрицательных L-гармонических на конце D_i функций. Через $\mathbb{BH}(D_i)$ и $\mathbb{H}'(D_i)$ обозначим пространство ограниченных и пространство ограниченных с одной стороны гармонических на D_i функций.

Переобозначим для фиксированного i объекты D_i через D, $v_i(x)$, B_n^i, $g_{ij}(r)$, $s_i(r)$, $q_{ij}(r)$, S_{ij}, I_i, J_{ij}, K_i, N_{ij}, θ_{ij}, θ^i, n_{ij} соответственно через $v(x)$, B_n, $g_j(r)$, $s(r)$, $q_j(r)$, S_j, I, J_j, K, N_j, θ_j, θ, n_j.

Пусть $\{w_i^j(\theta_j)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(S_j)$ из собственных функций оператора $-\Delta_j$ (где Δ_j — оператор Лапласа—Бельтрами на S_j) и λ_i^j — соответствующие собственные числа $(0 = \lambda_0^j < \lambda_1^j \leqslant \lambda_2^j \leqslant \ldots)$, т.е. для всех i выполнено $\Delta_j w_i^j(\theta_j) + \lambda_i^j w_i^j(\theta_j) = 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Пусть $u \in \mathbb{H}'(D)$. Поступая, как и в [4], получаем, что для любого $r \geqslant r_0$ справедливо следующее разложение:

$$u(r,\theta) = \sum_{l_k=0}^{\infty} \left(\ldots \left(\sum_{l_1=0}^{\infty} V_{l_1 \ldots l_k}(r) w_{l_1}^1(\theta_1) \right) \ldots \right) w_{l_k}^k(\theta_k), \tag{1.1}$$

где

$$V_{l_1 \ldots l_k}(r) = \int_{S_1} \ldots \left(\int_{S_k} u(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) w_{l_k}^k(\theta_k) d\theta_k \right) \ldots w_{l_1}^1(\theta_1) d\theta_1. \tag{1.2}$$

Кроме того, функция $V_{l_1 \ldots l_k}(r)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 V_{l_1 \ldots l_k}(r)}{dr^2} + \left[\sum_{j=1}^{k} n_j \frac{g_j'(r)}{g_j(r)} \right] \frac{dV_{l_1 \ldots l_k}(r)}{dr} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{l_j}^j}{g_j^2(r)} V_{l_1 \ldots l_k}(r) = 0. \tag{1.3}$$

Дважды интегрируя равенство (1.3), получаем

$$V_{l_1\dots l_k}(r)=\sum_{j=1}^{k}\left[\lambda_{l_j}^{j}\int\limits_{r_1}^{r}\frac{1}{s(t)}\left(\int\limits_{r_1}^{t}q_j(z)V_{l_1\dots l_k}(z)dz\right)dt\right]+$$

$$+s(r_1)V'_{l_1\dots l_k}(r_1)\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dt}{s(t)}+V_{l_1\dots l_k}(r_1),$$

где $r>r_1\geqslant r_0$ любые. Выпишем полученную формулу отдельно для $V_{0\dots0}(r)$

$$V_{0\dots0}(r)=s(r_1)V'_{0\dots0}(r_1)\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dt}{s(t)}+V_{0\dots0}(r_1),\tag{1.4}$$

где $r>r_1\geqslant r_0$ любые.

Отметим, что уравнение (1.3) играет существенную роль при изучении поведения гармонических функций на квазимодельных концах. Свойства решений данного уравнения достаточно подробно описаны в работах [2, 4, 6, 7] и в приложении (см. ниже).

Обозначим через $|S_j|$ объем компакта S_j, $j=1,...,k$. Заметим, что из ортонормированности базиса $\{w_i^j(\theta_j)\}$ в $L^2(S_j)$ следует, что

$$w_0^j\equiv\frac{1}{\sqrt{|S_j|}},\quad j=1,...,k.\tag{1.5}$$

Пусть $l=(l_1,\dots,l_k)$ — мультииндекс, $|l|=l_1+\dots+l_k$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. Пусть $u\in\mathbb{H}'(D)$ и D — конец нестрого гиперболического или строго параболического типа. Тогда существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{D}u(r,\theta)=\frac{\operatorname{flux}\limits_{D}u}{|S_1|...|S_k|}\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{dt}{s(t)}+\frac{\int\limits_{S_1}...\left(\int\limits_{S_k}u(r_1,\theta)d\theta_k\right)...d\theta_1}{|S_1|...|S_k|},$$

