

ПРЯМОЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

© 2008 А.Г. Ложкин¹

В работе рассматриваются вопросы получения параметров произвольного преобразования фигур, описанных параметрической системой кусочно-непрерывных функций. Кроме того, приведено доказательство, что формулы, полученные с помощью прямого метода, можно получить только в неортогональном базисе.

Ключевые слова: кусочно-непрерывная функция, жорданова кривая, параметрическое преобразование, САПР.

1. Предварительные сведения

Пусть имеется произвольная фигура Φ — жорданова кривая на евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$ в декартовой системе координат, определяемая параметрическим уравнением $\begin{cases} x = F_x(t), \\ y = F_y(t), \end{cases}$ где $x, y, t \in R$. Функции $F_x(t)$ и $F_y(t)$ кусочно-непрерывные. Если уравнение фигуры задано в виде аналитической функции $y = f(x)$, то всегда можно записать $\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$ Класс фигур, определяемых только неявной функцией $F(x, y) = 0$, рассматривать в данной статье не будем.

Осуществим произвольное преобразование над фигурой Φ , определяемое матрицей $\begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}$, где $a, b, h, g \in R$. Необходимо получить параметры преобразованной фигуры.

Классическим методом нахождения параметров преобразования является метод нахождения обратной матрицы преобразования для характеристического уравнения $\vec{\lambda} = A\vec{x}$, где $\vec{\lambda}$, $\vec{x}$ — векторы в собственном ортогональном базисе [1]. Процесс получения обратной матрицы хорошо описан в литературе, например в [2. Гл. VIII]. Для случая преобразования на плоскости для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}$ обратная матрица будет $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b & -h \\ -g & a \end{pmatrix}$.

¹Ложкин Александр Гермогенович (lag@istu.ru), кафедра автоматизированных систем обработки информации и управления Ижевского государственного технического университета, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7.

Метод обратной матрицы обладает двумя недостатками: обратная матрица не существует, когда $\det A = 0$; собственный базис существует не для всех матриц преобразования, например для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [1. С. 84].

В результате исследований, проводимых на кафедре АСОИУ (САПР) ИжГТУ для процесса параметризации эллипса в САПР, были получены следующие результаты:

1. Вырожденные преобразования интерпретируются в аналитической геометрии не всегда правильно. Так вырожденное преобразование эллипса интерпретируется как точка [2. С. 402. Гл. XVI. § 2]. Достаточно подставить параметрическое уравнение окружности $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ в вырожденное

преобразование $\begin{cases} \tilde{x} = x + y \\ \tilde{y} = x + y \end{cases}$ [1. С. 84], чтобы убедиться, что это не так. Получившаяся вырожденная система уравнений будет симметричной по перестановке, то есть преобразование, определяемое матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, не изменит систему.

2. Преобразование $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (симметрия по Дьедонне [3, пп. 3.2.13, 4.1.14, 4.1.16]) относится к синтаксическому правилу построения плоскости, наряду с декартовым произведением векторных подпространств и собственным преобразованием, определяемым матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Данный вид симметрии не хранится в параметрах эллипса, хотя окружность обладает этим свойством.

3. Для квадратичной формы вместе с ортогональным базисом, существует не ортогональный $0e_1e'_2$ (см. рисунок). В книге [2. С. 192] П.С. Александрова имеется рисунок 101, фактически повторяющий рисунок данной статьи с репером $0e_1e'_2$, только вместо эллипса рассматривается гипербола.

4. Для любой квадратичной формы угол наклона конического сечения не зависит от параметров формы. Показан для преобразования сдвиг $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

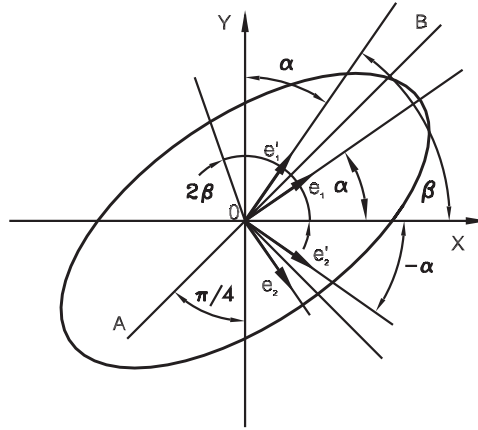
Обнаруженный базис назван собственным неортогональным постоянным (СНОП) базисом. Подробно с данными материалами можно ознакомиться в журнале "Вестник ИжГТУ" № 2–4 за 2008 год.

Определение 1. Назовем функцию $f_v(t)$, где $v \in \{x, y\}$, трансформированной, если у функции есть действительный множитель.

Определение 2. Назовем функцию $f_v(t)$, где $v \in \{x, y\}$, нетрансформированной, если множитель функции равен 1.

