

БАЗИСНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ В СИСТЕМАХ КОРНЕЙ B_n И D_n И АССОЦИИРОВАННЫЕ КОПРИСОЕДИНЕННЫЕ ОРБИТЫ¹

© 2008 М.В. Игнатьев²

С каждой базисной подсистемой в системе корней типа B_n или D_n можно связать семейство коприсоединенные орбит максимальной унитарной подгруппы соответствующей классической группы над конечным полем. Мы предъявляем поляризации для канонических форм на таких орбитах (теорема 2.7), а также доказываем формулу, выражающую размерность этих орбит во внутренних терминах группы Вейля (теорема 4.5).

Ключевые слова: базисная подсистема, коприсоединенная орбита, каноническая форма, поляризация.

Введение

Пусть n — произвольное натуральное число, p — произвольное простое число, $q = p^r$ для некоторого $r \geq 1$ и $k = \mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Через G обозначим классическую конечную группу с элементами из поля k , а через U — максимальную унитарную подгруппу в G . Одна из важнейших задач теории представлений — описание классов эквивалентности неприводимых конечномерных комплексных представлений группы U (или, что то же самое, неприводимых характеров U).

Основным инструментом в ее решении является метод орбит А.А. Кириллова, адаптированный для конечных групп Д. Кэжданом (см. [10–14] и параграф 3): неприводимые представления находятся во взаимно-однозначном соответствии с орбитами коприсоединенного представления U в пространстве $\mathfrak{u}^*$, где $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U)$, причем многие вопросы теории представлений можно решать в терминах орбит.

К сожалению, задача полного описания орбит не решена до сих пор и представляется крайне сложной. В то же время, даже если известно опи-

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором В.Е. Воскресенским.

²Игнатьев Михаил Викторович (mihail_ignatjev@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

сание какой-либо орбиты или семейства орбит, возникает целый ряд задач: построить для них поляризации (они играют важную роль в явной конструкции представления, связанного с данной орбитой, определение и подробности см. в параграфе 3); определить размерность орбиты и представления; получить явную формулу для соответствующего неприводимого характера.

В случае унитарной группы (максимальной унипотентной подгруппы в SL), то есть в случае A_n , эти задачи решены для некоторых классов орбит. А именно, в самой первой работе по методу орбит [12] А.А. Кирилловым было получено описание регулярных орбит (то есть орбит максимальной размерности); соответствующие характеры были описаны К. Андре в гораздо более общем контексте так называемых базисных характеров (см. [1, 2]). Известно также описание субрегулярных орбит (то есть орбит предмаксимальной размерности), их поляризаций [9] и соответствующих характеров [8]. Естественным обобщением регулярного и субрегулярного случаев является рассмотрение орбит, ассоциированных с инволюциями: с каждой инволюцией σ в группе Вейля W группы G можно некоторым образом связать семейство коприсоединенных орбит. Для унитарной группы полное описание таких орбит, поляризаций и формула для размерности были получены А.Н. Пановым [17].

С другой стороны, для произвольной классической группы можно определить семейство орбит, ассоциированных с базисной подсистемой системы корней (в случае A_n это то же самое, что орбиты, ассоциированные с инволюциями); точные определения см. в параграфе 2. Цель настоящей работы — построить поляризации для орбит, ассоциированных с базисными подсистемами, в случае B_n и D_n (теорема 2.7), а также охарактеризовать размерности этих орбит во "внутренних" терминах группы Вейля (теорема 4.5).

Структура работы такова. В параграфе 2 мы напомним основные факты, связанные с группой U , и даем определение орбиты Ω , ассоциированной с базисной подсистемой D . Параграф 3 содержит процедуру построения поляризации для канонической формы на орбите, ассоциированной с инволюцией (теорема 2.7). Для этого используется специфическая процедура, впервые возникшая в [9], которую мы называем здесь *морским боем*. Также показано, как можно охарактеризовать размерность орбиты в терминах этой процедуры (следствие 2.8).

Для того, чтобы описать размерность в терминах самой группы Вейля (точнее говоря, в терминах инволюции $\sigma \in W$ с носителем D), требуется изучить характер χ , соответствующий орбите Ω , ассоциированной с инволюцией. Для этого в параграфе 4 строится разложение группы U в полупрямое произведение ее подгрупп и к характеру χ применяется метод Макки (см., например, [15]). С его помощью удастся запустить индукцию по n и доказать в параграфе 5 окончательную формулу для размерности Ω (теорема 4.5).

1. Основные определения

Сначала мы приводим некоторые элементарные факты, касающиеся систем корней ортогональных алгебр. Через Φ мы будем обозначать систему корней типа B_n или D_n . Их можно отождествить со следующими подмножествами в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} B_n &= \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}, \\ D_n &= \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}, \end{aligned}$$

где $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Выберем множество простых корней $\Delta = \Delta(\Phi)$ так, как в [5]:

$$\begin{aligned} \Delta(B_n) &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\varepsilon_n\}, \\ \Delta(D_n) &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}. \end{aligned}$$

Тогда множество положительных корней $\Phi^+ \supset \Delta$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} B_n^+ &= \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n\}, \\ D_n^+ &= \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

Положим

$$m = \begin{cases} 2n+1, & \text{если } \Phi = B_n, \\ 2n, & \text{если } \Phi = D_n, \end{cases}$$

и через $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\Phi)$ обозначим подалгебру в $\mathfrak{gl}_m(k)$, натянутую на векторы $e_\alpha, \alpha \in \Phi$, где

$$\begin{aligned} e_{\varepsilon_i} &= e_{0,i}, & 1 \leq i \leq n, \\ e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} &= e_{j,i} - e_{-i,-j}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ e_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} &= e_{-j,i} - e_{-i,j}, & 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Здесь мы нумеруем строчки и столбики матрицы размера $m \times m$ индексами

$$1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1$$

(в случае D_n индекс 0 пропускается) и через $e_{a,b}$ обозначаем обычную матричную единицу. Иначе говоря, $\mathfrak{u}$ — это алгебра нижнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали, кососимметричных относительно побочной диагонали. Разумеется, она является максимальной нильпотентной подалгеброй в соответствующей классической алгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$, состоящей из всех матриц, кососимметричных относительно побочной диагонали. В частности, $\dim \mathfrak{u} = |\Phi^+|$.

Пример 1.1. Здесь мы условно изобразили алгебры B_3 и D_4 :

	1	2	3	0	-3	-2	-1
1							
2							
3							
0							
-3			0				
-2		0					
-1	0						

	1	2	3	4	-4	-3	-2	-1
1								
2								
3								
4								
-4				0				
-3			0					
-2		0						
-1	0							

Кроме того, определим функции

$$\begin{aligned} \text{col}: \Phi^+ &\rightarrow \{1, \dots, n\}: \text{col}(\epsilon_i \pm \epsilon_j) = \text{col}(\epsilon_i) = i, \\ \text{row}: \Phi^+ &\rightarrow \{-n, \dots, n\}: \text{row}(\epsilon_i \pm \epsilon_j) = \mp j, \text{row}(\epsilon_i) = 0, \end{aligned}$$

и для произвольных $-n+1 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n$ множества

$$\begin{aligned} R_i &= R_i(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{row}(\alpha) = i\}, \\ C_j &= C_j(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{col}(\alpha) = j\} \end{aligned}$$

будем называть i -ой *строчкой* и j -ым *столбиком* Φ^+ соответственно. Мы введем "зеркальный" порядок на множестве индексов

$$1 < 2 < \dots < n < 0 < -n < \dots < -2 < -1$$

и будем рассматривать следующие отношения полного порядка на Φ^+ :

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{col}(\beta) < \text{col}(\alpha) \text{ или } \text{col}(\beta) = \text{col}(\alpha), \text{row}(\beta) < \text{row}(\alpha), \\ \alpha <' \beta &\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{col}(\beta) < \text{col}(\alpha) \text{ или } \text{col}(\beta) = \text{col}(\alpha), \text{row}(\beta) > \text{row}(\alpha). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Например, для $\Phi = B_6$ имеем $\epsilon_2 - \epsilon_4 > \epsilon_2 > \epsilon_2 + \epsilon_5 > \epsilon_3 - \epsilon_6$, $\epsilon_2 + \epsilon_5 >' \epsilon_2 >' \epsilon_2 - \epsilon_4 >' \epsilon_3 - \epsilon_6$.

Теперь определим основной объект нашего рассмотрения.

Определение 1.2. Пусть подсистема $D = \{\beta_1, \dots, \beta_t\} \subset \Phi^+$, состоящая из попарно ортогональных корней, удовлетворяет следующему условию:

$$|D \cap R_i| \leq 1 \text{ и } |D \cap C_j| \leq 1 \text{ для любых } i, j. \quad (1.2)$$

Следуя [4], будем называть D *базисной* подсистемой системы корней Φ .

Замечание 1.3. Пусть $W = W(\Phi)$ — группа Вейля системы корней Φ . С каждой базисной подсистемой $D = \{\beta_1, \dots, \beta_t\}$ можно связать инволюцию (то есть элемент второго порядка) $\sigma = \sigma_D \in W$:

$$\sigma = r_{\beta_1} \cdot \dots \cdot r_{\beta_t} \quad (1.3)$$

(для произвольного $\beta \in \Phi$ через r_β мы обозначаем отражение в $\mathbb{R}^n$ относительно гиперплоскости, ортогональной β). Будем называть D *носителем* инволюции σ и обозначать $D = \text{Supp}(\sigma)$.

Отметим, что в случае A_n так может быть получена каждая инволюция в группе Вейля, а в случае B_n или D_n — конечно, нет. Например, для $\Phi = B_2$ не существует базисной подсистемы, которая была бы носителем инволюции $\sigma = r_{\varepsilon_1} \cdot r_{\varepsilon_2}$.