где $r_1\geqslant r_0$ — произвольное фиксированное число.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что функция $u(r,\theta)$ ограничена на D сверху константой N. Тогда функция $f(r,\theta)\equiv N-u(r,\theta)$ является гармонической и неотрицательной на D. Представим функцию u в виде (1.1). Из формулы (1.2) следует, что

$$V_{l_1\dots l_k}(r)=\int\limits_{S_1}...\left(\int\limits_{S_k}[N-f(r,\theta)]w_{l_k}^{k}(\theta_k)d\theta_k\right)...w_{l_1}^{1}(\theta_1)d\theta_1.\tag{1.6}$$

В случае $|l|=0$ в силу формулы (1.5) имеем

$$\int\limits_{S_1}...\left(\int\limits_{S_k}f(r,\theta)d\theta_k\right)...d\theta_1=\sqrt{|S_1|...|S_k|}[N\sqrt{|S_1|...|S_k|}-V_{0\dots0}(r)].\tag{1.7}$$

В случае $|l| \geqslant 1$, используя неотрицательность функции f на D, из (1.6) и (1.7) получаем существование таких констант C_1 и C_2, что

$$|V_{l_1\dots l_k}(r)| < C_1 + C_2|V_{0\dots 0}(r)|. \tag{1.8}$$

Заметим, что в случае, когда $u \in \mathbb{BH}(D)$, из (1.2) и (1.5) сразу следует справедливость оценки (1.8) для $C_1 = 0$ и некоторой константы C_2.

Предположим, что $|V_{l_1\dots l_k}(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$. Учитывая неравенство (1.8), получаем, что $|V_{0\dots 0}(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$. Кроме того, из предложения 3.2 (см. приложение) получаем, что $\lim_{r\to\infty}[V_{l_1\dots l_k}(r)/V_{0\dots 0}(r)] = \infty$. Пришли к противоречию с (1.8). Отсюда, учитывая предложение 3.1 (см. приложение), получаем, что $\lim_{r\to\infty} V_{l_1\dots l_k}(r) = 0$ при $|l| \geqslant 1$. Из последнего, как и в [2], получаем, что ряд в правой части равенства (1.1) сходится равномерно на $[r_0, +\infty) \times S_1 \times \ldots \times S_k$. Тогда, учитывая (1.5), получаем

$$\lim_D u(r, \theta) = \frac{\lim\limits_{r\to\infty} V_{0\dots 0}(r)}{\sqrt{|S_1|\dots|S_k|}}. \tag{1.9}$$

В случае, когда D имеет нестрого гиперболический тип, из предложения 3.1 (см. приложение) получаем, что $\lim_{r\to\infty} V_{0\dots 0}(r) = \mathrm{const}$. Учитывая формулу (1.9), получаем, что в этом случае существует конечный предел $\lim\limits_D u$.

Если же D имеет строго параболический тип, из предложения 3.1 (см. Приложение) следует, что при $r \to \infty$ $|V_{0\dots 0}(r)| \to \infty$, либо $|V_{0\dots 0}(r)| \to \to \mathrm{const}$. Из формулы (1.9) следует, что в этом случае существует конечный либо бесконечный предел $\lim\limits_D u$.

Найдем $\lim\limits_D u(r, \theta)$. Заметим, что из определения потока $\operatorname{flux}\limits_D u$ и формулы Грина следует, что

$$\operatorname*{flux}_D u(r, \theta) = \int\limits_{\partial B_n \cap D} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' = \int\limits_{S_1} \dots \left(\int\limits_{S_k} \frac{\partial u(r_1, \theta)}{\partial \nu} s(r_1) d\theta_k \right) \dots d\theta_1,$$

где $r_1 \geqslant r_0$ — произвольное число. Из последнего получаем, что

$$\operatorname*{flux}_D u(r, \theta) = s(r_1) \int\limits_{S_1} \dots \left(\int\limits_{S_k} \frac{\partial u(r_1, \theta)}{\partial r} d\theta_k \right) \dots d\theta_1,$$

откуда, учитывая (1.4), (1.2), (1.5) и (1.9), получаем требуемое.

Лемма доказана.

Следствие 1.1. Если D имеет строго параболический тип, то предел $\lim\limits_D u = \infty$ тогда и только тогда, когда $\operatorname*{flux}\limits_D u \neq 0$. Если же D имеет нестрого гиперболический тип, то $\lim\limits_D u < \infty$. В частности, если $v(x)$ — емкостный потенциал конца D нестрого гиперболического типа, то $\lim\limits_D v = 1$.

Следующее утверждение доказано в [3].

Лемма 1.2. [3] Пусть Ω — предкомпактное открытое множество в M, граница $\partial\Omega$ которого состоит из непересекающихся компактных гиперповерхностей F_1 и F_2. Пусть u — гармоническая функция в Ω, непрерывная в $\overline{\Omega}$, причем $u|_{F_1} \leqslant 0, u|_{F_2} > 0$. Тогда

$$\int\limits_{F_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' = -\int\limits_{F_2} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' > 0,$$

где ν — единичная внутренняя нормаль.

