

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2008 А.И. Кожанов¹

В работе доказана разрешимость некоторых краевых задач для параболического уравнения с нелокальными условиями

$$\alpha_1(t)u(a, t) + \alpha_2(t)u(b, t) + \alpha_3(t)u_x(a, t) + \alpha_4(t)u_x(b, t) = 0,$$

$$\beta_1(t)u(a, t) + \beta_2(t)u(b, t) + \beta_3(t)u_x(a, t) + \beta_4(t)u_x(b, t) = 0.$$

Доказательство базируется на методе регуляризации и продолжении по параметру.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, параболическое уравнение, метод регуляризации, продолжении по параметру.

Введение

Пусть Ω есть конечный интервал (a, b) оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. В работе [1] методом Фурье была исследована разрешимость начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$u_t - u_{xx} + c(x)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (i)$$

с нелокальными краевыми условиями А.А. Самарского

$$\alpha_1 u(a, t) + \alpha_2 u(b, t) + \alpha_3 u_x(a, t) + \alpha_4 u_x(b, t) = 0, \quad (ii)$$

$$\beta_1 u(a, t) + \beta_2 u(b, t) + \beta_3 u_x(a, t) + \beta_4 u_x(b, t) = 0, \quad (iii)$$

$$\alpha_i, \quad \beta_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

В настоящей работе некоторые нелокальные задачи указанного вида будут исследованы в иных нежели в [1], случаях — в частности, коэффициенты в условиях (ii) и (iii) будут функциями, зависящими от переменной t ; даже в случае постоянства коэффициентов α_i и β_i мы не будем требовать

¹Кожанов Александр Иванович (kozhanov@math.nsc.ru), ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева., 630090, Россия, г.Новосибирск, пр.Коптюга, 4.

самосопряженности оператора $\mathcal{L}$, порожденного обыкновенным дифференциальным оператором $v'' - c(x)v$ с условиями (ii) и (iii); наконец, уравнение (i) будет заменено более общим уравнением.

Одним из условий разрешимости изученных в [1] задач было условие линейной независимости векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$; поскольку же линейная независимость указанных векторов эквивалентна отличию от нуля тех или иных миноров второго порядка, то получаем, что на самом деле вместо краевой задачи с общими условиями (ii) и (iii) достаточно рассмотреть некоторые конкретные реализации таких задач. Именно так мы и сделаем в настоящей работе.

Для простоты (точнее говоря, с целью упрощения выкладок) будем считать $a = 0$, $b = 1$ (общий случай сводится к такому линейным преобразованием переменной x).

1. Постановка задач

Пусть $a(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$, $u_0(x)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega} = [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

Краевая задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t - a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u_x(0, t) = \alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.3)$$

$$u_x(1, t) = \beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (1.4)$$

Краевая задача II: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (1.2), а также условия

$$u(0, t) = \alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T, \quad (1.5)$$

$$u(1, t) = \beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t), \quad 0 < t < T. \quad (1.6)$$

Уточним, что в рассматриваемых нами задачах предполагается, что функция $\alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)$ может обращаться в нуль (в том числе и тождественно) на отрезке $[0, T]$.

2. Разрешимость краевой задачи I

Пусть V_0 и V есть пространства:

$$V_0 = W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)),$$

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in V_0, \quad v_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)\};$$

нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$\|v\|_{V_0} = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))},$$

$$\|v\|_V = \|v\|_{V_0} + \|v_{xx}\|_{L_2(Q)}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} a(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, t) \in C^1(\overline{Q}), \quad a(x, t) \geq \bar{a}_0 > 0, \\ c(x, t) \geq \bar{c}_0 > 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \overline{Q}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\alpha_i(t) \in C^1([0, T]), \quad \beta_i(t) \in C^1([0, T]), \quad i = 1, 2; \quad (2.2)$$

$$|\beta_2(t) + \alpha_2(t)| \leq \delta_{10} < 2 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t)\xi_1^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)]\xi_1\xi_2 - \beta_2(t)\xi_2^2 \geq 0 \\ \text{при} \quad t \in [0, T], \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$f(x, t) \in L_2(Q), \quad f_t(x, t) \in L_2(Q). \quad (2.5)$$

Тогда существует единственная функция $u(x, t)$ из пространства V_0 , являющаяся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и принимающая условия (1.2)–(1.4).