Через $U = \exp(\mathfrak{u})$ обозначим максимальную унитарную подгруппу в соответствующей классической (конечной) группе G . Везде далее мы предполагаем, что $p = \text{char } k \geq m$. В этом случае отображение

$$\exp: \mathfrak{u} \rightarrow U: x \mapsto \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!}$$

является биекцией (и даже изоморфизмом алгебраических многообразий); обратное отображение обозначим через $\ln$. Более того, имеет место формула Кэмпбелла–Хаусдорфа: для любых $u, v \in \mathfrak{u}$

$$\exp(u)\exp(v) = \exp(u + v + \tau(u, v)), \quad (1.4)$$

где $\tau(u, v) \in [\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ (здесь $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = \langle [x, y], x, y \in \mathfrak{u} \rangle_k$).

Группа U действует на $\mathfrak{u}$ с помощью присоединенного представления; сопряженное к нему представление в $\mathfrak{u}^*$ называется коприсоединенным. Пользуясь невырожденной на $\mathfrak{gl}_m(k)$ формой $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(AB)$, сопряженное пространство $\mathfrak{u}^*$ можно отождествить с $\mathfrak{u}^t$ (при таком отождествлении $e_\alpha^* = e_\alpha^t$ для любого $\alpha \in \Phi^+$). При этом коприсоединенное представление приобретает простой вид

$$g.x = \text{pr}(gxg^{-1}), \quad g \in U, x \in \mathfrak{u}^*$$

(здесь через pr обозначена проекция $\mathfrak{gl}_m(k) \rightarrow \mathfrak{u}^*$ вдоль $\mathfrak{u}$). Орбиты коприсоединенного представления играют ключевую роль при описании неприводимых представлений группы U (подробнее см. параграф 3).

Определение 1.4. Пусть $D = \{\beta_1, \dots, \beta_l\} \subset \Phi^+$ — базисная подсистема, $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$ — набор констант из k^* ,

$$f = f_{D, \xi} = \sum_{\beta \in D} \xi_\beta \cdot e_\beta^* \in \mathfrak{u}^*.$$

Коприсоединенную орбиту $\Omega = \Omega_{D, \xi} \subset \mathfrak{u}^*$ элемента f будем называть *орбитой, ассоциированной с подсистемой D* , а сам элемент f — *канонической формой* на ней (см. [17] для определения в случае A_n).

Цель данной работы — описать поляризации и определить размерности таких орбит.

2. Морской бой и поляризации

Здесь мы освещаем основную идею метода орбит, созданного А.А. Кирилловым [11, 12] и адаптированного для конечных групп Д. Кажданом [10] (см. также [13, 14]), и строим поляризации для орбит, ассоциированных с базисными подсистемами.

Напомним основные определения. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли, $f \in \mathfrak{g}^*$ — произвольная линейная форма. Подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ называется *поляризацией* для f , если $f([x, y]) = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}$ имеет максимальную размерность среди всех таких подалгебр (то есть это максимальное f -изотропное подпространство). В этом случае, как легко показать, размерность коприсоединенной орбиты связана с размерностью поляризации простым соотношением $\dim \Omega_f = 2 \cdot \text{codim } \mathfrak{p}$ (см. [18, с. 117]). Нахождение поляризации является необходимым шагом при построении неприводимого представления в методе орбит.

А именно, выберем и зафиксируем $\theta: k \rightarrow \mathbb{C}^*$ — произвольный нетривиальный характер поля k (то есть гомоморфизм из аддитивной группы этого поля в мультипликативную группу поля комплексных чисел). Напомним, что через $\ln: U \rightarrow \mathfrak{u}$ мы обозначили отображение, обратное к $\exp: \mathfrak{u} \rightarrow U$. Пусть $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$ — произвольная коприсоединенная орбита. Рассмотрим функцию $\chi = \chi_\Omega: U \rightarrow \mathbb{C}$, определенную правилом

$$\chi(g) = q^{-\frac{1}{2} \dim \Omega} \cdot \sum_{f \in \Omega} \theta(f(\ln(g))), \quad g \in U \quad (2.1)$$

(коприсоединенные орбиты являются замкнутыми четномерными алгебраическими подмногообразиями в $\mathfrak{u}^*$; более того, $q^{\dim \Omega} = |\Omega|$, см. [13] и [14]). Суть метода орбит выражается следующей теоремой:

Теорема 2.1. [10, Proposition 2] *Отображение $\Omega \mapsto \chi_\Omega$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством коприсоединенных орбит группы U и множеством ее неприводимых конечномерных комплексных характеров. При этом размерность соответствующего неприводимого представления равна $q^{\frac{1}{2} \dim \Omega} = \sqrt{|\Omega|}$.*

В той же статье объясняется, как, используя поляризацию, в явном виде построить представление, соответствующее данной орбите. На самом деле, это представление имеет вид $\text{Ind}_{\exp(\mathfrak{p})}^U \varphi_f$, где f — любая форма на орбите Ω , $\mathfrak{p}$ — любая поляризация для f , а φ_f действует из $\exp(\mathfrak{p})$ в $\mathbb{C}$ по правилу

$$\varphi_f(h) = \theta(f(\ln(h))), \quad h \in \exp(\mathfrak{p}).$$

Здесь мы предъявляем явную конструкцию поляризации для произвольной орбиты в $\mathfrak{u}^*$, ассоциированной с базисной подсистемой.

Определение 2.2. Пусть $\beta \in \Phi^+$. Корни $\alpha, \gamma \in \Phi^+$ называются β -сингулярными, если $\alpha + \gamma = \beta$. Множество всех β -сингулярных корней обозначается $S(\beta)$ (см. [3] для A_n и [4, 16] для B_n, D_n).

Легко понять, что сингулярные корни имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S(\varepsilon_i - \varepsilon_j) &= \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l - \varepsilon_j\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ S(\varepsilon_i) &= \bigcup_{l=i+1}^n \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l\}, \quad 1 \leq i \leq n, \\ S(\varepsilon_i + \varepsilon_j) &= \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_l + \varepsilon_j\} \cup \bigcup_{l=j+1}^n \{\varepsilon_i - \varepsilon_l, \varepsilon_j + \varepsilon_l\} \cup \\ &\quad \bigcup_{l=j+1}^n \{\varepsilon_j + \varepsilon_l, \varepsilon_j - \varepsilon_l\} \cup S_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \text{ где} \\ S_{ij} &= \begin{cases} \{\varepsilon_i, \varepsilon_j\}, & \text{если } \Phi = B_n, \\ \emptyset, & \text{если } \Phi = D_n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пошаговое заполнение диаграммы см. в приложении.

Далее нам понадобится одна простая

Лемма 2.6. Пусть $\gamma \in \Phi^+$, $\mathcal{F}(\gamma) = +$. Тогда существует единственный корень $\delta \in \Phi^+$, для которого $\gamma + \delta \in D$.

Доказательство. По определению морского боя, существует такой корень $\delta \in \Phi^+$, что $\mathcal{F}(\delta) = -$ и $\gamma + \delta = \beta_i$ для некоторого $\beta_i \in D$. Покажем, что $\gamma + \alpha \notin D$ для всех $\alpha \in \Phi^+$, не равных δ .

В самом деле, пусть существуют такие $\alpha, \beta_j \in \Phi^+$, что $\beta_j \in D$, $\gamma + \alpha = \beta_j$ и $\beta_j \neq \beta_i$. Так как $\text{col}(\gamma) = \text{col}(\beta_i)$ по построению, то $\text{col}(\gamma) \neq \text{col}(\beta_j)$ (подсистема D содержит не более одного корня из каждого столбика). Следовательно, $\alpha > \beta_j > \gamma > \beta_i$, и $\text{col}(\alpha) = \text{col}(\beta_j)$, $\text{row}(\alpha) = \text{col}(\gamma)$ (см. замечание 2.3; ситуация $\text{row}(\alpha) = -\text{row}(\gamma)$, невозможна, ибо тогда $\text{col}(\beta_i) = \text{col}(\gamma) = -\text{row}(\beta_j)$ и корни β_i, β_j не ортогональны). В частности, $j < i$.

То, что корень γ не отобразился в минус на j -ом шаге морского боя, означает, что на каком-то l -ом шаге, $l < j$, корень α отобразился в минус. Значит, либо $\text{row}(\alpha) = \text{row}(\beta_l)$, либо $\text{col}(\alpha) = -\text{row}(\beta_l)$. Однако в первом случае $\text{row}(\beta_l) = \text{col}(\beta_i)$ и корни β_i, β_l не ортогональны, а во втором случае $\text{row}(\beta_l) = -\text{col}(\beta_j)$ и корни β_j, β_l не ортогональны. Это противоречит определению базисной подсистемы. Лемма доказана.

Оказывается, морской бой является удобным средством построения поляризаций для орбит, ассоциированных с базисными подсистемами. А именно, рассмотрим множество корней, которые при морском бое отображаются не в минусы:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_D = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathcal{F}(\alpha) \neq -\}. \quad (2.3)$$

Обозначим через $\mathfrak{p}_D$ подпространство в $\mathfrak{u}$, натянутое на векторы $e_\alpha, \alpha \in \mathcal{P}$.

Теорема 2.7. Пусть $\Phi = B_n, n \geq 2$, или $\Phi = D_n, n \geq 4$, $D \subset \Phi^+$ — базисная подсистема, $\Omega = \Omega_{D, \xi}$ — ассоциированная с ней орбита и f — каноническая форма на ней. Тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_D$ — поляризация для f для любого $\xi \in (k^*)^n$.

