УДК 517.518.1, 517.987.1

ТЕОРЕМА ВИТАЛИ–АРЕШКИНА ДЛЯ ДИАГОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МЕР[1]

© 2008 Д. Э. Клепнев[2]

В теореме Г.Я. Арешкина о предельном переходе под знаком интеграла Лебега требуется поточечная сходимость последовательности подынтегральных функций. В настоящей работе рассмотрен случай, когда последовательность интегрирующих мер является слабо диагональной. В этом случае поточечная сходимость последовательности подынтегральных функций может быть заменена более слабой сходимостью относительно последовательности интегрирующих мер.

Ключевые слова: *предельный переход, диагональная последовательность мер, равностепенная абсолютная непрерывность.*

1. Предварительные сведения

Везде далее $\mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра с единицей X; рассматриваемые меры определены на $\mathcal{F}$, принимают неотрицательные действительные значения, σ-аддитивны; функции точки определены на X, принимают действительные значения, $\mathcal{F}$-измеримы.

В настоящей работе неоднократно используется следующее утверждение.

Теорема (Никодим). Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра с единицей X, $\{\mu_k\}_k$ — последовательность конечных неотрицательных σ-аддитивных мер на $\mathcal{F}$, причем для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ последовательность $\{\mu_k E\}_k$ сходится к конечному пределу μE. Тогда $\mu: \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ — σ-аддитивная мера.

В работе [1] Г. Я. Арешкин доказал следующую теорему[3], являющуюся обобщением классической теоремы Витали о предельном переходе под

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

[2]Клепнев Дмитрий Эдуардович (`dekl@ssu.samara.ru`), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[3]В этой работе Г. Я. Арешкин доказал более трудную достаточную часть. Необходимое условие было получено позже В. Н. Алексюком в работе [2].

знаком интеграла Лебега на случай, когда меняется не только подынтегральная функция, но и интегрирующая мера.

Определение 1.1. Говорят, что последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\,d\mu_k\right\}_k$ равностепенно абсолютно непрерывна относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ и для всякого k из условия $\mu_k E < \delta$ следует $\left|\int_E f_k\,d\mu_k\right| < \varepsilon$.

Теорема (Витали, Арешкин). Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра с единицей X, $\{\mu_k\}_k$ — последовательность конечных неотрицательных σ-аддитивных мер на $\mathcal{F}$, причем для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ последовательность $\{\mu_k E\}_k$ сходится к конечному пределу μE. Пусть $\{f_k\}_k$ — последовательность конечных функций, определенных на X, причем для любого k функция f_k μ_k-интегрируема, и для всякого $x \in X$ последовательность $\{f_k(x)\}_k$ сходится к конечному пределу $f(x)$.

Тогда для того чтобы функция f была μ-интегрируемой и для любого множества $E \in \mathcal{F}$ выполнялось равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\,d\mu_k = \int_E f\,d\mu,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\,d\mu_k\right\}_k$ была равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$.

В теореме Витали–Арешкина, в отличие от классических теорем о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, на последовательность подынтегральных функций накладывается необычно сильное условие сходимости всюду на X. В настоящей работе показано, что в случае, когда последовательность интегрирующих мер $\{\mu_k\}_k$ слабо диагональна [3], сходимость всюду может быть заменена более слабой сходимостью последовательности подынтегральных функций $\{f_k\}_k$ относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$.

Приведем соответствующие определения.

Определение 1.2. Последовательность мер $\{\mu_k\}_k$ называется слабо диагональной, если каждая ее подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}_k$ обладает следующим свойством: для всякой последовательности множеств $\{E_k\}_k \subset \mathcal{F}$ такой, что

$$\lim_{k\to\infty}\mu_{n_k}E_k = 0,$$

существует такое натуральное m, что

$$\lim_{k\to\infty}\mu_{n_m}E_k = 0.$$

Простейшим примером слабо диагональной последовательности мер является последовательность, не убывающая на каждом множестве. Другие примеры можно найти в работе [3].