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Для $\varepsilon > 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4$ положим

$$\begin{aligned} \gamma_1(x, t, \lambda) &= \frac{\lambda x^2}{2} [\beta_1(t) - \alpha_1(t)] + \lambda x \alpha_1(t), \\ \delta_1(x, t, \lambda) &= \frac{\lambda x^2}{2} [\beta_2(t) - \alpha_2(t)] + \lambda x \alpha_2(t), \\ \gamma_{11}(x, t, \lambda) &= \gamma_1(x, t, \lambda) + \frac{\delta_1(x, t, \lambda) \gamma_1(1, t, \lambda)}{1 - \delta_1(1, t, \lambda)}, \\ \delta_{11}(x, t, \lambda) &= \frac{\delta_1(x, t, \lambda)}{1 - \delta_1(1, t, \lambda)}, \\ A_{0,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) &= -\gamma_{11t}(x, t, \lambda) + a(x, t) \gamma_{11xx}(x, t, \lambda) - c(x, t) \gamma_{11}(x, t, \lambda) + \\ &\quad + \varepsilon \gamma_{11xx}(x, t, \lambda), \\ B_{0,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) &= -\delta_{11t}(x, t, \lambda) + a(x, t) \delta_{11xx}(x, t, \lambda) - c(x, t) \delta_{11}(x, t, \lambda) + \\ &\quad + \varepsilon \delta_{11xx}(x, t, \lambda), \\ A_{1,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) &= \varepsilon \gamma_{11xx}(x, t, \lambda) - \gamma_{11}(x, t, \lambda), \\ B_{1,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) &= \varepsilon \delta_{11xx}(x, t, \lambda) - \delta_{11}(x, t, \lambda), \\ \Phi_1(x, t, \lambda, \varepsilon, \xi) &= A_{1,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) \xi_1 + B_{1,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) \xi_2 + \\ &\quad + A_{0,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) \xi_3 + B_{0,1}(x, t, \lambda, \varepsilon) \xi_4. \end{aligned}$$

Обозначим $\overline{w} = (w_t(0, t), w_t(1, t), w(0, t), w(1, t))$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_t - aw_{xx} + cw - \varepsilon w_{xt} = f + \Phi_1(x, t, \lambda, \varepsilon, \overline{w}) \quad (2.6)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (2.8)$$

Покажем, что при фиксированном ε , при выполнении условий (2.1) – (2.4), а также условия

$$f(x, t) \in L_2(Q) \quad (2.5')$$

данная краевая задача имеет решение, принадлежащее пространству V .

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача (2.6)–(2.8) при фиксированном положительном ε , при выполнении условий (2.1)–(2.4), (2.5') имеет решение $w(x, t)$, принадлежащее пространству V . Если мы покажем, что множество Λ не пусто, открыто и замкнуто, то оно, как известно, будет совпадать со всем отрезком $[0, 1]$.

При $\lambda = 0$ краевая задача (2.6)–(2.8) при выполнении условий (2.1)–(2.4), (2.5') разрешима в пространстве V — см. [2]. Из этого следует, что число 0 принадлежит множеству V и тем самым — что множество Λ не пусто.

Открытость и замкнутость множества Λ доказывается с помощью априорных оценок. Установим их наличие.

Пусть $w(x, t)$ есть решение краевой задачи (2.6)–(2.8), принадлежащее пространству V . Положим

$$u(x, t) = w(x, t) + \gamma_{11}(x, t, \lambda)w(0, t) + \delta_{11}(x, t, \lambda)w(1, t).$$

Используя элементарное неравенство

$$\int_0^t [v^2(0, \tau) + v^2(1, \tau)] d\tau \leq \delta \int_0^t \int_{\Omega} v_x^2(x, \tau) dx d\tau + C(\delta) \int_0^t \int_{\Omega} v^2(x, \tau) d\tau, \quad (2.9)$$