Доказательство. Оно состоит из трех шагов:

1. $\mathfrak{p}$ — изотропное подпространство для f . Достаточно показать, что сумма любых двух корней из $\mathcal{P}$ не содержится в D . Пусть $\beta \in D$, $\gamma, \delta \in S(\beta)$, $\gamma + \delta = \beta$. Из определения морского боя следует, что из корней γ, δ не более одного лежит в $\mathcal{P}$.

2. $\mathfrak{p}$ — максимальное f -изотропное подпространство. Предположим, что $\mathfrak{p} + k\mathfrak{u}$ является f -изотропным подпространством для какого-то $\mathfrak{u} \in \mathfrak{u}$. Пусть

$$y = \sum_{\delta \in \Phi^+ \setminus \mathcal{P}} y_\delta e_\delta \neq 0, \quad y_\delta \in k.$$

Поскольку $y \neq 0$, то найдется $\delta_0 \in \Phi^+ \setminus \mathcal{P}$, для которого $y_{\delta_0} \neq 0$. Раз $\mathcal{F}(\delta_0) = -$, то существует такой $\gamma_0 \in \Phi^+$, что $\mathcal{F}(\gamma_0) = +$ и $\gamma_0 + \delta_0 = \beta$ для некоторого $\beta \in D$ (в частности, $\gamma_0 \in \mathcal{P}$, а значит, $e_{\gamma_0} \in \mathfrak{p}$). Это означает, что $[e_{\gamma_0}, e_{\delta_0}] = c \cdot e_\beta$, где $c \in k^*$. По лемме 2.6, $\gamma_0 + \delta_0 \notin D$ для любого $\delta \in \Phi^+$, не равного

δ_0 . Но тогда если $f(e_\beta) = \xi_\beta \neq 0$, то

$$f([e_{\gamma_0}, y]) = f([e_{\gamma_0}, y_{\delta_0} \cdot e_{\delta_0}]) = f(y_{\delta_0} \cdot c \cdot e_\beta) = y_{\delta_0} \cdot c \cdot \xi_\beta \neq 0,$$

что противоречит изотропности пространства $\mathfrak{p} + ky$.

3. $\mathfrak{p}$ — подалгебра. Доказательство этого шага мы отложили до параграфа 4, так как оно использует полупрямое разложение $\mathfrak{u}$ (см. Предложение 3.7).

Следствие 2.8. Пусть Φ, D, Ω определены, как в теореме. Тогда $\dim \Omega$ равна количеству символов $\pm$ в диаграмме $(\Phi, \mathcal{F})$.

Доказательство. По определению морского боя, количество плюсов равно количеству минусов в диаграмме $(\Phi, \mathcal{F})$. Размерность орбиты равна удвоенной коразмерности любой поляризации, но, по построению $\mathfrak{p}$, $\text{codim } \mathfrak{p} = |(\Phi^+ \setminus \mathcal{P})| = |\{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathcal{F}(\alpha) = -\}|$.

Следствие доказано.

Используя это следствие, мы в параграфе 5 охарактеризуем размерность Ω во "внутренних" терминах группы Вейля W (см. теорему 4.5).

В заключение этого параграфа отметим, что морской бой впервые появился в статье [9] под названием "допустимые диаграммы". Оказалось, что он позволяет описывать все коприсоединенные орбиты в случае A_{n-1} (то есть для унитарной группы) при $n \leq 7$, а также отдельные серии орбит (например, субрегулярные орбиты) для произвольного n . В статье [17] морской бой используется для полного описания орбит, ассоциированных с инволюциями, в случае A_n .

3. Полупрямое разложение группы U

В предыдущем параграфе мы кратко описали связь коприсоединенных орбит с неприводимыми представлениями и характерами группы U . С другой стороны, в изучении представлений конечных унитарных групп важную роль играет метод Макки, связанный с понятием полупрямого разложения (см., например, [15]).

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольная конечная группа, A, B — ее подгруппы. Говорят, что $\mathcal{G}$ есть *полупрямое произведение* своих подгрупп A и B , если $\mathcal{G} = AB$, $A \triangleleft \mathcal{G}$ и $A \cap B = 1$ (обозначение $\mathcal{G} = A \rtimes B$). Предположим дополнительно, что A является абелевой группой и ψ — какой-то ее неприводимый характер. Назовем *централизатором* этого характера в группе B подгруппу вида $B^\psi = \{b \in B \mid \psi \circ \tau_b = \psi\}$, где $\tau_b: A \rightarrow A: a \mapsto bab^{-1}$.

Произвольный элемент $g \in \mathcal{G}$ можно однозначно представить в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$; следовательно, возникают отображения

$$\pi_A^{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow A: g \mapsto a \quad \text{и} \quad \pi_B^{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow B: g \mapsto b, \quad g \in \mathcal{G}.$$

Для произвольной подгруппы $\tilde{B}$ в B и произвольных характеров $\psi: A \rightarrow \mathbb{C}$ и $\eta: \tilde{B} \rightarrow \mathbb{C}$, следовательно, можно определить характер $(\psi \circ \pi_A^{A \rtimes \tilde{B}}) \cdot (\eta \circ \pi_{\tilde{B}}^{A \rtimes \tilde{B}})$

группы $A \rtimes \tilde{B} = A\tilde{B}$. Основная идея метода Макки, позволяющая сводить изучение представлений группы $\mathcal{G}$ к изучению представлений ее подгрупп, заключается в следующем:

Теорема 3.1. [15, Proposition 1.2] Пусть $\mathcal{G} = A \rtimes B$ — конечная группа, причем A — абелева группа. Тогда каждый неприводимый характер χ группы $\mathcal{G}$ имеет вид

$$\chi = \text{Ind}_{A \rtimes B^\Psi}^G ((\psi \circ \pi_A^{A \rtimes B^\Psi}) \cdot (\eta \circ \pi_{B^\Psi}^{A \rtimes B^\Psi})), \quad (3.1)$$

где ψ, η — некоторые неприводимые характеры групп A и B^Ψ соответственно. Обратно, каждый характер вида (3.1) будет неприводимым характером $\mathcal{G}$.

Покажем теперь, как использовать эти методы для нашей группы U . Обозначим через $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{v}$ подалгебры в $\mathfrak{u}$ следующего вида:

$$\mathfrak{u}_1 = \bigoplus_{\alpha \in C_1} ke_\alpha, \quad \mathfrak{v} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \setminus C_1} ke_\alpha.$$

Ясно, что $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}$ как векторные пространства; легко проверить также, что $\mathfrak{u}_1$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{u}$ (в этой ситуации пишут $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \rtimes \mathfrak{v}$ и говорят, что алгебра $\mathfrak{u}$ есть полупрямое произведение своих подалгебр $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{v}$). Обозначим $U_1 = \exp(\mathfrak{u}_1)$, $V = \exp(\mathfrak{v})$.

Лемма 3.2. Группа U есть полупрямое произведение подгрупп U_1 и V , то есть $U = U_1 \rtimes V$, причем подгруппа U_1 абелева.

Доказательство. Хорошо известно [6, Corollary 2.5.17], что $U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} X_\alpha$, где положительные корни берутся в любом фиксированном порядке (например, $<$) и $X_\alpha = \{x_\alpha(t), t \in k\}$ — корневая подгруппа. Здесь для любого $\alpha \in \Phi^+$

$$x_\alpha(t) = \exp(te_\alpha) = \begin{cases} 1_m + te_\alpha, & \text{если } \text{row}(\alpha) \neq 0, \\ 1_m + te_\alpha - \frac{t^2}{2}e_{-i,i}, & \text{если } \alpha = \varepsilon_i \in B_n. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $U = U_1 V$, причем

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ * & * & * & \dots & * & 1 \end{pmatrix} \in U \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \right\}.$$

Нормальность подгруппы U_1 проверяется теперь простыми матричными вычислениями. Коммутативность U_1 вытекает из того, что для нее имеет место формула Кэмпбелла-Хаусдорфа (1.4), а подалгебра $\mathfrak{u}_1$ коммутативна.

Замечание 3.3. Мы не рассматриваем здесь систему корней C_n именно по той причине, что для нее эта лемма не верна: первый столбик *не будет* коммутативной подалгеброй, ибо $(\varepsilon_1 - \varepsilon_i) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_i) = 2\varepsilon_1 \in C_n^+$.

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 3.1 при $\mathcal{G} = U, A = U_1, B = \tilde{U}$. Пусть теперь $D = \{\beta_1 > \dots > \beta_t\}$ — базисная подсистема Φ^+ ,

$\Omega = \Omega_{D,\xi} \subset \mathfrak{u}^*$ — ассоциированная с ней орбита, f — каноническая форма на ней, а $\chi = \chi_\Omega$ — соответствующий неприводимый характер группы U . Наша следующая цель — построить для него разложение вида (3.1). Этому посвящен остаток данного параграфа.

Через $\psi = \psi_{D,\xi}$ обозначим неприводимый характер группы U_1 вида

$$\psi(x) = \theta(f(\ln(x))) = \begin{cases} \xi_{\beta_1} \cdot x_{i,1}, & \text{если } \text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = i, \\ 1, & \text{если } \text{col}(\beta_1) > 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

(Для любого $x = (x_{ij}) \in U_1$, как легко проверить, $\ln(x) = x - 1_m - x_{-n,1} \cdot e_{-n,1}$.) Здесь и далее для произвольной матрицы x через x_{ij} обозначается ее (i, j) -ый элемент.