Пример. Для параболы $y = 2p(cx + x_0)^2 + C$ нетрансформированными функциями будут $f_{x1}(t) = t$, $f_{x2}(t) = 1$, $f_{y1}(t) = (t + x_0/c)^2$ и $f_{y2}(t) = 1$. Для упрощения формул в дальнейших выкладках применим запись $f_v = f_v(t)$.

Область определения тригонометрических функций синуса и косинуса определим пределами $[-\pi, \pi]$, тангенса — $(-\pi/2, \pi/2)$. Область определения параметра t зависит от конкретной фигуры.



2. Основные результаты

По свойству 2 преамбулы статьи, симметрия $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (переставная симметрия) относится к синтаксическому правилу построения плоскости, поэтому для собственного ортогонального базиса $0e_1e_2$ должен существовать симметричный репер $0e'_1e'_2$ относительно прямой AB . Исходя из свойства $\begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ переставной симметрии для тригонометрических функций для вектора $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, базис $0e'_1e'_2$ будет симметричен $0e_1e_2$. Базис $0e'_1e'_2$ является ортогональным, но совокупность векторов реперов даст четыре неортогональных базиса $0e_1e'_1$, $0e_1e'_2$, $0e_2e'_1$, $0e_2e'_2$. Особенно интересны из них два первых, так как вектор e_1 определяет угол наклона фигуры.

Теорема 1. Угол поворота произвольно преобразованной по матрице $\begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}$ фигуры Φ с параметрическим уравнением $\begin{cases} x = k_1 f_x \\ y = k_2 f_y \end{cases}$ не зависит от вида нетрансформированных функций и параметров k_1, k_2 .

Доказательство. Пусть фигура Φ задана элементарными нетрансформированными функциями f_x и f_y . Применив произвольное преобразование к фигуре Φ , получаем систему $\begin{cases} \tilde{x} = ak_1 f_x + hk_2 f_y \\ \tilde{y} = gk_1 f_x + bk_2 f_y \end{cases}$. В результате преобразования получится фигура Φ' в базисе $0e_1e_2$, повернутая на угол α с новыми параметрами $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}_2$ при нетрансформированных функциях

$$\begin{cases} \tilde{x} = \cos \alpha \tilde{k}_1 f_x - \sin \alpha \tilde{k}_2 f_y \\ \tilde{y} = \sin \alpha \tilde{k}_1 f_x + \cos \alpha \tilde{k}_2 f_y \end{cases}.$$
 Приравнивая правые части двух систем, получаем

$$\begin{cases} \cos \alpha \tilde{k}_1 f_x - \sin \alpha \tilde{k}_2 f_y = a k_1 f_x + h k_2 f_y \\ \sin \alpha \tilde{k}_1 f_x + \cos \alpha \tilde{k}_2 f_y = g k_1 f_x + b k_2 f_y \end{cases}.$$
 Правая часть системы уравнений была описана в старой системе координат. Так как переход в другую систему координат эквивалентен преобразованию поворот [2. Гл. VIII], получаем в ортогональном базисе $0e'_1 e'_2$ новую систему

$$\begin{cases} \cos \alpha \tilde{k}_1 f_x - \sin \alpha \tilde{k}_2 f_y = a \cos \beta k_1 f_x + h \sin \beta k_1 f_x - a \sin \beta k_2 f_y + h \cos \beta k_2 f_y, \\ \sin \alpha \tilde{k}_1 f_x + \cos \alpha \tilde{k}_2 f_y = b \sin \beta k_1 f_x + g \cos \beta k_1 f_x + b \cos \beta k_2 f_y - g \sin \beta k_2 f_y, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha \tilde{k}_1 f_x - \sin \alpha \tilde{k}_2 f_y = k_1 f_x (a \cos \beta + h \sin \beta) - k_2 f_y (a \sin \beta - h \cos \beta), \\ \sin \alpha \tilde{k}_1 f_x + \cos \alpha \tilde{k}_2 f_y = k_1 f_x (b \sin \beta + g \cos \beta) + k_2 f_y (b \cos \beta - g \sin \beta). \end{cases}$$

Так как функции f_v не зависимы, рассмотрим систему четырех уравнений, определяющих коэффициенты

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 \cos \alpha = k_1 (a \cos \beta + h \sin \beta), \\ \tilde{k}_2 \sin \alpha = k_2 (a \sin \beta - h \cos \beta), \\ \tilde{k}_1 \sin \alpha = k_1 (b \sin \beta + g \cos \beta), \\ \tilde{k}_2 \cos \alpha = k_2 (b \cos \beta - g \sin \beta), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = k_1 (a \cos \beta + h \sin \beta) / \cos \alpha, \\ \tilde{k}_2 = k_2 (a \sin \beta - h \cos \beta) / \sin \alpha, \\ \tilde{k}_1 = k_1 (b \sin \beta + g \cos \beta) / \sin \alpha, \\ \tilde{k}_2 = k_2 (b \cos \beta - g \sin \beta) / \cos \alpha. \end{cases}$$