Лемма 1.3. Если D — произвольный конец параболического типа и $u(x) \in \mathbb{BH}(D)$, то $\operatorname*{flux}\limits_D u(x) = 0$.

Доказательство Пусть $u \in \mathbb{BH}(D)$. Не ограничивая общности, считаем, что $u(x) > 0$ на D. Тогда существует такая константа $C_1 > 0$, что $0 \leqslant \inf\limits_D u(x) \leqslant \sup\limits_D u(x) < C_1$.

Поступаем, как и в [3]. Пусть $v_n(x)$, $x \in D$ — последовательность гармонических функций таких, что

$$v_n|_{\partial D} = 0, \quad v_n|_{\partial B_n \cap D} = 1.$$

Тогда, в силу того, что конец D имеет параболический тип, последовательность $\{v_n\}$ убывает и сходится к нулю. Из последнего получаем, что

$$\int\limits_{\partial B_1 \cap D} \frac{\partial v_n}{\partial \nu} d\mu' \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. $\operatorname*{flux}\limits_D v_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как функции

$$f_1 = C_1 v_n - u, \quad f_2 = u + C_1(v_n - 1)$$

отрицательны на ∂D и положительны на $\partial B_n \cap D$, то в силу леммы 1.2 получаем, что

$$\operatorname*{flux}\limits_D (C_1 v_n - u) > 0, \quad \operatorname*{flux}\limits_D [u + C_1(v_n - 1)] > 0.$$

Из последнего следует, что

$$-C_1 \operatorname*{flux}\limits_D v_n \leqslant \operatorname*{flux}\limits_D u \leqslant C_1 \operatorname*{flux}\limits_D v_n.$$

При $n \to \infty$ получаем, что $\operatorname*{flux}\limits_D u = 0$, что и требовалось показать.

Лемма 1.4. Пусть D — конец параболического типа. Тогда для любых констант a, b существует функция $\tilde{u}(x) \in \mathbb{H}'(D)$ такая, что

$$\tilde{u}(x)|_{\partial D} = b, \quad \operatorname*{flux}\limits_D \tilde{u}(x) = a.$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — неотрицательная неограниченная гармоническая на D функция, равная нулю на ∂D и такая, что $\lim\limits_D u(x) = +\infty$ (существование такой функции показано, в частности, в [8]). В силу леммы 1.2 $\operatorname*{flux}\limits_D u(x) > 0$. Очевидно, что искомой функцией является

$$\tilde{u}(x) = \frac{a}{\operatorname*{flux}\limits_D u(x)} u(x) + b.$$

Следующие утверждения доказаны в работе [2].

Лемма 1.5. [2] Пусть D — квазимодельный конец строго гиперболического типа порядка (k, s). Тогда для любых непрерывных ограниченных на $S_1 \times \ldots \times S_k$ функций $\chi(\theta)$ и $\Phi(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ существует функция $u \in \mathbb{BH}(D)$ такая, что

$$u(r_0, \theta) = \chi(\theta),$$
$$\lim_{D} u(x) = \Phi(\theta_1, \ldots, \Phi_s).$$

Лемма 1.6. [2] Пусть D — квазимодельный конец нестрого гиперболического типа. Тогда для любой непрерывной ограниченной на $S_1 \times \ldots \times S_k$ функции $\chi(\theta)$ и любой константы C существует функция $u \in \mathbb{BH}(D)$ такая, что

$$u(r_0, \theta) = \chi(\theta),$$
$$\lim_{D} u(x) = C.$$

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Построим на многообразии M функцию $u \in \mathbb{H}'(M)$, являющуюся решением задачи (1).

Зафиксируем произвольным образом индекс $i = 1, \ldots, l{+}m{+}p$. Для данного i построим на M функцию $u_i(x) \in \mathbb{H}'(M)$ такую, что

$$\begin{aligned} \operatorname*{flux}_{D_i} u_i(x) &= a_i, \quad \text{если } 1 \leqslant i \leqslant l, \\ \lim_{D_i} u_i(x) &= b_i, \quad \text{если } l+1 \leqslant i \leqslant l+m, \\ \lim_{D_i} u_i(x) &= \Phi_i, \quad \text{если } l+m+1 \leqslant i \leqslant l+m+p. \end{aligned} \tag{2.1}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname*{flux}_{D_j} u_i(x) &= 0, \ \ 1 \leqslant j \leqslant l, j \neq i, \\ \lim_{D_j} u_i(x) &= 0, \ \ l+1 \leqslant j \leqslant l+m+p, j \neq i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если $1 \leqslant i \leqslant s$, то, не ограничивая общности, считаем, что $a_i \geqslant 0$.