С другой стороны, определим следующую подгруппу в группе V :

$$V' = V'_\sigma = \prod_{\alpha \in \Phi_1^+} X_\alpha, \text{ где} \\ \Phi_1^+ = \begin{cases} \Phi^+ \setminus C_1, & \text{если } \text{col}(\beta_1) > 1, \\ \Phi^+ \setminus (C_1 \cup S^-(\beta_1)), & \text{если } \text{col}(\beta_1) = 1. \end{cases}$$

В частности, если $\text{col}(\beta_1) > 1$, то $V' = V$. Ясно, что $V' = \exp(\mathfrak{v}')$, где $\mathfrak{v}' = \sum_{\alpha \in \Phi_1^+} e_\alpha$. Более того, если $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = i$, то

$$V' = \{x \in V \mid x_{ij} = x_{-j,-i} = 0, 1 < j < i\}.$$

Лемма 3.4. Пусть $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = i$. Тогда для любого $y \in \mathfrak{v} \setminus \mathfrak{v}'$ существует такой $z \in \mathfrak{u}_1$, что $z_{i,1} \neq ((\exp \text{ad}_y)(z))_{i,1}$.

Доказательство. Положим

$$y = \sum_{\alpha \in \Phi_1^+} y_\alpha e_\alpha + \sum_{\delta \in S^-(\beta_1)} y_\delta e_\delta \in \widetilde{\mathfrak{u}} \setminus \mathfrak{u}', \quad y_\alpha \in k.$$

Пусть δ_0 — наименьший в смысле $<'$ (см. (1.1)) из всех $\delta \in S^-(\beta_1)$, для которых $y_\delta \neq 0$.

Так как $\mathcal{F}(\delta_0) = -$, то, по определению морского боя, существует такой $\gamma_0 \in \Phi^+$, что $\mathcal{F}(\gamma_0) = +$ и $\gamma_0 + \delta_0 = \beta_1$ (более того, в данном случае $\gamma_0 \in C_1$, см. замечание 2.3). Выберем произвольную константу $c \in k^*$ и рассмотрим элемент $z = ce_{\gamma_0} \in \mathfrak{u}_1$. По определению, $z_{i,1} = 0$. В то же время,

$$(\exp \text{ad}_y)(z) = z + \text{ad}_y z + \frac{1}{2} \text{ad}_y^2 z + \dots$$

Для любого $u \in \mathfrak{u}_1$, разумеется, $u_{i,1} = e_{\beta_1}^*(u)$, поэтому, ввиду леммы 2.6, $(\text{ad}_y z)_{i,1} \neq 0$ (так как $[e_{\gamma_0}, e_{\delta_0}] = c_0 e_{\beta_1}$ для некоторого $c_0 \neq 0$ и $[e_{\gamma_0}, e_\delta] \notin ke_{\beta_1}$ для всех $\delta \in \Phi^+$, не равных δ_0).

Предположим теперь, что существует такое $N > 1$ и такие корни $\delta_1, \dots, \delta_N \in \Phi^+ \setminus C_1$, что $\gamma_0 + \delta_1 + \dots + \delta_N = \beta_1$, причем $y_{\delta_i} \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, N$. Из [5, Гл. VI, §1, Предложение 19] вытекает существование такого i_0 , что $\beta_1 - \delta_{i_0} \in \Phi^+$; без ограничения общности можно считать, что $i_0 = 1$. Другими словами, $\delta_1 \in S^-(\beta_1)$. Но $\delta_1 \notin C_1$, а $S^+(\beta_1) \subset C_1$ по определению, следовательно, $\delta_1 \in S^-(\beta_1)$. Значит, $\delta_1 >' \delta_0$ в силу выбора корня δ_0 .

Таким образом, $\delta_0, \delta_1 \in S^-(\beta_1)$ и $\delta_1 >' \delta_0$; несложный перебор показывает, что в этом случае $\delta_1 \not\leq \delta_0$ в смысле обычного порядка на корнях ($\alpha > \beta$, если $\alpha - \beta \in \langle \Phi^+ \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$). С другой стороны,

$$\delta_0 = \beta_1 - \gamma_0 = \delta_1 + \dots + \delta_N > \delta_1,$$

что приводит к противоречию. Отсюда следует, что $e_{\beta_1}^*(\text{ad}_y^N(z)) = 0$ для любого $N > 1$, а значит, $((\exp \text{ad}_y)(z))_{i,1} = c \cdot c_0 \neq 0$, то есть $z \in \mathfrak{u}_1$ — искомый элемент.

Лемма 3.5. *Для произвольной базисной подсистемы $D \subset \Phi^+$ и произвольного $\xi \in (k^*)^n$ подгруппа V' совпадает с централизатором характера ψ в подгруппе V , то есть имеет место равенство $V' = V^\psi$.*

Доказательство. Это очевидно в случае $\text{col}(\beta_1) > 1$ (ибо тогда $V' = V^\psi = V$). Пусть $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = i$. Рассмотрим произвольные элементы $x = \exp(y) \in V$ и $h = \exp(z) \in U_1$, где

$$y = \sum_{\alpha \in \Phi^+ \setminus C_1} y_\alpha e_\alpha \in \widetilde{\mathfrak{u}}, \quad z = \sum_{\gamma \in C_1} z_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{u}_1, \quad y_\alpha, z_\gamma \in k.$$

Поскольку $h = 1_m + z + h_{-n,1} \cdot e_{-n,1}$, то

$$\begin{aligned} xhx^{-1} &= \exp(y)(1_m + z + h_{-n,1} \cdot e_{-n,1})(\exp(y))^{-1} \\ &= 1_m + \exp(y)z(\exp(y))^{-1} + h_{-n,1} \cdot \exp(y)e_{-n,1}(\exp(y))^{-1}. \end{aligned}$$

Но $\exp(y)z(\exp(y))^{-1} = (\exp \text{ad}_y)(z)$ (см. [7, с. 22]), а $e_{-n,1}$, как легко видеть, вообще не меняется при таком сопряжении. Следовательно,

$$xhx^{-1} = 1_m + h_{-n,1} \cdot e_{-n,1} + (\exp \text{ad}_y)(z);$$

в частности, $\psi(xhx^{-1}) = \xi_{\beta_1} \cdot ((\exp \text{ad}_y)(z))_{i,1}$ (см. формулу (3.2)). Поскольку $h_{i,1} = z_{i,1}$, лемма 3.4 показывает, что $V' \supset V^\psi$.

Осталось заметить, что для любого $\alpha \in \Phi_1^+$ подгруппа X_α содержится в централизаторе характера ψ . Следовательно, $V' \subset V^\psi$, а значит, они совпадают, что и требовалось доказать.

Итак, мы вычислили централизатор характера ψ в подгруппе V ; исследуем его структуру более подробно. Обозначим

$$\Phi_2^+ = \begin{cases} \Phi_1^+ \setminus S^-(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_i), & \text{если } \beta_1 = \varepsilon_1 \mp \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n, \\ \Phi_1^+, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и положим

$$\mathfrak{v}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1^+ \setminus \Phi_2^+} ke_\alpha, \quad \widetilde{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_2^+} ke_\alpha. \quad (3.3)$$

Тривиально проверяется, что $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}_1 \rtimes \widetilde{\mathfrak{u}}$. Действуя, как в лемме 3.2, можно доказать, что $V' = V_1 \rtimes \widetilde{U}$, где

$$V_1 = \exp(\mathfrak{v}_1) = \prod_{\alpha \in \Phi_1^+ \setminus \Phi_2^+} X_\alpha, \quad \widetilde{U} = \exp(\widetilde{\mathfrak{u}}) = \prod_{\alpha \in \Phi_2^+} X_\alpha$$

(если $\Phi_1^+ = \Phi_2^+$, то $V_1 = \{1_m\}$ и $\widetilde{U} = V'$).

Более того, мы замечаем, что $\widetilde{U}$ изоморфна максимальной унипотентной подгруппе ортогональной группы меньшего ранга. Точнее говоря, положим

$$\widetilde{\Phi} = \begin{cases} B_{n-1}, & \text{если } \Phi = B_n, \text{col}(\beta_1) > 1, \\ D_{n-1}, & \text{если } \Phi = D_n, \text{col}(\beta_1) > 1, \\ D_{n-2}, & \text{если } \Phi = D_n, \text{col}(\beta_1) = 1, \\ B_{n-2}, & \text{если } \Phi = B_n, \text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) \neq 0, \\ D_{n-1}, & \text{если } \Phi = B_n, \text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = 0. \end{cases}$$

Лемма 3.6. *Имеет место изоморфизм $\widetilde{u} \cong u(\widetilde{\Phi})$.*

Доказательство. Достаточно построить взаимно-однозначное отображение $\pi: \Phi_2^+ \rightarrow \widetilde{\Phi}^+$, которое продолжалось бы до изометрического изоморфизма $\langle \Phi_2^+ \rangle_{\mathbb{R}} \rightarrow \langle \widetilde{\Phi}^+ \rangle_{\mathbb{R}}$. Заметим, что на самом деле Φ_2^+ получается из Φ^+ удалением некоторых строчек и столбцов. А именно,

$$\Phi_2^+ = \begin{cases} \Phi_1^+ = \Phi^+ \setminus C_1, & \text{если } \text{col}(\beta_1) > 1, \\ \Phi^+ \setminus (C_1 \cup R_0), & \text{если } \text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = 0, \\ \Phi^+ \setminus (C_1 \cup R_i \cup R_{-i} \cup C_i), & \text{если } \text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = i \neq 0. \end{cases}$$

Определим число $\widetilde{m}$ для $\widetilde{\Phi}$ так же, как число m для Φ (см. параграф 2). Если оно четно, то положим $\widetilde{n} = \widetilde{m}/2$, а иначе $\widetilde{n} = (\widetilde{m}+1)/2$. Пронумеруем столбики корней из Φ_2^+ от 1 до $\widetilde{n}$, а строчки — от $-\widetilde{n}$ до $\widetilde{n}$ (пропуская 0, если $\widetilde{m}$ четно). Получаем искомое отображение π .

Той же буквой π мы будем обозначать соответствующий изоморфизм $\widetilde{u} \rightarrow u(\widetilde{\Phi})$, задаваемый правилом $e_\alpha \rightarrow e_{\pi(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi_2^+$.