в котором δ есть произвольное положительное число, нетрудно показать, что функция $u(x, t)$ будет принадлежать пространству V . Далее, несложные выкладки показывают, что функция $u(x, t)$ представляет собой решение краевой задачи

$$\begin{aligned} u_t - au_{xx} + cu - \varepsilon u_{xxt} &= f(x, t), \\ u_x(0, t) &= \lambda[\alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t)], \\ u_x(1, t) &= \lambda[\beta_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t)], \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} (u_{\tau} - au_{xx} + cu - \varepsilon u_{xxt})(u_{\tau} - u_{xxt}) dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f(u_{\tau} - u_{xxt}) dx d\tau. \quad (2.10)$$

Интегрируя по частям и используя указанные выше граничные и начальные условия для функции $u(x, t)$, нетрудно от данного равенства перейти к следующему

$$\int_0^t \int_{\Omega} [u_{\tau}^2 + (1 + \varepsilon)u_{x\tau}^2 + \varepsilon u_{xxt}^2] dx d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, t)u_{xx}^2(x, t) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [a(x, t) + c(x, t)] u_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, t) u^2(x, t) dx + \\
& + \lambda(1 + \varepsilon) \int_0^t \{ \alpha_1(\tau) u_\tau^2(0, \tau) + [\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)] u_\tau(0, \tau) u_\tau(1, \tau) - \beta_2(\tau) u_\tau^2(1, \tau) \} d\tau = \\
& = \int_0^t \int_{\Omega} \{ \frac{1}{2} [a_\tau u_{xx}^2 + (a_\tau + c_\tau) u_x^2 + c_\tau u^2] - a_x u_x u_\tau - c_x u u_{x\tau} \} dx d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} f u_{x\tau} dx d\tau + \lambda \int_0^t \{ a(1, \tau) u_\tau(1, \tau) [\beta_1(\tau) u(0, \tau) + \\
& + \beta_2(\tau) u(1, \tau)] - a(0, \tau) u_\tau(0, \tau) [\alpha_1(\tau) u(0, \tau) + \alpha_2(\tau) u(1, \tau)] + \\
& + (1 + \varepsilon) [\beta_1'(\tau) u_\tau(1, \tau) u(0, \tau) + \beta_2'(\tau) u_\tau(1, \tau) u(1, \tau) - \\
& - \alpha_1'(\tau) u_\tau(0, \tau) u(0, \tau) - \alpha_2'(\tau) u_\tau(0, \tau) u(1, \tau)] + \\
& + c(1, \tau) u(1, \tau) [\beta_1(\tau) u_\tau(0, \tau) + \beta_2(\tau) u_\tau(1, \tau) + \beta_1'(\tau) u(0, \tau) + \beta_2'(\tau) u(1, \tau)] - \\
& - c(0, \tau) u(0, \tau) [\alpha_1(\tau) u_\tau(0, \tau) + \alpha_2(\tau) u_\tau(1, \tau) + \alpha_1'(\tau) u(0, \tau) + \alpha_2'(\tau) u(1, \tau)] \} d\tau.
\end{aligned}$$

Используя условия (2.1), (2.2) и (2.4), применяя неравенство Юнга и неравенство (2.9), используя, наконец, лемму Гронуолла, получаем, что следствием равенства (2.10) будет априорная оценка

$$\|u\|_V \leq C_0 \|f\|_{L_2(Q)}, \quad (2.11)$$

с постоянной C_0 , определяющейся функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$, а также числами T и ε .

Покажем, что из оценки (2.11) следует замкнутость множества Λ .

Пусть $\{\lambda_n\}$ есть последовательность точек множества Λ , сходящаяся к числу λ_0 , $\{w_n(x, t)\}$ — последовательность решений из пространства V краевой задачи (2.6) — (2.6) с $\lambda = \lambda_n$, $u_n(x, t)$ есть функции

$$u_n(x, t) = w_n(x, t) + \gamma_{11}(x, t, \lambda_n) w_n(0, t) + \delta_{11}(x, t, \lambda_n) w_n(1, t).$$