Пусть $u_i^0(x) \in \mathbb{H}'(D_i)$ — такая функция, что $u_i^0|_{\partial D_i} = 0$ и

$$\begin{aligned} \operatorname*{flux}_{D_i} u_i^0(x) &= a_i, \ \ \text{если } 1 \leqslant i \leqslant l, \\ \lim_{D_i} u_i^0(x) &= b_i \ \ \text{если } l+1 \leqslant i \leqslant l+m, \\ \lim_{D_i} u_i^0(x) &= \Phi_i \ \ \text{если } l+m+1 \leqslant i \leqslant l+m+p. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Существование такой функции u_i^0 непосредственно следует из лемм 1.4–1.6.

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание M, т.е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств многообразия M с гладкими границами ∂B_n таких, что $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$ и $M = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных в B_n и являющихся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta\varphi_n = 0 \ \text{ в } \ B_n, \\ \varphi_n|_{\partial B_n} = u_0|_{\partial B_n}, \end{cases}$$

где
$$u_0(x) = \begin{cases} u_i^0(x) \text{ на } D_i, \\ 0 \text{ на } D_j, 1 \leqslant j \leqslant l+m+p, j \neq i. \end{cases}$$

Для доказательства существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ поступаем, как и в [6].

Обозначим через $G_n(x,y)$ функцию Грина в B_n. Пусть φ_0 — финитная функция, равная нулю в B и равная единице вне некоторой окрестности B. Положим $U = u_0\varphi_0$, $\Delta U = f$. Заметим, что $\operatorname{supp} f$ лежит в окрестности B. Рассмотрим последовательность функций $\psi_n = \varphi_n - U$. Для них выполнено $\Delta\psi_n = -f$, $\psi_n|_{\partial B_n} = 0$. Тогда
$$\psi_n(x) = \int\limits_{B_n} G_n(x,y) f(y) dy.$$

Так как M — многообразие гиперболического типа, то существует предел функций Грина $G_n(x,y)$ (см. [1]). Из существования предела функций Грина следует существование предела последовательности $\{\psi_n\}$ и, соответственно, существование предела последовательности $\{\varphi_n\}$. Пусть
$$u_i = \lim_{n\to\infty} \varphi_n.$$

В силу того, что $\Delta\varphi_n = 0$ в B_n, мы получаем, что $u_i \in \mathbb{H}(M)$.

Докажем, что функция $u_i(x)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Действительно, в силу непрерывности функции u_i^0 существует
$$U_1 = \min_{\partial D_i} u_i, \quad U_2 = \max_{\partial D_i} u_i.$$

Тогда $U_1 \leqslant u_i|_{\partial D_i} \leqslant U_2$ и при достаточно больших n
$$U_1 - 1 \leqslant \varphi_n|_{\partial D_i} \leqslant U_2 + 1.$$

Пусть
$$A_1 = \min\{0, U_1 - 1\}, \quad A_2 = \max\{0, U_2 + 1\}.$$

Очевидно, выполнено
$$A_1 \leqslant u_i^0|_{\partial D_i} \leqslant A_2 \quad \text{и} \quad A_1 \leqslant \varphi_n|_{\partial D_i} \leqslant A_2.$$

Согласно леммам 1.4–1.6, на D_i существуют функции $\underline{u}_i(x) \in \mathbb{H}'(D_i)$ и $\overline{u}_i(x) \in \mathbb{H}'(D_i)$ такие, что
$$\underline{u}_i(x)|_{\partial D_i} \leqslant A_1, \quad \overline{u}_i(x)|_{\partial D_i} \geqslant A_2 \tag{2.4}$$

и
$$\begin{aligned} &\operatorname*{flux}_{D_i} \underline{u}_i(x) = \operatorname*{flux}_{D_i} \overline{u}_i(x) = a_i \text{ если } 1 \leqslant i \leqslant l, \\ &\lim_{D_i} \underline{u}_i(x) = \lim_{D_i} \overline{u}_i(x) = b_i, \text{ если } l+1 \leqslant i \leqslant l+m, \\ &\lim_{D_i} \underline{u}_i(x) = \lim_{D_i} \overline{u}_i(x) = \Phi_i, \text{ если } l+m+1 \leqslant i \leqslant l+m+p. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.4) получаем, что
$$\underline{u}_i|_{\partial D_i} \leqslant u_i^0|_{\partial D_i} \leqslant \overline{u}_i|_{\partial D_i}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим сначала случай $1 \leqslant i \leqslant l$. Покажем, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u_i = a_i.$$

В силу (2.5) и (2.3) имеем

$$\operatorname*{flux}_{D_i}(\overline{u}_i - u_i^0) = \operatorname*{flux}_{D_i}(\overline{u}_i - \underline{u}_i) = \operatorname*{flux}_{D_i}(u_i^0 - \underline{u}_i) = 0.$$