Теперь мы исполним обещание, данное в параграфе 3: докажем, что построенное с помощью морского боя пространство $\mathfrak{p}$ является подалгеброй (а значит, поляризацией для канонической формы на орбите, ассоциированной с инволюцией, см. теорему 2.7).

Предложение 3.7. *Пусть $\Phi = B_n$ или D_n , $D \subset \Phi^+$ — произвольная базисная подсистема, $\mathfrak{p}$ — подпространство, построенное с помощью морского боя $\mathcal{F}_D$ (см. параграф 3). Тогда $\mathfrak{p}$ — подалгебра в u .*

Доказательство. Индукция по n . База индукции устанавливается прямой проверкой. Предположим, что предложение доказано для всех базисных подсистем всех систем корней типа B_N или D_N , $N < n$.

Обозначим через $\widetilde{D}$ базисную подсистему $\pi(D \setminus C_1) \subset \widetilde{\Phi}^+$; пусть $\widetilde{\mathcal{F}}$ — связанный с ней морской бой на $\widetilde{\Phi}^+$. Тогда $\mathcal{F}|_{\Phi_2^+} = \widetilde{\mathcal{F}} \circ \pi$, поэтому $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \widetilde{u}$ будет подалгеброй в $\widetilde{u}$ (а значит, и в u) по предположению индукции (как прообраз $\pi^{-1}(\mathfrak{p}_{\widetilde{\sigma}})$ подалгебры $\mathfrak{p}_{\widetilde{\sigma}} \subset u(\widetilde{\Phi})$).

Из определения морского боя (см. параграф 3) следует, что если α лежит в первом столбике Φ^+ , то $\mathcal{F}(\alpha) \neq -$, поэтому $u_1 \subset \mathfrak{p}$. Обозначим $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap v_1$; другими словами, $\mathfrak{p}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1^+ \setminus \Phi_2^+} e_\alpha$. Очевидно, что $\mathfrak{p} = u_1 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \widetilde{\mathfrak{p}}$ как векторные пространства. Поскольку $u_1 \triangleleft u$, а $\widetilde{\mathfrak{p}} \subset u$ — подалгебра по предположению индукции, для завершения доказательства достаточно показать, что $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}$. Рассмотрим возможные случаи.

1. $\text{col}(\beta) > 1$ или $\Phi = B_n, \beta_1 = \varepsilon_1$ (то есть $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = 0$). Тогда $\Phi_1^+ \setminus \Phi_2^+ = \emptyset$ и $\mathfrak{p}_1 = 0$.

2. $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta) = -i$ (то есть $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_i$). Тогда

$$\Phi_2^+ \setminus \Phi_1^+ = S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_i) = \{\varepsilon_j - \varepsilon_i, 2 \leq j \leq i-1\}$$

и $\mathfrak{p}_1$ — коммутативная подалгебра в $\mathfrak{u}$, поэтому осталось показать, что $[\widetilde{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}$.

Предположим, что $\alpha \in S^-(\varepsilon_1 - \varepsilon_i)$, $\beta \in \mathcal{P} \cap \Phi_2^+$ и $\alpha + \beta = \gamma \in \Phi^+$. (Напомним, что $\mathfrak{p} = \Phi_{\alpha \in \mathcal{P} e_\alpha}$, определение $\mathcal{P}$ см. в (2.3).) Поскольку Φ_2^+ (и даже Φ_1^+) не содержит R_{-i} и C_i , а $\alpha = \varepsilon_j - \varepsilon_i$ для некоторого $2 \leq j \leq i$, то $\gamma = \varepsilon_l - \varepsilon_i$ для некоторого $2 \leq l \leq i$ (так как члену $-\varepsilon_i$ не с чем сократиться). Значит, $\gamma \in R_i = S^-(\varepsilon_i - \varepsilon_i) \cup \{\varepsilon_1 - \varepsilon_i\}$; во всяком случае, $e_\gamma \in \mathfrak{p}$.

3. $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta) = i$ (то есть $\beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_i$). Здесь

$$\Phi_2^+ \setminus \Phi_1^+ = S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_i) = \{\varepsilon_j + \varepsilon_i, 2 \leq j \leq i-1\} \cup C_i,$$

$\mathfrak{p}_1$ — также коммутативная подалгебра в $\mathfrak{u}$, поэтому осталось показать, что $[\widetilde{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}$.

Доказательство аналогично предыдущему пункту. Именно, пусть $\alpha \in S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_i)$, $\beta \in \mathcal{P} \cap \Phi_2^+$ и $\alpha + \beta = \gamma \in \Phi^+$. Поскольку Φ_2^+ (и даже Φ_1^+) не содержит R_i , то члену ε_i в сумме $\alpha + \beta$ не с чем сократиться, поэтому он присутствует в γ , то есть $\gamma \in R_{-i} \cup C_i = S^-(\varepsilon_1 + \varepsilon_i) \cup \{\varepsilon_1 + \varepsilon_i\}$; во всяком случае, $e_\gamma \in \mathfrak{p}$.

Теперь, наконец, мы можем предъявить разложение вида (3.1) для неприводимого характера, ассоциированного с базисной подсистемой. Напомним, что мы построили полупрямое разложение $U = U_1 \rtimes V$, определили неприводимый характер ψ группы U_1 (см. (3.2)) и нашли его централизатор $V^\psi = V' = V_1 \rtimes \widetilde{U}$. При этом $\widetilde{\mathfrak{u}} = \text{Lie}(\widetilde{U}) \cong \mathfrak{u}(\widetilde{\Phi})$, так что все неприводимые характеры группы $\widetilde{U}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с коприсоединенными орбитами в $\widetilde{\mathfrak{u}}^*$ (см. (2.1)).

Пусть, как и ранее, $D = \{\beta_1 > \dots > \beta_t\}$ — базисная подсистема Φ^+ , $\xi \in (k^*)^t$, $\Omega = \Omega_{D, \xi}$ — ассоциированная с ней орбита и χ — соответствующий неприводимый характер группы U . Пусть $\widetilde{D} = \pi(D \setminus C_1)$ — базисная подсистема $\widetilde{\Phi}^+$, $\widetilde{\Omega} = \Omega_{\widetilde{D}, \widetilde{\xi}}$ — ассоциированная с ней орбита и $\widetilde{\chi}$ — соответствующий неприводимый характер группы $\widetilde{U}$. Здесь

$$\widetilde{\xi} = \begin{cases} \xi \in (k^*)^t, & \text{если } \text{col}(\beta_1) > 1, \\ (\xi_{\beta_2}, \dots, \xi_{\beta_t}) \in (k^*)^{t-1}, & \text{если } \text{col}(\beta_1) = 1. \end{cases}$$

Теорема 3.8. *Имеет место равенство*

$$\chi = \text{Ind}_{U_1 \rtimes V'}^U ((\psi \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot (\widetilde{\chi} \circ \pi_{\widetilde{U}}^{U_1 \rtimes V'})). \quad (3.4)$$

Здесь мы обозначили $\pi_{\widetilde{U}}^{U_1 \rtimes V'} = \pi_{V'}^{V'} \circ \pi_{V'}^{U_1 \rtimes V'}$, имея в виду, что $V' = V_1 \rtimes \widetilde{U}$.

Доказательство. Положим $P = \exp(\mathfrak{p}) \subset U$, $\widetilde{P} = \exp(\widetilde{\mathfrak{p}}) \subset \widetilde{U}$; отметим, что $P = U_1 \rtimes (V_1 \rtimes \widetilde{P})$. Обозначим функцию, стоящую в правой части (3.4),

через η . Согласно теореме 2.1,

$$\chi = \text{Ind}_P^U(\theta \circ f \circ \ln), \quad \widetilde{\chi} = \text{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{U}}(\theta \circ f \circ \ln).$$

Разобьем дальнейшие рассуждения на ряд шагов.

1. Если $y \in P$, то $f(\ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y)) = f(\ln \pi_P^P(y))$. В самом деле,

$$\pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y) = (\pi_{V_1}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}} \circ \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P)(y) \cdot (\pi_{\widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}} \circ \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P)(y) = \pi_{V_1}^P(y) \cdot \pi_{\widetilde{P}}^P(y).$$

Пусть $u = \ln \pi_{V_1}^P(y) \in \mathfrak{p}$, $v = \ln \pi_{\widetilde{P}}^P(y) \in \mathfrak{p}$; тогда, согласно (1.4),

$$\pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y) = \exp(u) \exp(v) = \exp(u + v + \tau), \quad \text{где } \tau \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}],$$

а значит, $\ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y) = \ln \pi_{V_1}^P(y) + \ln \pi_{\widetilde{P}}^P(y) + \tau$. Но $\mathfrak{p}$ — поляризация для f , поэтому $f(\tau) = 0$. В то же время, $\ln \pi_{V_1}^P(y) \in \mathfrak{v}_1$, а $f|_{\mathfrak{v}_1} \equiv 0$, очевидно (см. определение $\mathfrak{v}_1$ в (3.3)). Отсюда следует, что

$$f(\ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y)) = f(\ln \pi_{V_1}^P(y)) + f(\ln \pi_{\widetilde{P}}^P(y)) + f(\tau) = f(\ln \pi_{\widetilde{P}}^P(y)).$$

2. Если $y \in P$, то $f(\ln y - \ln \pi_{\widetilde{P}}^P(y) - \ln \pi_{U_1}^P(y)) = 0$. Доказательство аналогично предыдущему пункту. Действительно, если $u = \ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y) \in \mathfrak{p}$, $v = \ln \pi_{U_1}^P(y) \in \mathfrak{p}$, то, согласно (1.4),

$$y = \pi_{U_1}^P(y) \cdot \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y) = \exp(u) \exp(v) = \exp(u + v + \tau), \quad \text{где } \tau \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}],$$

а значит, $\ln y = \ln \pi_{U_1}^P(y) + \ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y) + \tau$. Но $\mathfrak{p}$ — поляризация для f , поэтому $f(\tau) = 0$, а $f(\ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^P(y)) = f(\ln \pi_{\widetilde{P}}^P(y))$ в силу шага 1.