Определение 1.3. [4] Будем говорить, что последовательность функций $\{f_k\}_k$ сходится к функции f относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$, если для любого $\delta > 0$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \delta\} = 0.$$

2. Основные результаты

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра с единицей X, $\{\mu_k\}_k$ — слабо диагональная последовательность конечных неотрицательных σ-аддитивных мер на $\mathcal{F}$, причем для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ последовательность $\{\mu_k E\}_k$ сходится к конечному пределу μE. Пусть $\{f_k\}_k$ — последовательность конечных функций, определенных на X, причем для любого k функция f_k μ_k-интегрируема. Пусть последовательность $\{f_k\}_k$ сходится к конечной функции f относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$.

Тогда для того чтобы функция f была μ-интегрируемой и для любого множества $E \in \mathcal{F}$ выполнялось равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu_k = \int_E f\, d\mu,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\, d\mu_k\right\}_k$ была равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм, в которых, не оговаривая этого каждый раз заново, предполагаем выполненными следующие из условий теоремы 2.1: для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ последовательность $\{\mu_k E\}_k$ сходится к конечному пределу μE; для любого k функция f_k μ_k-интегрируема.

Лемма 2.2. Пусть для всякого натурального i последовательность $\{f_k\}_k$ сходится к функции f почти всюду относительно меры μ_i. Тогда для того чтобы функция f была μ-интегрируемой и для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ выполнялось

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu_k = \int_E f\, d\mu, \tag{2.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\, d\mu_k\right\}_k$ была равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$.

Доказательство. В силу условия леммы существуют непересекающиеся множества $X_0, X_1 \in \mathcal{F}$ такие, что $X = X_0 \cup X_1$, для всякого натурального k $\mu_k X_0 = 0$, последовательность $\{f_k\}_k$ сходится к функции f всюду на множестве X_1. Также имеем

$$\mu X_0 = \lim_{k\to\infty} \mu_k X_0 = 0. \tag{2.2}$$

Рассмотрим σ-алгебры $\mathcal{F}_0 = \{X_0 \cap E : E \in \mathcal{F}\}$ и $\mathcal{F}_1 = \{X_1 \cap E : E \in \mathcal{F}\}$.

Необходимость. Для всякого натурального k и для всякого множества $E \in \mathcal{F}_0$ имеем

$$\int_E f_k \, d\mu_k = 0,$$

откуда следует равностепенная абсолютная непрерывность последовательности неопределенных интегралов $\left\{\int f_k \, d\mu_k\right\}_k$ относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$ на пространстве $(X_0, \mathcal{F}_0)$.

Условие (2.1) тем более выполняется для всякого множества $E \in \mathcal{F}_1$. В силу теоремы Витали–Арешкина отсюда следует равностепенная абсолютная непрерывность последовательности неопределенных интегралов $\left\{\int f_k \, d\mu_k\right\}_k$ относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$ на пространстве $(X_1, \mathcal{F}_1)$.

Из равностепенной абсолютной непрерывности последовательности неопределенных интегралов $\left\{\int f_k \, d\mu_k\right\}_k$ относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$ на пространствах $(X_0, \mathcal{F}_0)$ и $(X_1, \mathcal{F}_1)$, очевидно, следует равностепенная абсолютная непрерывность на пространстве $(X, \mathcal{F})$.

Достаточность. В силу условия (2.2) функция f μ-интегрируема на подпространстве $(X_0, \mathcal{F}_0)$. Для всякого множества $E \in \mathcal{F}_0$ и всякого натурального k имеем

$$\int_E f_k \, d\mu_k = \int_E f \, d\mu = 0. \tag{2.3}$$

В силу равностепенной абсолютной непрерывности последовательности неопределенных интегралов $\left\{\int f_k \, d\mu_k\right\}_k$ относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$ на пространстве $(X, \mathcal{F})$ тем более имеем равностепенную абсолютную непрерывность на подпространстве $(X_1, \mathcal{F}_1)$. Тогда в силу теоремы Витали–Арешкина функция f μ-интегрируема на пространстве $(X_1, \mathcal{F}_1)$ и в силу условия (2.3) для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \, d\mu_k = \lim_{k\to\infty} \int_{E\cap X_1} f_k \, d\mu_k = \int_{E\cap X_1} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть для всякого натурального i последовательность $\{f_k\}_k$ сходится к функции f по мере μ_i. Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_k$, что для всякого натурального i она сходится к функции f почти всюду относительно меры μ_i.