Учитывая формулу (2.6) и лемму 1.2, получаем, что

$$\underline{u}_i \leqslant u_i^0 \leqslant \overline{u}_i \ \text{ на } \ D_i,$$

и при достаточно больших n на $D_i \cap B_n$ имеем

$$\underline{u}_i \leqslant \varphi_n \leqslant \overline{u}_i.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\underline{u}_i \leqslant u_i \leqslant \overline{u}_i \ \text{ на } \ D_i, \tag{2.7}$$

откуда следует, что $u_i \in \mathbb{H}'(D)$. Так как $\overline{u}_i - \underline{u}_i \equiv \mathrm{const}$ (см. доказательство леммы 1.4), то из (2.7) получаем, что

$$0 \leqslant u_i - \underline{u}_i \leqslant \overline{u}_i - \underline{u}_i \equiv \mathrm{const}.$$

Другими словами, $u_i - \underline{u}_i \in \mathbb{BH}(M)$, откуда, в силу леммы 1.3, следует, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i}(u_i - \underline{u}_i) = 0,$$

следовательно

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u_i = a_i.$$

Заметим, что, рассуждая аналогично, несложно показать, что потоки функции $u_i(x)$ по остальным концам параболического типа равны нулю.

Покажем, что $\lim\limits_{D_j} u_i(x) = 0$ для $j = l+1, \ldots, l+m+p$. Положим $\alpha_n = \max\limits_B \varphi_n$. Заметим, что последовательность $\alpha_n \to a = \mathrm{const}$ при $n \to \infty$ в силу того, что существует предельная для последовательности $\{\varphi_n\}$ функция. Положим $\tilde{\varphi}_n = \dfrac{\varphi_n}{\alpha_n}$ на B_n. Тогда получаем, что каждая функция $\tilde{\varphi}_n$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\varphi}_n = 0 \quad \text{на } B_n, \\ \tilde{\varphi}_n|_{\partial B_n} = \dfrac{1}{\alpha_n} u_0|_{\partial B_n}, \\ \max\limits_B \tilde{\varphi}_n = 1, \end{cases}$$

откуда в силу принципа максимума и того, что $u_0 = 0$ на D_j, заключаем, что

$$0 \leqslant \tilde{\varphi}_n \leqslant 1 \ \text{ на } \ B_n \cap D_j,$$

причем $\tilde{\varphi}_n = 0$ на $\partial B_n \cap D_j$, $\max\limits_B \tilde{\varphi}_n = 1$. Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \tilde{\varphi}_n \leqslant 1 - \nu_j \ \text{ на } \ B_n \cap D_j, \tag{2.8}$$

где D_j — произвольный конец гиперболического типа, $v_j(x)$ — емкостный потенциал конца D_j. Из (2.8) и следствия 1.1 получаем, что

$$0 \leqslant \lim_{D_j} u_i(x) = \lim_{D_j} \lim_{n\to\infty} \alpha_n \tilde{\varphi}_n \leqslant a \lim_{D_j}(1 - v_j) = 0,$$

откуда следует требуемое.

Таким образом, мы показали выполнение условий (2.1) и (2.2) для построенной функции $u_i(x)$ в случае $1 \leqslant i \leqslant l$.

Рассмотрим теперь случай $l + 1 \leqslant i \leqslant l + m + p$. Как и в [2], несложно показать, что в этом случае на M существует функция $u_i(x) \in \mathbb{BH}(M)$ такая, что

$$\lim_{D_i} u_i(x) = b_i, \text{ если } l + 1 \leqslant i \leqslant l + m,$$
$$\lim_{D_i} u_i(x) = \Phi_i, \text{ если } l + m + 1 \leqslant i < l + m + p,$$

и

$$\lim_{D_j} u_i(x) = 0, \; l + 1 \leqslant j \leqslant l + m + p, j \neq i.$$

Учитывая лемму 1.3, заключаем, что

$$\operatorname{flux}_{D_j} u_i(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, l.$$

Таким образом, функция $u_i(x)$ $(l+1 \leqslant i \leqslant l+m+p)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).

Очевидно, что функция

$$u(x) = \sum_{i=1}^{l+m+p} u_i(x)$$

является искомой.

Докажем вторую часть теоремы 1.

Пусть $u_1 \in \mathbb{H}(M)$ и $u_2 \in \mathbb{H}(M)$ — две функции, удовлетворяющие условиям (1). Заметим, что т.к. все концы параболического типа имеют строго параболический тип, из леммы 1.1 и принципа максимума следует, что $u_1 \in \mathbb{H}'(M)$ и $u_2 \in \mathbb{H}'(M)$.