3. Пусть $\mathcal{G} = A \rtimes B$ — конечная группа, C — подгруппа в B и λ — комплексный характер группы C . Тогда $\text{Ind}_{A \rtimes C}^{\mathcal{G}}(\lambda \circ \pi_C^{A \rtimes C}) = (\text{Ind}_C^B \lambda) \circ \pi_B^{\mathcal{G}}$. Это [15, Proposition 1.2].

4. Применим шаг 3 в случае $\mathcal{G} = V_1 \rtimes \widetilde{U}$, $A = V_1$, $B = \widetilde{U}$, $C = \widetilde{P}$, $\lambda = \theta \circ f \circ \ln$. Получаем;

$$\text{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{U}}(\theta \circ f \circ \ln) \circ \pi_{\widetilde{U}}^{V_1 \rtimes \widetilde{U}} = \text{Ind}_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{U}}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{\widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}}).$$

А теперь применим шаг 3 еще раз в случае $\mathcal{G} = U_1 \rtimes V'$, $A = U_1$, $B = V' = V_1 \rtimes \widetilde{U}$, $C = V_1 \rtimes \widetilde{P}$, $\lambda = \theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{\widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}}$. Получаем:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{U}}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{\widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}}) \circ \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{U}}^{U_1 \rtimes V'} &= \text{Ind}_{U_1 \rtimes (V_1 \rtimes \widetilde{P})}^{U_1 \rtimes V'}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{\widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}} \circ \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{U_1 \rtimes V_1 \rtimes \widetilde{P}}) = \\ &= \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_P^P). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $V' = V_1 \rtimes \widetilde{U}$, имеем:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{U}}(\theta \circ f \circ \ln) \circ \pi_{\widetilde{U}}^{U_1 \rtimes V'} &= (\text{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{U}}(\theta \circ f \circ \ln)) \circ \pi_{\widetilde{U}}^{V_1 \rtimes \widetilde{U}} \circ \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{U}}^{U_1 \rtimes V'} = \\ &= \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_P^P). \end{aligned}$$

5. Преобразуем правую часть (3.4) с учетом шага 4:

$$\begin{aligned}\eta &= \text{Ind}_{U_1 \rtimes V'}^U ((\psi \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot (\tilde{\chi} \circ \pi_{\bar{U}}^{U_1 \rtimes V'})) = \\ &= \text{Ind}_{U_1 \rtimes V'}^U ((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot (\text{Ind}_{\bar{P}}^{\bar{U}} (\theta \circ f \circ \ln) \circ \pi_{\bar{U}}^{U_1 \rtimes V'})) = \\ &= \text{Ind}_{U_1 \rtimes V'}^U ((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'} (\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_P^P)).\end{aligned}$$

6. Имеет место равенство

$$\text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'} (\theta \circ f \circ \ln) = (\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'} (\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_P^P).$$

Действительно, пусть $H \subset U_1 \rtimes V'$ — произвольная система представителей $(U_1 \rtimes V')/P$ (на самом деле, $H \subset V'$, ибо $U_1 \subset P$). Тогда для любого $x \in U_1 \rtimes V'$

$$\begin{aligned}((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'} (\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_P^P))(x) &= \\ = \theta(f(\ln \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}(x))) \cdot \sum_{h \in H | h^{-1} x h \in P} \theta(f(\ln \pi_P^P(h^{-1} x h))) &= \\ = \sum_{h \in H | h^{-1} x h \in P} \theta(f(\ln \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}(x) + \ln \pi_P^P(h^{-1} x h))).\end{aligned}$$

Но $h \in B$ влечет $h^{-1} \pi_A^G(x) h = \pi_A^G(h^{-1} x h)$ для произвольной конечной группы $\mathcal{G} = A \rtimes B$ и произвольных $x \in G$, $h \in B$. В нашей ситуации это означает, что

$$f(\ln \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}(x)) = f(\ln(h^{-1} \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}(x) h)) = f(\ln \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}(h^{-1} x h)),$$

поскольку $h \in H \subset V' = V^\Psi$, см. лемму 3.5.

Кроме того, раз $h^{-1} x h \in P$, то $\pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}(h^{-1} x h) = \pi_{U_1}^P(h^{-1} x h)$. Используя шаг 2, получаем:

$$\begin{aligned}((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'} (\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_P^P))(x) &= \\ = \sum_{h \in H | h^{-1} x h \in P} \theta(f(\ln \pi_{U_1}^P(x) + \ln \pi_P^P(h^{-1} x h))) &= \\ = \sum_{h \in H | h^{-1} x h \in P} \theta(f(\ln h^{-1} x h)) = \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'} (\theta \circ f \circ \ln).\end{aligned}$$

7. Комбинируя шаги 5 и 6, получаем, что

$$\eta = \text{Ind}_{U_1 \rtimes V'}^U \text{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'} (\theta \circ f \circ \ln) = \text{Ind}_P^U (\theta \circ f \circ \ln) = \chi,$$

что и требовалось доказать.

Итак, вычисление неприводимого характера, ассоциированного с произвольной базисной подсистемой, сводится, фактически, к вычислению характера в максимальной унитарной подгруппе ортогональной группы меньшего ранга. Этот индуктивный переход позволит нам доказать формулу для размерности орбиты, ассоциированной с базисной подсистемой.

4. Формула для размерности

Мы сохраняем все обозначения из предыдущих параграфов. В частности, $D = \{\beta_1 > \dots > \beta_l\}$ — базисная подсистема Φ^+ , $\Omega = \Omega_{D, \xi}$ — ассоциированная с ней коприсоединенная орбита группы U , χ — соответствующий неприводимый характер этой группы. Напомним, что с D можно связать инволюцию σ в группе Вейля W , положив $\text{Supp}(\sigma) = D$ (см. (1.3)). Наша

цель в этом параграфе — охарактеризовать размерность Ω во "внутренних" терминах группы Вейля W (точнее, в терминах инволюции σ), комбинируя теорему 3.8 со следствием 2.8.

Напомним, что мы определили систему корней $\tilde{\Phi}$ (пусть $\tilde{W}$ — ее группа Вейля); через $\tilde{\sigma} \in \tilde{W}$ обозначили инволюцию с носителем $\text{Supp}(\tilde{\sigma}) = \tilde{D} = \pi(D \setminus C_1)$ (отображение $\pi: \Phi_2^+ \rightarrow \tilde{\Phi}^+$ определяется в лемме 3.6). Пусть также $\sigma_2 \in W$ — инволюция с носителем $D \cap \Phi_2^+$. Для произвольной инволюции $\tau \in W(\Phi)$ положим

$$\Phi_\tau = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \tau(\alpha) < 0, \text{ то есть } \tau(\alpha) \in \Phi^-\}.$$

Вычисление $\dim \Omega$ основано, по сути, на сравнении множеств Φ_σ , Φ_{σ_2} и $\tilde{\Phi}_{\tilde{\sigma}}$.

Нам понадобятся еще несколько обозначений. Для произвольной инволюции $\tau \in W(\Phi)$, носитель которой — базисная подсистема, через $l(\tau)$ (соотв., $s(\tau)$) будем обозначать длину редуцированного (самого короткого) разложения τ в произведение простых (соотв., любых) отражений (то есть $l(\tau)$ — это длина τ в группе Вейля). Как известно, $l(\tau) = |\Phi_\tau|$. Определим также число $d(\tau)$ по формуле

$$d(\tau) = \begin{cases} \#\{\beta \in \text{Supp}(\tau) \mid \text{col}(\beta) > i, \text{row}(\beta) < 0\}, & \text{если } \Phi = B_n, \varepsilon_i \in \text{Supp}(\tau), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $\text{Supp}(\tau)$ — базисная подсистема (см. (1.2)), он не может содержать более одного корня вида ε_i , так как все они лежат в нулевой строке, поэтому число $d(\tau)$ корректно определено.

Пример 4.1. Пусть $\Phi = B_6$, $D = \text{Supp}(\sigma) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_6, \varepsilon_3 + \varepsilon_5\}$ (ниже изображена диаграмма $(\Phi, \mathcal{F})$, соответствующая морскому бою $\mathcal{F} = \mathcal{F}_D$). Тогда $d(\sigma) = 2$.

	1	2	3	4	5	6	0	-6	-5	-4	-3	-2	-1
1													
2	+												
3	+	+											
4	+	+	+										
5	+	+	•	•									
6	+	•	•	•	•								
0	⊗	—	—	—	—	—							
-6	•	⊗	—	—	—	0							
-5	•	•	⊗	—	0								
-4	•	•	•	0									
-3	•	•	0										
-2	•	0											
-1	0												

Для доказательства основного результата этого параграфа мы изучим,

как связаны между собой характеристики $l(\sigma)$ и $l(\tilde{\sigma})$ для различных случаев расположения корня β_1 . Очевидно, что если $\text{col}(\beta_1) > 1$, то $l(\sigma) = l(\tilde{\sigma})$ (так как $\Phi_2^+ = \Phi_1^+ = \Phi^+ \setminus C_1$).

Пусть $\text{col}(\beta_1) = 1$, $\text{row}(\beta_1) = \pm i \neq 0$ (то есть $\beta_1 = \varepsilon_1 \mp \varepsilon_i$). Поскольку $\pi^{-1}(\tilde{\Phi}^+) = \Phi_2^+$, а Φ_2^+ не содержит C_1, C_i, R_i и R_{-i} , то для $\alpha \in \Phi_2^+$ условия $\sigma(\alpha) < 0$, $\sigma_2(\alpha) < 0$ и $\tilde{\sigma}(\pi(\alpha)) < 0$ равносильны.