Положим $v_{nk}(x, t) = u_n(x, t) - u_k(x, t)$. Для функций $v_{nk}(x, t)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
v_{nk} - a v_{nkxx} + c v_{nk} - \varepsilon v_{nkxt} &= 0, \\
v_{nkx}(0, t) &= \lambda_k [\alpha_1(t) v_{nk}(0, t) + \alpha_2(t) v_{nk}(1, t)] + \\
&+ (\lambda_n - \lambda_k) [\alpha_1(t) u_n(0, t) + \alpha_2(t) u_n(1, t)], \\
v_{nkx}(1, t) &= \lambda_k [\beta_1(t) v_{nk}(0, t) + \beta_2(t) v_{nk}(1, t)] + \\
&+ (\lambda_n - \lambda_k) [\beta_1(t) u_n(0, t) + \beta_2(t) u_n(1, t)], \\
v_{nk}(x, 0) &= 0.
\end{aligned}$$

Повторяя для функций $v_{nk}(x, t)$ доказательство оценки (2.11) и при этом используя тот факт, что для самих функций $u_n(x, t)$ оценка (2.11) выполняется, нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$\|v_{nk}\|_V \leq C_1 |\lambda_n - \lambda_k|,$$

постоянная C_1 в котором определяется функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ и $f(x, t)$, а также числами T и ε . Из этого неравенства следует, что последовательность $\{u_n(x, t)\}$ фундаментальна в пространстве V . Фундаментальность, в свою очередь, означает, что существует функция $u_0(x, t)$ такая, что $u_0(x, t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))$, $u_{0xx}(x, t) \in L_2(Q)$ и при этом функции $u_0(x, t)$ и $u_{0xx}(x, t)$ являются пределами в соответствующих пространствах последовательностей $\{u_n(x, t)\}$ и $\{u_{nxx}(x, t)\}$. Очевидно, что функция $u_0(x, t)$ будет решением краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{0t} - au_{0xx} + cu_0 - \varepsilon u_{0xx} &= f, \\ u_{0x}(0, t) &= \lambda_0[\alpha_1(t)u_0(0, t) + \alpha_2(t)u_0(1, t)], \\ u_{0x}(1, t) &= \lambda_0[\beta_1(t)u_0(0, t) + \beta_2(t)u_0(1, t)], \\ u_0(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Положим $w_0(x, t) = u_0(x, t) + \gamma_1(x, t, \lambda_0)u_0(0, t) + \delta_1(x, t, \lambda_0)u_0(1, t)$. Очевидно, что функция $w_0(x, t)$ принадлежит пространству V и что она является решением краевой задачи (2.6)–(2.8), соответствующей значению λ , равному λ_0 . А это и означает, что λ_0 есть точка множества Λ . Принадлежность предельной точки множества ему же и означает его замкнутость.

Докажем теперь, что множество Λ открыто. Пусть λ_0 есть точка множества Λ , $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$. Покажем, что при малых $|\tilde{\lambda}|$ число λ также будет принадлежать множеству Λ .

Положим

$$\tilde{\Phi}_1(x, t, \lambda, \varepsilon, \xi) = \Phi_1(x, t, \lambda, \varepsilon, \xi) - \Phi_1(x, t, \lambda_0, \varepsilon, \xi).$$

Пусть $v(x, t)$ есть функция из пространства V . Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L_\varepsilon w = f + \Phi_1(x, t, \lambda_0, \varepsilon, \bar{w}) + \tilde{\Phi}_1(x, t, \lambda, \varepsilon, \bar{v}) \quad (2.12)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.7) и (2.8). Имеет место неравенство

$$\|\tilde{\Phi}_1(x, t, \lambda, \varepsilon, \bar{v})\|_{L_2(Q)} \leq M|\tilde{\lambda}|\|v\|_V \quad (2.13)$$