Рассмотрим функцию $w = u_1 - u_2 \in \mathbb{H}'(M)$. Очевидно, что ее пределы по всем концам гиперболического типа многообразия M равны нулю. Также равны нулю ее потоки по всем концам параболического типа. Покажем, что $w(x) \equiv 0$, откуда будет следовать единственность.

Пусть D_i — конец параболического типа, т.е. $1 \leqslant i \leqslant l$. В силу леммы 1.1 существует конечный предел $\lim_{D_i} w(x)$.

Поступаем, как и в [3]. Положим

$$t_i = \lim_{D_i} w(x), \quad i = 1, ..., l + m + p$$

и

$$t = \min_{i=1,\ldots,l+m+p} t_i.$$

Так как пределы функции $w(x)$ по всем концам гиперболического типа равны нулю, то $t_j = 0$ для $j = l+1, ..., l+m+p$.

Предположим, что $t < 0$. Пусть I — набор индексов таких, что

$$\lim_{D_i, i\in I} w(x) = t.$$

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$t < -\varepsilon < t_i, \quad i \notin I.$$

Рассмотрим функцию

$$y(x) = w(x) + \varepsilon.$$

Заметим, что $\operatorname{flux}_{D_i} y(x) = \operatorname{flux}_{D_i} w(x) = 0$ для всех $i = 1, ..., l$. Рассмотрим при достаточно больших n область, ограниченную сечениями $D_i(n) = D_i \cap \partial B_n$, $i = 1, ..., l+m+p$. Тогда

$$y(x)|_{D_i(n), i\in I} < 0, \quad y(x)|_{D_i(n), i\notin I} > 0,$$

откуда из леммы 1.2 следует, что

$$-\sum_{i\in I} \operatorname{flux}_{D_i} y(x) > 0,$$

что противоречит условию $\operatorname{flux}_{D_i} y(x) = 0$ для всех $i = 1, ..., l$.

Таким образом, предположение о том, что $t < 0$, не верно, откуда в силу принципа максимума функция $w(x)$ неотрицательна на M. Аналогично можно показать, что

$$T = \max_{i=1,...,l+m+p} t_i \leqslant 0,$$

откуда функция $w(x)$ неположительна на M. Отсюда заключаем, что $w(x) \equiv 0$ на M.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим сначала случай, когда $m \geqslant 1$. Из теоремы 1 следует существование на M гармонических функций $h_{D_1}, \ldots h_{D_l}, f_{D_{l+1}}, \ldots f_{D_{l+m}}$ таких, что

$$\operatorname{flux}_{D_i} h_{D_i} = 1, \quad \operatorname{flux}_{D_j} h_{D_i} = \lim_{D_p} h_{D_i} = 0$$

для всех $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, l$, $j \neq i$, $p = l+1, \ldots l+m$ и

$$\lim_{D_i} f_{D_i} = 1, \quad \lim_{D_j} f_{D_i} = \operatorname{flux}_{D_p} f_{D_i} = 0$$

для всех $i = l+1, \ldots, l+m$, $j = l+1, \ldots l+m$, $j \neq i$, $p = 1, \ldots, l$. Очевидно, что данные функции являются линейно независимыми. Заметим, что в силу принципа максимума и леммы 1.1, указанные функции неотрицательны на M и, кроме того, функции $\{f_{D_i}\}_{i=l+1}^{l+m}$ ограничены на M.

Оценим размерность пространства $\mathbb{BH}(M)$. Покажем, что набор функций $\{f_{D_i}\}_{i=l+1}^{l+m}$ будет являться базисом пространства ограниченных гармонических на M функций.

Пусть f — произвольная ограниченная гармоническая на M функция. Тогда из леммы 1.1 следует, что на каждом конце $D_{l+1}, \ldots, D_{l+m}$ существуют конечные пределы функции f. Пусть $(b_{l+1}, \ldots, b_{l+m})$ — набор этих пределов. Тогда функция $f^* \equiv f - \sum\limits_{i=l+1}^{l+m} b_i f_{D_i}$ имеет нулевые пределы по концам гиперболического типа и нулевые потоки по концам параболического типа (в силу леммы 1.3). Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что $f^* \equiv 0$ и, соответственно, $f \equiv \sum\limits_{i=l+1}^{l+m} b_i f_{D_i}$, откуда, в силу линейной независимости набора $\{f_{D_i}\}_{i=l+1}^{l+m}$, следует, что $\dim \mathbb{BH}(M) = m$.