Понятно также, что если $\alpha \in C_1$, то $\sigma_2(\alpha) > 0$; при этом $\sigma(\alpha) < 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in S^+(\beta_1) \cup \{\beta_1\}$, то есть $\alpha \leq' \beta_1$ (или, что равносильно, $\text{row}(\alpha) \leq \text{row}(\beta_1)$). Аналогично, если $\alpha = \varepsilon_i \in R_0$, то $\sigma_2(\alpha) = \alpha > 0$, а $\sigma(\alpha) > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{row}(\beta_1) > 0$.

Значит, Φ_{σ_2} получается из $\pi^{-1}(\tilde{\Phi}_{\tilde{\sigma}})$ добавлением тех корней из $(R_i \cup R_{-i} \cup C_i) \setminus (C_1 \cup R_0)$, которые под действием инволюции σ_2 становятся отрицательными (мы полагаем $R_0 = \emptyset$ в случае $\Phi = D_n$).

Лемма 4.2. Пусть $\sigma, \tilde{\sigma}$ определены, как раньше, и $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_i$, $2 \leq i \leq n$. Тогда $l(\sigma) = l(\tilde{\sigma}) + 2i - 3$.

Доказательство. Ввиду предыдущих замечаний, $\Phi_{\sigma} \cap C_1$ состоит ровно из $(i-2)$ корней вида $\varepsilon_1 - \varepsilon_j$, $1 < j < i$ (это корни из $S^+(\beta_1)$), и самого корня β_1 .

Предположим, что $\alpha = \varepsilon_j + \varepsilon_i \in R_{-i}$, $1 < j < i$. Поскольку среди $\beta_2, \dots, \beta_l$ нет корней, строчки или столбики которых имели бы номер i , то $\sigma_2(\alpha) = \varepsilon_i \pm \varepsilon_l$ для некоторого l . В любом случае, $\sigma(\alpha) = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_l > 0$.

Предположим теперь, что $\alpha = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \in C_i$, $i < j \leq n$. Тогда $\sigma_2(\alpha) = \varepsilon_i \pm \varepsilon_l$ для некоторого l (знаки независимы), и $\sigma(\alpha) = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_l > 0$. Наконец, при $\alpha = \varepsilon_j - \varepsilon_i \in R_i$, $1 < j < i$ имеем $\sigma(\alpha) = -\varepsilon_1 \pm \dots < 0$ всегда.

Следовательно, все корни из $R_{-i} \cup C_i$ отображаются инволюцией σ в положительные корни, а все корни из R_i — в отрицательные (то есть действие на эти корни инволюции σ_2 не имеет значения). Итого:

$$\begin{aligned} l(\sigma) &= |\Phi_{\sigma}| = |\pi^{-1}(\tilde{\Phi}_{\tilde{\sigma}}) \cup R_i \cup S^+(\beta_1)| = |\tilde{\Phi}_{\tilde{\sigma}}| + |R_i| + |S^+(\beta_1)| = \\ &= l(\tilde{\sigma}) + (i-1) + (i-2) = l(\tilde{\sigma}) + 2i - 3, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4.3. Пусть $\sigma, \tilde{\sigma}$ определены, как раньше, и $\beta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_i$, $2 \leq i \leq n$. Тогда $l(\sigma) = l(\tilde{\sigma}) + 2(m-i) - 3$.

Доказательство. Ввиду предыдущих замечаний, $\Phi_{\sigma} \cap C_1$ состоит ровно из $(m-i-2)$ корней вида $\{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j\}$, $1 < j < i-1$ (это корни из $S^+(\beta_1)$; в случае $\Phi = B_n$ к ним добавляется еще корень ε_1), и самого корня β_1 .

Предположим, что $\alpha = \varepsilon_j - \varepsilon_i \in R_i$, $1 < j < i$. Поскольку среди $\beta_2, \dots, \beta_l$ нет корней, строчки или столбики которых имели бы номер i , то $\sigma_2(\alpha) = -\varepsilon_i \pm \varepsilon_l$ для некоторого l . В любом случае, $\sigma(\alpha) = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_l > 0$.

Предположим теперь, что $\alpha = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \in C_i$, $i < j \leq n$. Тогда $\sigma_2(\alpha) = \varepsilon_i \pm \varepsilon_l$ для некоторого l (знаки независимы), и $\sigma(\alpha) = -\varepsilon_1 \pm \varepsilon_l < 0$. Наконец, при $\alpha = \varepsilon_j + \varepsilon_i \in R_{-i}$, $1 < j < i$ имеем $\sigma(\alpha) = -\varepsilon_1 \pm \dots < 0$ всегда.

Следовательно, все корни из R_i отображаются инволюцией σ в положительные корни, а все корни из $R_{-i} \cup C_i$ — в отрицательные (то есть действие

на эти корни инволюции σ_2 не имеет значения). Итого:

$$l(\sigma) = |\Phi_\sigma| = |\pi^{-1}(\widetilde{\Phi}_{\widetilde{\sigma}}) \cup R_{-i} \cup C_i \cup S^+(\beta_1)| = |\widetilde{\Phi}_{\widetilde{\sigma}}| + |R_{-i}| + |C_i| + |S^+(\beta_1)| = l(\widetilde{\sigma}) + (i-1) + (m-2i) + (m-i-2) = l(\widetilde{\sigma}) + 2(m-i) - 3,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta_1 = \varepsilon_1$ (то есть $\text{row}(\beta_1) = 0$).

Лемма 4.4. Пусть $\Phi = B_n$, $\sigma, \widetilde{\sigma}$ определены, как раньше, и $\beta_1 = \varepsilon_1$. Тогда $l(\sigma) = l(\widetilde{\sigma}) + 2(n + d(\sigma)) - 1$.

Доказательство. Здесь $\Phi_2^+ = \Phi_1^+ = \Phi^+ \setminus (C_1 \cup R_0)$. Ясно, что $r_{\beta_1}|_{\Phi_2^+} = \text{id}$, поэтому для $\alpha \in \Phi_2^+$ условия $\sigma(\alpha) < 0$, $\sigma_2(\alpha) < 0$ и $\widetilde{\sigma}(\pi(\alpha)) < 0$ равносильны. Значит, Φ_σ получается из $\pi^{-1}(\widetilde{\Phi}_{\widetilde{\sigma}})$ добавлением тех корней из $C_1 \cup R_0$, которые под действием инволюции σ становятся отрицательными.

В данном случае $\Phi_\sigma \cap C_1 = C_1$ состоит ровно из $(2n-1)$ корня. Предположим, что $\alpha = \varepsilon_i \in R_0$, $2 \leq i \leq n$. Тогда $r_{\beta_1}(\alpha) = \alpha$, поэтому $\sigma(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$. Но $\sigma_2(\alpha) = \pm \varepsilon_l < 0$ тогда и только тогда, когда $\beta = \varepsilon_i + \varepsilon_l \in \text{Supp}(\sigma_2)$ для некоторого $l > 1$ (причем каждый такой β добавляет в Φ_σ сразу два корня: ε_i и ε_l). Итого:

$$l(\sigma) = |\Phi_\sigma| = |\pi^{-1}(\widetilde{\Phi}_{\widetilde{\sigma}})| + |C_1| + 2 \cdot \#\{\beta \in \text{Supp}(\sigma_2) \mid \text{row}(\beta) < 0\} = l(\widetilde{\sigma}) + (2n-1) + 2d(\sigma) = l(\widetilde{\sigma}) + 2(n + 2d(\sigma)) - 1,$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы в состоянии получить формулу, описывающую размерность орбиты, ассоциированной с базисной подсистемой.

Теорема 4.5. Пусть $\Phi = B_n$ или D_n , W — ее группа Вейля, $D = \{\beta_1 > \dots > \beta_t\}$ — базисная подсистема Φ^+ , $\sigma \in W$ — инволюция с носителем $\text{Supp}(\sigma) = D$ и $\Omega = \Omega_{D, \xi}$ — ассоциированная орбита (для некоторого $\xi \in (k^*)^t$). Тогда размерность этой орбиты равна

$$\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2d(\sigma).$$

Доказательство. Пусть χ — неприводимый характер группы U , соответствующий орбите Ω (см. (2.1)). Будем через $\deg \chi$ обозначать размерность соответствующего представления; тогда $\deg \chi = q^{\frac{1}{2} \dim \Omega}$ (см. теорему 2.1).

Доказательство будем проводить индукцией по n (база индукции проверяется непосредственно). Ввиду теоремы 3.8 (см. (3.4)),

$$\deg \chi = \deg \widetilde{\chi} \cdot [U : (U_1 \rtimes V')].$$

Здесь $\widetilde{\Omega}$ — орбита, ассоциированная с базисной подсистемой $\widetilde{D}$, а $\widetilde{\chi}$ — соответствующий неприводимый характер группы $\widetilde{U}$. В силу предположения индукции, $\deg \widetilde{\chi} = l(\widetilde{\sigma}) - s(\widetilde{\sigma}) - 2d(\widetilde{\sigma})$. Исследуем различные варианты расположения корня β_1 .