Доказательство. Положим $p_k^0 = k$ для всякого натурального k. В силу теоремы Рисса из последовательности функций $\{f_{p_k^0}\}_k$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{p_k^1}\}_k$, которая сходится к функции f почти всюду относительно меры μ_1.

Пусть q — некоторое натуральное число и пусть уже построены последовательности функций $\{f_{p_k^0}\}_k, \{f_{p_k^1}\}_k, \ldots, \{f_{p_k^q}\}_k$ такие, что для каждого $m \in \{1, \ldots, q\}$ последовательность $\{f_{p_k^m}\}_k$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_{p_k^{m-1}}\}_k$, и последовательность $\{f_{p_k^m}\}_k$ сходится к функции f почти всюду относительно меры μ_m. Так как по условию леммы последовательность $\{f_{p_k^m}\}_k$ сходится к функции f по мере μ_{m+1}, в силу теоремы Рисса из нее можно выделить подпоследовательность $\{f_{p_k^{m+1}}\}_k$, которая сходится к функции f почти всюду относительно меры μ_{m+1}.

Получаем построенные по индукции последовательности функций $\{f_{p_k^0}\}_k, \{f_{p_k^1}\}_k, \dots, \{f_{p_k^m}\}_k, \dots$ такие, что для каждого натурального i последовательность $\{f_{p_k^m}\}_k$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_{p_k^{m-1}}\}_k$, и последовательность $\{f_{p_k^m}\}_k$ сходится к функции f почти всюду относительно меры μ_i.

Для каждого натурального k положим $n_k = p_k^k$. Ясно, что последовательность функций $\{f_{n_k}\}_k$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_k\}_k$, и для всякого натурального m она сходится почти всюду относительно меры μ_m. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть из произвольной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{m_k\}_k$ можно выделить подпоследовательность $\{m'_k\}_k$ такую, что последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_{m'_k}\,d\mu_{m'_k}\right\}_k$ является равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_{m'_k}\}_k$. Тогда последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\,d\mu_k\right\}_k$ является равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$.

Доказательство. Предположим противное, что последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\,d\mu_k\right\}_k$ не является равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$, последовательность множеств $\{E_k\}_k \subset \mathcal{F}$ и последовательность натуральных чисел $\{p_k\}_k$ такие, что для любого натурального k выполняется

$$\mu_{p_k} E_k < \frac{1}{k}; \qquad \left|\int_{E_k} f_{p_k}\,d\mu_{p_k}\right| \geqslant \varepsilon. \tag{2.4}$$

Предположим, что последовательность $\{p_k\}_k$ не содержит возрастающей подпоследовательности. Тогда существуют натуральное n и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{q_k\}_k$ такие, что для любого натурального k выполняется $p_{q_k} = n$. Тогда из условия (2.4) получаем, что для всякого натурального k выполнено

$$\mu_n E_{q_k} = \mu_{p_{q_k}} E_{q_k} < \frac{1}{q_k} \leqslant \frac{1}{k}; \qquad \left|\int_{E_{q_k}} f_n\,d\mu_n\right| = \left|\int_{E_{q_k}} f_{p_{q_k}}\,d\mu_{p_{q_k}}\right| \geqslant \varepsilon.$$

Это противоречит абсолютной непрерывности неопределенного интеграла $\int f_n\,d\mu_n$.