Так как новые коэффициенты $\tilde{k}_{1,2}$ равны, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} k_1 (a \cos \beta + h \sin \beta) / \cos \alpha = k_1 (b \sin \beta + g \cos \beta) / \sin \alpha, \\ k_2 (a \sin \beta - h \cos \beta) / \sin \alpha = k_2 (b \cos \beta - g \sin \beta) / \cos \alpha, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} (a \cos \beta + h \sin \beta) / \cos \alpha = (b \sin \beta + g \cos \beta) / \sin \alpha, \\ (a \sin \beta - h \cos \beta) / \sin \alpha = (b \cos \beta - g \sin \beta) / \cos \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \cos \alpha &= (b \sin \beta + g \cos \beta) / (a \cos \beta + h \sin \beta), \\ (a \sin \beta - h \cos \beta) / (b \cos \beta - g \sin \beta) &= \sin \alpha / \cos \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда по величине $\operatorname{tg} \alpha$ получаем пропорцию $\frac{b \sin \beta + g \cos \beta}{a \cos \beta + h \sin \beta} =$

$$= \frac{a \sin \beta - h \cos \beta}{b \cos \beta - g \sin \beta};$$

$(b \sin \beta + g \cos \beta)(b \cos \beta - g \sin \beta) = (a \sin \beta + h \cos \beta)(a \cos \beta - h \sin \beta)$ или $V_1 = V_2$. Преобразуем выражение V_1 : $V_1 = (b \sin \beta + g \cos \beta)(b \cos \beta - g \sin \beta) = b^2 \sin 2\beta/2 + bg \cos^2 \beta - bg \sin^2 \beta - g^2 \sin 2\beta/2$, $V_1 = (b^2 - g^2) \sin 2\beta/2 + bg \cos 2\beta$. Раскрываем выражение V_2 : $V_2 = a^2 \sin \beta \cos \beta - ah \cos^2 \beta + ah \sin^2 \beta - h^2 \cos \beta \sin \beta$, $V_2 = (a^2 - h^2) \sin 2\beta/2 - ah(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$, $V_2 = (a^2 - h^2) \sin 2\beta/2 - ah \cos 2\beta$. Приравнивая полученные результаты, получаем $(b^2 - g^2) \sin 2\beta/2 + bg \cos 2\beta = (a^2 - h^2) \sin 2\beta/2 - ah \cos 2\beta$, $(ah + bg) \cos 2\beta = ((a^2 - h^2) - (b^2 - g^2)) \sin 2\beta/2$, $((a^2 - h^2) - (b^2 - g^2)) \sin 2\beta = 2(ah + bg) \cos 2\beta$. Отсюда угол β определится, как $\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2(ah + bg)}{((a^2 - h^2) - (b^2 - g^2))}$,

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2(ah+bg)}{(a^2-h^2)-(b^2-g^2)}. \text{ Угол } \alpha \text{ определится как } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a \sin \beta - h \cos \beta}{b \cos \beta - g \sin \beta} \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{b \sin \beta + g \cos \beta}{a \cos \beta + h \sin \beta}. \text{ Так же легко определить параметры } \tilde{k}_1 \text{ и } \tilde{k}_2.$$

Если рассмотреть функцию $f_v = \sum_{i=1}^n k_{vi} \varphi_{vi}(t)$, то из системы (2.1) очевидно, что новые коэффициенты не будут зависеть от вида нетрансформированной функции, а будут определяться только коэффициентами k_{vi} . Так же любую функцию $\varphi_{vi}(t)$ можно представить в виде произведения или частного элементарных функций.

Таким образом, для любых функций f_v угол α не зависит от f_x , f_y , k_1 и k_2 , что и требовалось доказать.

Теорема 2. Угол поворота произвольной фигуры и угол поворота системы двух линейных параметрических уравнений с тригонометрическими функциями в каноническом виде при произвольном преобразовании с матрицей $\begin{pmatrix} a & h \\ g & b \end{pmatrix}$ равны.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (2.2) из доказательства теоремы 1 и выразим из него угол β . Путем аналогичных выкладок получаем систему

$$\begin{cases} (a \sin \alpha - g \cos \alpha)/(b \cos \alpha - h \sin \alpha) = \sin \beta / \cos \beta, \\ \sin \beta / \cos \beta = (b \sin \alpha + h \cos \alpha)/(a \cos \alpha + g \sin \alpha). \end{cases}$$

Приравнявая уравнения по $\operatorname{tg} \beta$ и раскрывая пропорцию, получаем угол α как $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(bh+ag)}{(a^2+h^2)-(b^2+g^2)}$. Полученная формула совпадает с формулой 3 [4. С. 124], что и требовалось доказать.