1. $\text{col}(\beta_1) > 1$. Это тривиальный случай: здесь $l(\sigma) = l(\widetilde{\sigma})$, $s(\sigma) = s(\widetilde{\sigma})$, $d(\sigma) = d(\widetilde{\sigma})$ и $\dim \Omega = \dim \widetilde{\Omega}$. Действительно, $\Phi_2^+ = \Phi_1^+ = \Phi^+ \setminus C_1$; ввиду след-

ствия 2.8, размерность Ω (соотв. $\widetilde{\Omega}$) равна количеству символов $\pm$ в диаграмме $(\Phi, \mathcal{F}_\sigma)$ (соотв. $(\widetilde{\Phi}, \widetilde{\mathcal{F}})$, где $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_\sigma^-$). Но $\mathcal{F}|_{\Phi_2^+} = \widetilde{\mathcal{F}} \circ \pi$, а $\mathcal{F}(\alpha) = \bullet$ для любого $\alpha \in C_1$, поэтому

$$\dim \widetilde{\Omega} = \#\{\alpha \in \Phi_2^+ \mid \mathcal{F}(\alpha) = \pm\} = \#\{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathcal{F}(\alpha) = \pm\} = \dim \Omega.$$

2. $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = i, 1 \leq i \leq n$ (то есть $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_i$). Здесь $d(\sigma) = d(\widetilde{\sigma})$. Ясно, что

$$\begin{aligned} [U : (U_1 \rtimes V')] &= q^{|S^-(\beta_1)|} = q^{i-2}, \quad \text{поэтому} \\ \deg \chi &= q^{\frac{1}{2} \dim \Omega} = \deg \widetilde{\chi} \cdot [U : (U_1 \rtimes V')] = q^{\frac{1}{2} \dim \widetilde{\Omega} + i - 2}, \\ \dim \Omega &= \dim \widetilde{\Omega} + 2(i - 2). \end{aligned}$$

С другой стороны, с учетом леммы 4.2 и предположения индукции, получаем, что

$$\begin{aligned} l(\sigma) - s(\sigma) - 2d(\sigma) &= (l(\widetilde{\sigma}) + 2i - 3) - (s(\widetilde{\sigma}) + 1) - 2d(\widetilde{\sigma}) = \\ &= \dim \widetilde{\Omega} + 2(i - 2) = \dim \Omega. \end{aligned}$$

3. $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = -i, 1 \leq i \leq n$ (то есть $\beta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_i$). Рассуждения такие же, как и в предыдущем случае. А именно, $d(\sigma) = d(\widetilde{\sigma})$ и, с учетом леммы 4.3,

$$\begin{aligned} [U : (U_1 \rtimes V')] &= q^{|S^-(\beta_1)|} = q^{m-i-2}, \\ \deg \chi &= q^{\frac{1}{2} \dim \Omega} = \deg \widetilde{\chi} \cdot [U : (U_1 \rtimes V')] = q^{\frac{1}{2} \dim \widetilde{\Omega} + m - i - 2}, \\ \dim \Omega &= \dim \widetilde{\Omega} + 2(m - i - 2), \\ l(\sigma) - s(\sigma) - 2d(\sigma) &= (l(\widetilde{\sigma}) + 2(m - i) - 3) - (s(\widetilde{\sigma}) + 1) - 2d(\widetilde{\sigma}) = \\ &= \dim \widetilde{\Omega} + 2(m - i - 2) = \dim \Omega. \end{aligned}$$

4. $\text{col}(\beta_1) = 1, \text{row}(\beta_1) = 0$ (то есть $\Phi = B_n$ и $\beta_1 = \varepsilon_1$). Тогда $d(\widetilde{\sigma}) = 0$, поэтому, с учетом леммы 4.4,

$$\begin{aligned} [U : (U_1 \rtimes V')] &= q^{|S^-(\beta_1)|} = q^{n-1}, \\ \deg \chi &= q^{\frac{1}{2} \dim \Omega} = \deg \widetilde{\chi} \cdot [U : (U_1 \rtimes V')] = q^{\frac{1}{2} \dim \widetilde{\Omega} + n - 1}, \\ \dim \Omega &= \dim \widetilde{\Omega} + 2(n - 1), \\ l(\sigma) - s(\sigma) - 2d(\sigma) &= (l(\widetilde{\sigma}) + 2(n + d(\sigma)) - 1) - (s(\widetilde{\sigma}) + 1) - 2d(\sigma) = \\ &= \dim \widetilde{\Omega} + 2(n - 1) = \dim \Omega. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример 4.6. Пусть $\Phi = B_6$, σ — инволюция из примера 4.1, то есть $\text{Supp}(\sigma) = D = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_6, \varepsilon_3 + \varepsilon_5\}$. Согласно следствию 2.8, размерность любой ассоциированной с D орбиты равна количеству символов $\pm$ на диаграмме $(\Phi, \mathcal{F}_D)$, то есть $\dim \Omega = 18$.

В то же время,

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma &= C_1 \cup \{\varepsilon_2 - \varepsilon_4, \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_2 + \varepsilon_5, \varepsilon_2 + \varepsilon_6\} \cup \\ &\cup \{\varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_3 + \varepsilon_5, \varepsilon_3 + \varepsilon_6\} \cup \{\varepsilon_4 + \varepsilon_5, \varepsilon_4 + \varepsilon_6\} \cup \{\varepsilon_5, \varepsilon_5 + \varepsilon_6\} \cup \{\varepsilon_6\}. \end{aligned}$$

Значит, $l(\sigma) = |\Phi_\sigma| = 25$, $s(\sigma) = |\text{Supp}(\sigma)| = 3$, поэтому, ввиду теоремы 4.5,

$$\dim \Omega = l(\sigma) - s(\sigma) - 2d(\sigma) = 25 - 3 - 2 \cdot 2 = 18.$$

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А.Н. Панову за постановку задачи и внимание к работе.

Здесь мы приводим пошаговое заполнение диаграммы $(\Phi, \mathcal{F}_D)$ из примера 2.5. Пусть $\Phi = B_6$, $D = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_5, \varepsilon_3 - \varepsilon_6\}$.



[illegible]

Шаг 4

	1	2	3	4	5	6	0	-6	-5	-4	-3	-2	-1
1													
2	+												
3	+	+											
4	+	+	+										
5	+	•	•	•									
6	+	+	⊗	-	-								
0	⊗	-	-	-	-	-							
-6	•	+	•	•	-	0							
-5	•	⊗	-	-	0								
-4	•	•	•	0									
-3	•	•	0										
-2	•	0											
-1	0												

Литература

- [1] Andre, C.A.M. Basic characters of the unitriangular group / C.A.M. Andre // J. Algebra. – 1995. – V. 175. – P. 287–319.
- [2] Andre, C.A.M. The basic character table of the unitriangular group / C.A.M. Andre // J. Algebra. – 2001. – V. 241. – P. 437–471.
- [3] Andre, C.A.M. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group / C.A.M. Andre // J. Algebra. – 1995. – V. 176. – P. 959–1000.
- [4] Andre, C.A.M, Neto A.M. Super-characters of finite unipotent groups of types B_n , C_n and D_n / C.A.M. Andre // J. Algebra. – 2006. – V. 305. – P. 394–429.
- [5] Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли: группы Кокстера и системы Титса, группы, порожденные отражениями, системы корней / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1972.
- [6] Carter, R.W. Simple groups of Lie type / R.W. Carter. – London: Wiley, 1972.
- [7] Хамфри, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Дж. Хамфри. – М.: МЦНМО, 2003.
- [8] Игнатъев, М.В. Субрегулярные характеры унитарной группы над конечным полем / Игнатъев М.В. // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13. – Вып. 5 – с. 103–125, см. также arXiv:math.RT/0801.3079v2.
- [9] Игнатъев М.В., Панов А.Н. Коприсоединенные орбиты группы $UT(7, K)$ / М.В. Игнатъев, А.Н. Панов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13> – Вып. 5. – С. 127–159, см. также arXiv: math.RT/0603649v3.

- [10] Kazhdan, D. Proof of Springer's hypothesis / D.Kazhdan // Israel J. Math.. – 1977. – V. 28. – P. 272–286.
- [11] Кириллов, А.А. Лекции по методу орбит // А.А.Кириллов. – Новосибирск: Научная книга ИДМИ, 2002.
- [12] Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли / А.А.Кириллов // УМН. – 1962. – Т. 17. – С. 57–110.
- [13] Кириллов, А.А. Метод орбит и конечные группы / А.А.Кириллов. – М.: МЦНМО, МК НМУ, 1998.
- [14] Kirillov, A.A. Variations on the triangular theme / A.A.Kirillov // Amer. Math. Soc. Transl. – 1995. – V. 169 – P. 43–73.
- [15] Lehrer, G.I. Discrete series and the unipotent subgroup / G.I.Lehrer // Composito Math. – 1974. – V. 28. – Fasc. 1. – P. 9–19.
- [16] Mukherjee S. Coadjoint orbits for A_{n-1}^+ , B_n^+ and D_n^+ / S.Mukherjee. – arXiv: math.RT/0501332v1.
- [17] Панов, А.Н. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединенные орбиты / А.Н.Панов // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2007. – Т. 349. – С. 150–173, см. также arXiv: math.RT/0801.3022v1.
- [18] Srinivasan, B. Representations of finite Chevalley groups / B.Srinivasan // Lecture Notes in Math. – V. 366. – New York: Springer–Verlag, 1974.

Поступила в редакцию 24/V/2008;
в окончательном варианте — 16/VI/2008.

**BASIC SUBSYSTEMS OF ROOT SYSTEMS
OF TYPES B_n AND D_n AND ASSOCIATED
COADJOINT ORBITS³**

© 2008 M.V. Ignatev⁴

To each basic subsystem of root system of type B_n or D_n one can assign the set of coadjoint orbits of maximal unipotent subgroup of corresponding classical group over a finite field. We construct polarizations of the canonical forms on these orbits (Theorem 2.7) and describe the dimensions of these orbits in terms of the Weil group (Theorem 4.5).

Keywords: *basic subsystem, coadjoint orbit, canonical form, polarization.*

Paper received 24/V/2008;

Paper accepted 16/VI/2008.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

⁴Ignatev Mikhail Viktorovich (mihail_ignatev@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.