Таким образом, существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{q_k\}_k$, что последовательность $\{p_{q_k}\}_k$ также является возрастающей. Для каждого натурального k положим $m_k = p_{q_k}$. В силу условия (2.4) для всякого натурального k выполняется

$$\mu_{m_k} E_{q_k} = \mu_{p_{q_k}} E_{q_k} < \frac{1}{q_k} \leqslant \frac{1}{k}; \quad \left| \int_{E_{q_k}} f_{m_k}\, d\mu_{m_k} \right| = \left| \int_{E_{q_k}} f_{p_{q_k}}\, d\mu_{p_{q_k}} \right| \geqslant \varepsilon.$$

Следовательно, из возрастающей последовательности $\{m_k\}_k$ невозможно выбрать подпоследовательность $\{m'_k\}_k$ так, чтобы последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_{m'_k}\, d\mu_{m'_k}\right\}_k$ была равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_{m'_k}\}_k$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Пусть слабо диагональная последовательность мер $\{\mu_i\}_i$ и семейство множеств $\{E_j^k\}_{j,k} \subset \mathcal{F}$ таковы, что для всякого натурального k выполнено

$$\lim_{j\to\infty} \mu_j E_j^k = 0. \tag{2.5}$$

Для каждого натурального k положим

$$I_k = \left\{ i \in \mathbb{N} : \lim_{j\to\infty} \mu_i E_j^k = 0 \right\}.$$

Также положим

$$I_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Тогда множество I_0 бесконечное.

Доказательство. Предположим противное и выведем противоречие со слабой диагональностью последовательности мер $\{\mu_i\}_i$.

Пусть множество I_0 — конечное. Положим $p_1 = 1$, если $I_0 = \varnothing$, в противном случае $p_1 = \max I_0 + 1$. Тогда для всякого натурального $i \geqslant p_1$ существует натуральное m_i такое, что

$$\limsup_{j\to\infty} \mu_i E_j^{m_i} > 0.$$

Возьмем ε_i таким, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \varepsilon_i < \limsup_{j\to\infty} \mu_i E_j^{m_i}.$$

Рассмотрим последовательность натуральных чисел

$$\{n_k\}_k = (\underline{1}, \underline{1,2}, \underline{1,2,3}, \underline{1,2,3,4}, \ldots),$$

обладающую, очевидно, следующими свойствами: (1) всякое натуральное q встречается в последовательности $\{n_k\}_k$ бесконечно много раз; (2) для всякого натурального k имеем $1 \leqslant n_k \leqslant k$.

Значение p_1 уже выбрано. Так как $n_1 = 1$, значение p_{n_1} тем самым также уже определено. Поскольку

$$\limsup_{j\to\infty} \mu_{p_{n_1}} E_j^{m_{p_{n_1}}} > \varepsilon_{p_{n_1}}$$

и
$$\lim_{j\to\infty}\mu_j E_j^{m_{p_{n_1}}}=0,$$
существует такое натуральное $p_2>p_1$, что
$$\mu_{p_{n_1}}E_{p_2}^{m_{p_{n_1}}}>\varepsilon_{p_{n_1}}$$
и
$$\mu_{p_2}E_{p_2}^{m_{p_{n_1}}}<1.$$

Пусть N — некоторое натуральное число и уже построены натуральные числа
$$p_1<p_2<\ldots<p_N<p_{N+1}$$
такие, что для всякого $k\in\{1,2,\ldots,N\}$ выполнено
$$\mu_{p_{n_k}}E_{p_{k+1}}^{m_{p_{n_k}}}>\varepsilon_{p_{n_k}} \tag{2.6}$$
и
$$\mu_{p_{k+1}}E_{p_{k+1}}^{m_{p_{n_k}}}<\frac{1}{k}.$$
Поскольку $1\leqslant n_{N+1}\leqslant N+1$, значение $p_{n_{N+1}}$ уже определено. В силу (2.5) и (2.6) имеем
$$\limsup_{j\to\infty}\mu_{p_{n_{N+1}}}E_j^{m_{p_{n_{N+1}}}}>\varepsilon_{p_{n_{N+1}}}$$
и
$$\lim_{j\to\infty}\mu_j E_j^{m_{p_{n_{N+1}}}}=0,$$
следовательно, существует такое натуральное $p_{N+2}>p_{N+1}$, что
$$\mu_{p_{n_{N+1}}}E_{p_{N+2}}^{m_{p_{n_{N+1}}}}>\varepsilon_{p_{n_{N+1}}}$$
и
$$\mu_{p_{N+2}}E_{p_{N+2}}^{m_{p_{n_{N+1}}}}<\frac{1}{N+1}.$$
Так как $1\leqslant n_{N+2}\leqslant N+2$, значение $p_{n_{N+2}}$ тем самым также определено.