Перейдем к доказательству оценки размерностей конуса $\mathbb{H}^+(M)$ и пространства $\mathbb{H}'(M)$. Пусть $f \in \mathbb{H}'(M)$. В силу леммы 1.1, существуют конечные пределы $(b_{l+1}, \ldots, b_{l+m})$ функции f по всем концам гиперболического типа. Пусть $(a_1, \ldots, a_l)$ — потоки функции f по концам параболического типа. Очевидно, что функция

$$f^* \equiv f - \left(\sum_{i=1}^{l} a_i h_{D_i} + \sum_{i=l+1}^{l+m} b_i f_{D_i} \right)$$

имеет нулевые потоки по всем концам параболического типа и нулевые пределы по всем концам гиперболического типа. Точно так же, как и выше, получаем, что в этом случае $\dim \mathbb{H}'(M) = l + m$.

Заметим, что в случае, когда $f \in \mathbb{H}^+(M)$, все числа $a_1, \ldots, a_l$, $b_{l+1}, \ldots, b_{l+m}$ являются неотрицательными, откуда, в силу неотрицательности и линейно независимости функций $\{f_{D_i}\}_{i=l+1}^{l+m}$ и $\{h_{D_j}\}_{j=1}^{l}$, следует, что $\dim \mathbb{H}^+(M) = m + l$.

Рассмотрим теперь случай $m = 0$, т.е. когда все концы многообразия имеют строго параболический тип.

Так как все концы имеют параболический тип, то и все многообразие M имеет параболический тип (см., например, [1]). Отсюда сразу получаем (см. [1]), что $\dim \mathbb{H}^+(M) = 1$.

Покажем, что $\dim \mathbb{H}'(M) = l$.

Заметим, что в работе [5] было доказано, что

$$\dim \mathbb{H}'(M) \geqslant l. \tag{2.9}$$

Из оценки (2.9) получаем, что на M существуют линейно независимые, не равные тождественно константам функции $u_i \in \mathbb{H}'(M)$, $i = 1, ..., l-1$. Так как функции u_i не равны тождественно константам, то набор

$$\{1, u_1, ..., u_{l-1}\} \tag{2.10}$$

будет линейно независимым. Покажем, что набор функций (2.10) будет являться базисом пространства $\mathbb{H}'(M)$, откуда будет следовать утверждение теоремы 2.

Пусть $\{a_1^i, a_2^i, ..., a_{l-1}^i\}$ — потоки функции u_i по концам $D_1, D_2, ..., D_{l-1}$, $i = 1, 2, ..., l-1$. Заметим, что в силу формулы Грина наборы потоков функции u_i по концам $D_1, ..., D_{l-1}$ однозначно определяют поток функции u_i по концу D_l.

Отметим также, что система векторов $\xi_i = \{a_1^i, a_2^i, ..., a_{l-1}^i\}$, $i = 1, 2, ..., l-1$ является линейно независимой в силу линейной независимости набора функций (2.10). Действительно, если, например, $\xi_1 = \sum\limits_{i=2}^{l-1} n_i \xi_i$, где n_i — некоторые константы, не равные одновременно нулю, то

$$\operatorname*{flux}_{D_j} u_1 = \sum_{i=2}^{l-1} n_i \operatorname*{flux}_{D_j} u_i, \quad j = 1, 2, ..., l-1. \tag{2.11}$$

Из (2.11) получаем, что функция

$$\tilde{u} = u_1 - \sum_{i=2}^{l-1} n_i u_i$$

имеет нулевые потоки по всем концам многообразия M. Тогда в силу леммы 1.1 и того, что все концы многообразия имеют строго параболический тип, существуют конечные пределы функции $\tilde{u}$ по всем концам многообразия M. Отсюда $\tilde{u}$ — ограниченная на многообразии M гармоническая функция. Так как M имеет параболический тип, то $\tilde{u} \equiv \mathrm{const}$, откуда

$$u_1 \equiv \mathrm{const} + \sum_{i=2}^{l-1} n_i u_i,$$

где не все n_i равны нулю. Пришли к противоречию с линейной независимостью набора функций (2.10). Таким образом, система векторов $\{\xi_i\}_{i=1}^{l-1}$ линейно независима.

Пусть $u \in \mathbb{H}'(M)$ — некоторая функция. Пусть r_1, r_2, ..., r_{l-1} — ее потоки по концам D_1, D_2, ..., D_{l-1}.

Так как система векторов $\{\xi_i\}_{i=1}^{l-1}$ линейно независима, то существует единственное решение $(c_1, c_2, ..., c_{l-1})$ системы

$$\begin{cases} r_1 &= c_1 a_1^1 + c_2 a_1^2 + ... + c_{l-1} a_1^{l-1}, \\ r_2 &= c_1 a_2^1 + c_2 a_2^2 + ... + c_{l-1} a_2^{l-1}, \\ & ... \\ r_{l-1} &= c_1 a_{l-1}^1 + c_2 a_{l-1}^2 + ... + c_{l-1} a_{l-1}^{l-1}, \end{cases}$$

т.е. существует единственный набор действительных чисел $(c_1, c_2, ..., c_{l-1})$ такой, что

$$\operatorname*{flux}_{D_j} u = \sum_{i=1}^{l-1} c_i \operatorname*{flux}_{D_j} u_i, \quad \text{для всех } j = 1, 2, ..., l-1. \tag{2.12}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{u} \equiv u - \sum_{i=1}^{l-1} c_i u_i.$$

В силу формулы (2.12), как и выше, получаем, что

$$\tilde{u} \equiv C = \mathrm{const},$$

откуда

$$u \equiv C + \sum_{i=1}^{l-1} c_i u_i.$$

Таким образом мы доказали, что набор функций (2.10) является базисом пространства $\mathbb{H}'(M)$.