В вышеперечисленных статьях также имеется краткое доказательство, показывающее, что рассмотрение равенства углов α_i приводит к выводу угла β , совпадающего с полученным значением в доказательстве теоремы 1.

Теорема 3. Параметры произвольного преобразования фигуры невозможно получить прямым методом, рассматривая только собственный ортогональный базис.

Доказательство. Исходя из симметрии базисов $0e'_1e'_2$ и $0e_1e_2$, можно получить соотношения для углов α и β : $\sin \alpha = \cos \beta$ и $\cos \alpha = \sin \beta$. Подставим полученное значение в систему (2.1) заменим угол β на α :

$$\begin{cases} \cos \alpha \tilde{k}_1 f_x - \sin \alpha \tilde{k}_2 f_y = a(\sin \alpha k_1 f_x - \cos \alpha k_2 f_y) + h(\cos \alpha k_1 f_x + \sin \alpha k_2 f_y), \\ \sin \alpha \tilde{k}_1 f_x + \cos \alpha \tilde{k}_2 f_y = b(\cos \alpha k_1 f_x + \sin \alpha k_2 f_y) + g(\sin \alpha k_1 f_x - \cos \alpha k_2 f_y), \\ \cos \alpha \tilde{k}_1 f_x - \sin \alpha \tilde{k}_2 f_y = (a \sin \alpha + h \cos \alpha) k_1 f_x + (h \sin \alpha - a \cos \alpha) k_2 f_y, \\ \sin \alpha \tilde{k}_1 f_x + \cos \alpha \tilde{k}_2 f_y = (b \cos \alpha + g \sin \alpha) k_1 f_x + (b \sin \alpha - g \cos \alpha) k_2 f_y. \end{cases}$$

Рассмотрим, как ранее, коэффициенты при нетрансформированных

$$\text{функциях} \quad \begin{cases} \tilde{k}_1 \cos \alpha = k_1(a \sin \alpha + h \cos \alpha) \\ \tilde{k}_2 \sin \alpha = k_2(a \cos \alpha - h \sin \alpha) \\ \tilde{k}_1 \cos \alpha = k_1(b \cos \alpha + g \sin \alpha) \\ \tilde{k}_2 \sin \alpha = k_2(b \sin \alpha - g \cos \alpha) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{k}_1 = k_1(\operatorname{atg} \alpha + h) \\ \tilde{k}_2 = k_2(\operatorname{actg} \alpha - h) \\ \tilde{k}_1 = k_1(b + g \operatorname{tg} \alpha) \\ \tilde{k}_2 = k_2(b - g \operatorname{ctg} \alpha) \end{cases}.$$

Отсюда по значениям $\tilde{k}_1$ и $\tilde{k}_2$ получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} atga + h = b + gtga \\ actga - h = b - gctga \end{cases} .$$

Рассмотрев пропорцию $\frac{atga + h}{b + gtga} = \frac{actga - h}{b - gctga}$, получим $tg2\alpha = \frac{ab + hg}{hb - ag}$, что противоречит теореме 2. Рассмотрение только собственного ортогонального базиса для получения параметров произвольного преобразования прямым методом не применимо.

Следствие Два ортогональных симметричных по перестановке базиса $0e'_1e'_2$ и $0e_1e_2$ образуют не ортогональный собственный базис, который в отличие от базиса Картана является постоянным.

Литература

- [1] Ефимов, Н.В. Квадратичные формы и матрицы / Н.В.Ефимов. – М.: Наука, 1972. – 160 с.
- [2] Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П.С.Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.
- [3] Дьедонне, Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия / Ж.Дьедонне. – М.: Наука, 1972. – 336 с.
- [4] Канонические формулы при исследовании системы двух линейных параметрических уравнений с тригонометрическими функциями / А.Г.Ложкин [и др.] // Вестник ИжГТУ. – 2007. – №3(35). – С. 123–128.

Поступила в редакцию 4/V/2008;
в окончательном варианте — 4/V/2008.

DIRECT ANALYTICAL METHOD OF LINEAR TRANSFORMATIONS OF FIGURES IN PLANE

© 2008 A.G. Lozhkin²

The task of arbitrary linear transformations of figures was considered. A category of figures was limited as figures is describe by parametric piecewise continuous functions equations set. The method's formulas may be find in non orthogonal basis only was proof.

Keywords: *piecewise continuous function, Jordan curve, parametric transformation.*

Paper received 4/V/2008.
Paper accepted 4/V/2008.

²Lozhkin Alexander Germogentovich (lag@istu.ru), Dept. of Computed Aided System of Management and Processing, Izhevsk State Technical University, Izhevsk, 426069, Russia.