Получаем построенную по индукции такую возрастающую последовательность натуральных чисел $\{p_k\}_k$, что для всякого натурального k выполнено
$$\mu_{p_{n_k}}E_{p_{k+1}}^{m_{p_{n_k}}}>\varepsilon_{p_{n_k}} \tag{2.7}$$
и
$$\mu_{p_{k+1}}E_{p_{k+1}}^{m_{p_{n_k}}}<\frac{1}{k}. \tag{2.8}$$

Для всякого натурального k положим $F_{k+1}=E_{p_{k+1}}^{m_{p_{n_k}}}$ и $F_1=\varnothing$. Тогда в силу (2.8) имеем
$$\lim_{k\to\infty}\mu_{p_k}F_k=0. \tag{2.9}$$
Пусть q — произвольное натуральное число. Тогда существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{r_k\}_k$, что для всякого натурального k будем иметь $n_{r_k}=q$. В силу (2.7) для всякого натурального k получим
$$\mu_{p_{n_{r_k}}}F_{r_k+1}>\varepsilon_{p_{n_{r_k}}},$$

то есть

$$\mu_{p_q} F_{r_k+1} > \varepsilon_{p_q},$$

откуда

$$\limsup_{k\to\infty} \mu_{p_q} F_k \geqslant \varepsilon_{p_q} > 0. \tag{2.10}$$

Сравнивая (2.9) и (2.10), получаем противоречие со слабой диагональностью последовательности мер $\{\mu_k\}_k$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. Пусть $\{\mu_k\}_k$ — слабо диагональная последовательность мер; последовательность функций $\{f_k\}_k$ сходится к функции f относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$. Тогда существует такое бесконечное множество натуральных чисел I_0, что для для всякого $i \in I_0$ последовательность функций $\{f_k\}_k$ сходится к функции f по мере μ_i.

Доказательство. Для всех натуральных j и k положим

$$E_j^k = \left\{ x \in X : |f_j(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

В силу условий леммы для всякого натурального k имеем

$$\lim_{j\to\infty} \mu_j E_j^k = 0.$$

Для всякого натурального k положим

$$I_k = \left\{ i \in \mathbb{N} : \lim_{j\to\infty} \mu_i E_j^k = 0 \right\}$$

и рассмотрим множество

$$I_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

В силу предыдущей леммы множество I_0 бесконечное. Кроме того, для всякого $i \in I_0$ и всякого натурального k имеем $i \in I_k$, откуда

$$\lim_{j\to\infty} \mu_i E_j^k = \lim_{j\to\infty} \mu_i \left\{ x \in X : |f_j(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k} \right\} = 0.$$

Таким образом, множество I_0 искомое. Лемма доказана.

Перейдем к собственно доказательству основной теоремы.

Доказательство. Пусть $\{m_k\}_k$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность функций $\{f_{m_k}\}_k$ сходится к функции f относительно последовательности мер $\{\mu_{m_k}\}_k$. В силу леммы 2.6 из последовательности $\{m_k\}_k$ можно выбрать подпоследовательность $\{m'_k\}_k$ такую, что для любого натурального i последовательность функций $\{f_{m_k}\}_k$ сходится к функции f по мере $\mu_{m'_i}$, тем более для любого натурального i последовательность $\{f_{m'_k}\}_k$ сходится к f по мере $\mu_{m'_i}$.