Теорема 2 доказана.

Приложение

Приведем необходимые утверждения, касающиеся решений уравнения (1.3). Данные предложения доказываются теми же методами, что и аналогичные утверждения, приведенные в работах [2,4,6,7].

Будем использовать те же обозначения, что и выше.

Предложение 3.1. Пусть $V_{l_1\ldots l_k}(r)$ — решение уравнения (1.3). Тогда

(1) если $K < \infty$ и $J_i = \infty$ при фиксированном $i = 1, ..., k$, $l_i > 0$, то либо $\lim_{r\to\infty} |V_{l_1\ldots l_k}(r)| = \infty$, либо $\lim\limits_{r\to\infty} V_{l_1\ldots l_k}(r) = 0$;

(2) если $K = \infty$, то либо $\lim_{r\to\infty} |V_{l_1\ldots l_k}(r)| = \infty$, либо $\lim\limits_{r\to\infty} V_{l_1\ldots l_k}(r) = \mathrm{const}$. При этом, если $N_i = \infty$ при фиксированном $i = 1, \ldots, k$, $l_i > 0$, то либо $\lim\limits_{r\to\infty} V_{l_1\ldots l_k}(r) = 0$, либо $\lim_{r\to\infty} |V_{l_1\ldots l_k}(r)| = \infty$;

(3) если $K < \infty$, то $\lim_{r\to\infty} V_{0\ldots 0}(r) = \mathrm{const}$.

Предложение 3.2. Пусть $V_{l_1\ldots l_k}(r)$ — решение уравнения (1.3), причем $\lim_{r\to\infty} V_{l_1\ldots l_k} = \infty$ и $l_i > 0$ при фиксированном $i = 1, ...k$. Предположим также, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(1) $K < \infty$ и $J_i = \infty$;

(2) $K = \infty$ и $N_i = \infty$.

Тогда $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{V_{l_1\ldots l_k}(r)}{V_{0\ldots 0}(r)} = \infty$.

Литература

[1] Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 36. – P. 135–249.

[2] Лосев, А.Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа // Алгебра и анлиз. – 2001. – Т. 13. – Вып. 1. – С. 84–110.

[3] Григорьян, А.А. О множестве положительных решений уравнения Лапласа–Бельтрами на римановых многообразиях специального вида / А.А. Григорьян // Изв. вузов. Матем. – 1987. – №2. – С. 30–37.

[4] Лосев, А.Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях / А.Г. Лосев // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39. – №1. – С. 84–90.

[5] Li, P. Harmonic functions and the structure of complete manifolds / P. Li, L.F. Tam // J. Diff. Geom. – 1992. – V. 35. – P. 359–383.

[6] Лосев, А.Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А.Г. Лосев // Изв. вузов. Матем. – 1991. – №12. – С. 15–24.

[7] Лосев, А.Г. О взаимосвязи некоторых лиувиллевых теорем на римановых многообразиях специального вида / А.Г. Лосев // Изв. вузов. Матем. – 1997. – №10. – С. 31–37.

[8] Nakai, M. On Evans potential / M. Nakai // Proc. Japan. Acad. – 1962. – V. 38. – P. 624–629.

Поступила в редакцию 3/*VI*/2008;
в окончательном варианте — 3/*VI*/2008.

ON HARMONIC FUNCTIONS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH QUASIMODEL ENDS

© 2008 S.A. Korolkov, A.G. Losev,[3] E.A. Mazepa[4]

In the paper harmonic functions on Riemannian manifolds with quasimodel ends are considered. Conditions of existence and uniqueness some boundary problems based on spectral properties of these manifolds and also conditions of Liuville type theorems are obtained.

Keywords: *Riemannian manifold, quasimodel ends, harmonic function, spectral property.*

Paper received 3/*VI*/2008.
Paper accepted 3/*VI*/2008.

[3]Korolkov Sergei Alekseevich (sergei.korolkov@rambler.ru), Losev Alexander Georgievich (alexander.losev@volsu.ru), Dept. of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russia.

[4]Mazepa Elena Alekseevna (lmazepa@rambler.ru), Dept. of Fundamental Computer Science and Optimal Control, Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russia.