с постоянной M , определяющейся лишь функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ (доказательство этого неравенства нетрудно провести, используя условие (2.3), теорему о конечных приращениях и неравенство (2.9)). Из этого неравенства и из предположения о принадлежности числа λ_0 множеству Λ вытекает, что краевая задача (2.12), (2.7), (2.8) имеет решение $w(x, t)$, принадлежащее пространству V . Следовательно, краевая задача (2.12), (2.7), (2.8) порождает оператор G , переводящий пространство V в себя: $G(v) = w$. Повторяя для данной краевой задачи в случае $f(x, t) \equiv 0$ доказательство оценки (2.11) и учитывая неравенство (2.13), получим, что при выполнении условия $C_0 M |\tilde{\lambda}| < 1$ оператор G будет сжимающим. Неподвижная точка оператора G , очевидно, даст решение уравнения

$$L_\varepsilon w = f + \Phi(x, t, \lambda, \varepsilon, \bar{w});$$

Следовательно, число λ при малых $|\tilde{\lambda}|$ (именно, при выполнении указанного выше неравенства $C_0 M |\tilde{\lambda}| < 1$) будет принадлежать множеству Λ . А это и означает, что множество Λ открыто.

Итак, определенное выше множество Λ не пусто, открыто и замкнуто. Значит, оно совпадает со всем отрезком $[0, 1]$. Другими словами, краевая задача (2.6) – (2.8) при фиксированном ε и при выполнении условий (2.1) – (2.4), (2.5') имеет решение $w^\varepsilon(x, t)$, принадлежащее пространству V , при всех значениях λ , в том числе и при $\lambda = 1$.

Положим $u^\varepsilon(x, t) = w^\varepsilon(x, t) + \gamma_{11}(x, t, 1)w^\varepsilon(0, t) + \delta_{11}(x, t, 1)w^\varepsilon(1, t)$.

Пусть для функции $f(x, t)$ выполняется условие (2.5). Вернемся к равенству (2.10). Положим в этом равенстве $\lambda = 1$ и в слагаемом правой части, представляющем собой интеграл от функции $f u_{x\tau}^\varepsilon$, выполним интегрирование по частям по переменной τ . Применяя к возникшим интегралам неравенство Юнга, повторяя все остальные выкладки, сделанные ранее при анализе равенства (2.10), придем к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} (u_\tau^{\varepsilon^2} + u_{x\tau}^{\varepsilon^2}) dx d\tau + \int_{\Omega} [u^{\varepsilon^2}(x, t) + u_x^{\varepsilon^2}(x, t) + u_{xx}^{\varepsilon^2}(x, t)] dx + \\ & + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} u_{x\tau\tau}^{\varepsilon^2} dx d\tau \leq C \left[\int_0^t \int_{\Omega} (u^{\varepsilon^2} + u_x^{\varepsilon^2} + u_{xx}^{\varepsilon^2}) dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (f^2 + f_t^2) dx dt \right], \end{aligned}$$

постоянная C в котором определяется лишь функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$. Используя далее лемму Гронуолла, получим априорную оценку

$$\|u^\varepsilon\|_{V_0} + \sqrt{\varepsilon} \|u_{x\tau}^\varepsilon\|_{L_2(Q)} \leq K (\|f\|_{L_2(Q)} + \|f_t\|_{L_2(Q)}), \quad (2.14)$$

постоянная K в которой определяется лишь функциями $a(x, t)$, $c(x, t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$, а также числом T . Из этой оценки следует, что существует последовательность $\{u^{\varepsilon_n}(x, t)\}$, сходящаяся при $n \rightarrow \infty$ к функции $u(x, t)$, являющейся решением краевой задачи (1.1)–(1.4), принадлежащей пространству V_0 .

Единственность решений краевой задачи (1.1)–(1.4) в пространстве V_0 следует из оценки (2.14), справедливой и при $\varepsilon = 0$.

Теорема полностью доказана.

3. Разрешимость краевой задачи II

Введем некоторые обозначения. Именно, для $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $\lambda \in [0, 1]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\gamma_2(x, t, \lambda) = \lambda x [\beta_1(t) - \alpha_1(t)] + \alpha_1(t),$$

$$\delta_2(x, t, \lambda) = \lambda x [\beta_2(t) - \alpha_2(t)] + \alpha_2(t),$$