В силу леммы 2.3 из последовательности $\{m'_k\}_k$ можно выбрать подпоследовательность $\{m''_k\}_k$ такую, что для любого натурального i последовательность функций $\{f_{m''_k}\}_k$ сходится к функции f почти всюду относительно меры $\mu_{m'_i}$, тем более для любого натурального i последовательность $\{f_{m''_k}\}_k$ сходится к f почти всюду относительно меры $\mu_{m''_i}$.

Также для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{m''_k} E = \mu E \in [0, +\infty).$$

Необходимость. Предположим, что функция f μ-интегрируема и для любого множества $E \in \mathcal{F}$ выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_{m_k}\, d\mu_{m_k} = \int_E f\, d\mu,$$

тогда тем более выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_{m''_k}\, d\mu_{m''_k} = \int_E f\, d\mu.$$

В силу леммы 2.2 последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_{m''_k}\, d\mu_{m''_k}\right\}_k$ равностепенно абсолютно непрерывна относительно последовательности мер $\{\mu_{m''_k}\}_k$.

Таким образом, из произвольной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{m_k\}_k$ можно выделить подпоследовательность $\{m''_k\}_k$ такую, что последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_{m''_k}\, d\mu_{m''_k}\right\}_k$ равностепенно абсолютно непрерывна относительно последовательности мер $\{\mu_{m''_k}\}_k$. В силу леммы 2.4 отсюда следует, что последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\, d\mu_k\right\}_k$ равностепенно абсолютно непрерывна относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$.

Достаточность. Предположим, что последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_k\, d\mu_k\right\}_k$ равностепенно абсолютно непрерывна относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_k$, тогда тем более последовательность неопределенных интегралов $\left\{\int f_{m''_k}\, d\mu_{m''_k}\right\}_k$ равностепенно абсолютно непрерывна относительно последовательности мер $\{\mu_{m''_k}\}_k$. В силу леммы 2.2 функция f является μ-интегрируемой, и для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_{m''_k}\, d\mu_{m''_k} = \int_E f\, d\mu.$$

Таким образом, функция f является μ-интегрируемой и для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ из всякой подпоследовательности интегралов $\left\{\int_E f_{m_k}\, d\mu_{m_k}\right\}_k$ можно выбрать такую подпоследовательность $\left\{\int_E f_{m''_k}\, d\mu_{m''_k}\right\}_k$, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_{m''_k}\, d\mu_{m''_k} = \int_E f\, d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k\, d\mu_k = \int_E f\, d\mu.$$

Теорема доказана.

Литература

[1] Арешкин, Г.Я. О переходе к пределу под знаком интеграла Радона / Г.Я. Арешкин // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1949. – Т. 10. – №2. – С. 69–76.

[2] Алексюк, В.Н. О переходе к пределу под знаком интеграла / В.Н. Алексюк // Изв. вузов. Математика. – 1965. – №5. – С. 2–8.

[3] Алякин, В.А. Диагональные последовательности мер / В.А. Алякин, Д.Э. Клепнев // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2006. – № 2(42). — С. 5–14.

[4] Serfozo Richard. Convergence of Lebesgue Integrals with Varying Measures / R. Serfozo // The Indian Journal of Statistics. – 1982. – Vol. 44. – Ser. A. – Pt. 3. – P. 380–402.

Поступила в редакцию 21/*II*/2008;
в окончательном варианте — 21/*II*/2008.

VITALI–ARESHKIN THEOREM FOR DIAGONAL SEQUENCE OF MEASURES[4]

 D. E. Klepnev[5]

In theorem of G. Ya. Areshkin, which is a generalization of classical Vitali's theorem on the case of sequence of measures, the pointwise convergence of integrated functions is required. In this work we consider the case when the sequence of integrating measures is weakly diagonal. In this case the pointwise convergence may be substituted on the weaker convergence about the sequence of integrated measures.

Keywords: *passage to the limit, diagonal sequence of measures, uniform absolute continuity.*

Paper received 21/*II*/2008.
Paper accepted 21/*II*/2008.

---

[4]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S. V. Astashkin.

[5]Klepnev Dmitrij Eduardovich (`dekl@ssu.samara.ru`), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.