$$\Delta(t, \lambda) = \{1 - \lambda[\beta_1(t) - \alpha_1(t)]\} \{1 - \lambda[\beta_2(t) - \alpha_2(t)]\} - \lambda^2 [\beta_1(t) - \alpha_1(t)] [\beta_2(t) - \alpha_2(t)],$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{21}(x, t, \lambda) &= \frac{1}{\Delta(t, \lambda)} \{ \gamma_2(x, t, \lambda) [1 - \lambda \beta_2(t) + \lambda \alpha_2(t)] + \lambda \delta_2(x, t, \lambda) [\beta_1(t) - \alpha_1(t)] \}, \\
\delta_{21}(x, t, \lambda) &= \frac{1}{\Delta(t, \lambda)} \{ \lambda \gamma_2(x, t, \lambda) [\beta_2(t) - \alpha_2(t)] + \delta_2(x, t, \lambda) [1 - \lambda \beta_1(t) + \alpha_1(t)] \}, \\
A_{0,2}(x, t, \lambda) &= -\gamma_{21t}(x, t, \lambda) - c(x, t) \gamma_{21}(x, t, \lambda), \\
B_{0,2}(x, t, \lambda) &= -\delta_{21t}(x, t, \lambda) - c(x, t) \delta_{21}(x, t, \lambda), \\
A_{1,2}(x, t, \lambda) &= -\gamma_{21}(x, t, \lambda), \quad B_{1,2}(x, t, \lambda) = -\delta_{21}(x, t, \lambda), \\
\Phi_2(x, t, \lambda, \xi) &= A_{1,2}(x, t, \lambda) \xi_1 + B_{1,2}(x, t, \lambda) \xi_2 + A_{0,2}(x, t, \lambda) \xi_3 + B_{0,2}(x, t, \lambda) \xi_4, \\
F(x, \xi) &= \alpha_1(t) \xi_1^2 + [\alpha_2(t) - \beta_1(t)] \xi_1 \xi_2 - \beta_2(t) \xi_2^2 + \\
&\quad + \alpha'_1(t) \xi_1 \xi_3 + \alpha'_2(t) \xi_1 \xi_4 - \beta'_1(t) \xi_2 \xi_3 - \beta'_2(t) \xi_2 \xi_4.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия (2.1), (2.2) и (2.5), а также условия

$$\Delta(t, \lambda) \geq \delta_{20} > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T], \quad \lambda \in [0, 1]; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t F(\tau, h'_1(\tau), h'_2(\tau)) d\tau &= H(t) + \int_0^t F_0(\tau, h'_1(\tau), h'_2(\tau), h_1(\tau), h_2(\tau)) d\tau + \\
&+ \int_0^t F_1(\tau, h_1(\tau), h_2(\tau)) d\tau, \quad H(t) \geq 0, \quad F_0(t, h'_1(t), h'_2(t), h_1(t), h_2(t)) \geq 0, \\
|F_1(t, h_1(t), h_2(t))| &\leq k_0 [h_1^2(t) + h_2^2(t)], \quad k_0 \geq 0, \quad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

$h_i(t)$, $i = 1, 2$ — произвольные функции из пространства $W_2^1([0, T])$. (3.2)
Тогда существует единственная функция из пространства V_0 , являющаяся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и принимающая условия (1.2), (1.5) и (1.6).

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $w(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$w_t - aw_{xx} + cw - \varepsilon w_{xt} = f + \Phi_2(x, t, \lambda, w_{xt}(0, t), w_{xt}(1, t), w_x(0, t), w_x(1, t)) \quad (3.3)$$

и такую, что для нее выполняется условие (2.7), а также условия

$$w(0, t) = w(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3.4)$$

Покажем, что при фиксированном ε и при выполнении условий (2.1), (2.2), (2.5'), (3.1) и (3.2) эта задача имеет решение, принадлежащее пространству V .

Определим множество Λ так же, как определяли его при доказательстве теоремы 1. Это множество не пусто, поскольку число 0 ему принадлежит — см. [2]. Установим, что множество Λ открыто и замкнуто.

Пусть $w(x, t)$ есть решение краевой задачи (3.3), (2.7), (3.4). Положим

$$u(x, t) = w(x, t) + \gamma_{21}(x, t, \lambda) w_x(0, t) + \delta_{21}(x, t, \lambda) w_x(1, t).$$

Эта функция принадлежит пространству V (что вновь следует из неравенства (2.9)) и является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} u_t - au_{xx} + cu - \varepsilon u_{xt} &= f, \\ u(0, t) &= \lambda[\alpha_1(t)u_x(0, t) + \alpha_2(t)u_x(1, t)], \\ u(1, t) &= \lambda[\beta_1(t)u_x(0, t) + \beta_2(t)u_x(1, t)], \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Вновь рассмотрим равенство (2.10). Интегрируя по частям, используя граничные и начальные условия для функции $u(x, t)$, условия (3.1) и (3.2), неравенство (2.9), а также применяя лемму Гронуолла, получаем, что для функции $u(x, t)$ будет выполняться оценка (2.11). Из этой оценки и следует открытость и замкнутость множества Λ (детали см. доказательство теоремы 1).

Из непустоты, открытости и замкнутости множества Λ следует, что краевая задача (3.3), (2.7), (3.4) разрешима при всех λ из отрезка $[0, 1]$, в том числе и при $\lambda = 1$. Повторяя рассуждения о предельном переходе по параметру регуляризации, проведенные при завершении доказательства теоремы 1, получаем, что при выполнении всех условий теоремы 2 краевая задача II будет иметь решение, принадлежащее требуемому классу.

Единственность решений очевидна.

Теорема доказана.

Дополнение

1. Помимо теорем о разрешимости нелокальных краевых задач I и II, фактически в работе получены теоремы о разрешимости аналогичных задач для уравнений, называемых псевдопараболическими [2] или же уравнениями Аллера [3] — именно, для уравнений

$$u_t - a(x, t)u_{xx} + c(x, t)u - u_{xt} = f(x, t).$$

Соответствующие теоремы отличаются от теорем 1 и 2 лишь тем, что в них условие $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ отсутствует.

2. Помимо теорем о разрешимости нелокальных краевых задач I и II для параболических или же псевдопараболических уравнений, в работе фактически получены теоремы о разрешимости первой или же второй начально — краевых задач для так называемых "нагруженных" [4, 5] уравнений с правой частью $f(x, t) + \Phi(x, t, w_{xt}(0, t), w_{xt}(1, t), w_t(0, t), w_t(1, t))$ для первой начально — краевой задачи или же $f(x, t) + \Phi(x, t, w_t(0, t), w_t(1, t), w(0, t), w(1, t))$ для второй начально — краевой задачи с функцией Φ , являющейся линейной формой по последним четырем аргументам.

Литература

- [1] Lafetic, N.L. On classical solutions of mixed boundary problems for one dimensional parabolic equation of second order / N.L. Lafetic // Publ. de l'Institut mathematique. – Nouvelle serie. – V. 67(81). – 2000. – P. 53–75.
- [2] Якубов, С.Я. Линейные дифференциально–операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм., 1985.
- [3] Нахушев, А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев. – М.: Наука, 2006.
- [4] Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высшая школа, 1995.
- [5] Дженалиев, М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев. – Алматы: Ин-т теоретич. и прикл. матем., 1995.

Поступила в редакцию 16/VI/2008;
в окончательном варианте — 16/VI/2008.

ON SOLVABILITY OF CERTAIN SPATIALLY NONLOCAL BOUNDARY PROBLEMS FOR LINEAR PARABOLIC EQUATIONS

© 2008 A.I. Kozhanov²

In this work, the solvability of certain problems for parabolic equation with nonlocal conditions

$$\alpha_1(t)u(a, t) + \alpha_2(t)u(b, t) + \alpha_3(t)u_x(a, t) + \alpha_4(t)u_x(b, t) = 0,$$

$$\beta_1(t)u(a, t) + \beta_2(t)u(b, t) + \beta_3(t)u_x(a, t) + \beta_4(t)u_x(b, t) = 0.$$

is proved. The proof is mainly based on the regularization method and the method of continuation with respect to a parameter.

Keywords: *nonlocal conditions problem, parabolic equation, regularization method, continuation with respect to a parameter.*

Paper received 16/VI/2008.

Paper accepted 16/VI/2008.

²Kozhanov Alexander Ivanovich (kozhanov@math.nsc.ru), Sobolev Institute of Mathematics, 630090, Novosibirsk, Russia