

УДК 513.6

НАДГРУППЫ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП

© 2008 Н.А. Вавилов,¹ А.В. Степанов²

Статья является систематическим обзором результатов о надгруппах элементарных подгрупп полупростых групп над коммутативным кольцом в группах точек других полупростых групп (вообще говоря, над другим коммутативным кольцом). В качестве общего контекста для систематизации результатов используется subgroup structure theorem Ашбахера. Особое внимание уделяется недавним результатам петербургских математиков. В частности, детально излагаются полученное Виктором Петровым, первым автором и Хон Ю. описание надгрупп классических групп и дальнейшие результаты Александра Лузгарева для исключительных групп (класс Ашбахера C_8), а также полученное вторым автором описание subring subgroups (класс Ашбахера C_5). Кроме того, анонсируются полученное Алексеем Ананьевским, первым автором и Сергеем Синчуком описание тензорных подгрупп (классы Ашбахера $C_4 + C_7$) и недавние результаты по надгруппам subsystem subgroups в исключительных группах (классы Ашбахера $C_1 + C_2$). В работе сформулированы 50 дальнейших нерешенных задач в этой области.

Ключевые слова: надгруппа, полупростая группа, группа Шевалле, коммутативное кольцо, исключительная группа, тензорная подгруппа.

Введение

В настоящей работе мы даем систематический обзор результатов о надгруппах (элементарных подгрупп) полупростых групп в группах Шевалле над коммутативными кольцами, полученных в последние годы нами совместно с Виктором Петровым, Хон Ю, Александром Лузгаревым и другими. Кроме того, мы формулируем несколько дальнейших нерешенных проблем в этой области, которые представляются нам наиболее интересными

¹Вавилов Николай Александрович (nikolai-vavilov@yandex.ru), кафедра высшей алгебры и теории чисел математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного Университета, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 28

²Степанов Алексей Владимирович (alexei@stepanov.spb.su), кафедра высшей математики №2 Санкт-Петербургского Электротехнического университета, Санкт-Петербург, ул. проф. Попова 5

и важными. Некоторые из этих задач уже обсуждались в [173, 174, 167, 34, 35], но многие публикуются здесь впервые.

А именно, пусть Φ — приведенная неприводимая система корней, R — коммутативное ассоциативное кольцо с 1, $G(\Phi, R)$ — какая-то группа Шевалле типа Φ над R , $E(\Phi, R)$ — ее элементарная подгруппа. Обычно мы рассматриваем односвязные группы.

Рассмотрим теперь какое-то другое коммутативное кольцо A , какую-то другую систему корней Δ , не обязательно неприводимую, и представление $\pi : G(\Delta, A) \rightarrow G(\Phi, R)$. Очевидно, существование такого представления накладывает чрезвычайно жесткие условия на кольца A и R .

В настоящей работе мы интересуемся главным образом описанием решетки подгрупп в $G = G(\Phi, R)$ содержащих $E = \pi(E(\Delta, A))$. Заметим, что мы рассматриваем именно надгруппы *совершенной* группы $\pi(E(\Delta, A))$, а вовсе не надгруппы большей группы $\pi(G(\Delta, A))$. На первый взгляд кажется, что задача описания надгрупп $\pi(G(\Delta, A))$ проще, но в действительности она как правило не допускает столь же естественного ответа.

Удобным контекстом, выделяющим несколько естественных классов больших полупростых подгрупп, является subgroup structure theorem Майкла Ашбахера [75–77, 115, 136, 111] и ее обобщения на исключительные группы, полученные Мартином Либекком и Гари Зейтцем [155, 133, 157–159, 137, 125, 126, 161]. В случае групп над полями имеются *многие сотни* работ, в которых изучаются надгруппы групп из этих классов. В частности, для алгебраически замкнутых и конечных полей возникающие здесь вопросы в основном решены.

В противоположность этому до недавнего времени о надгруппах групп из классов Ашбахера над кольцами было известно совсем немного. *Единственный* случай, который был *систематически* изучен в 1980-е годы в работах Петербургской школы, в первую очередь Зенона Боревица и авторов, это класс $C_1 + C_2$, subsystem subgroups [7–10, 17–19, 21, 38, 43, 52, 53, 57, 69, 70]. Впрочем, даже для этого класса полные доказательства были опубликованы лишь совсем недавно [22, 23].

Перспективы обобщения этих результатов на другие классы подгрупп широко обсуждались в различных работах, начиная с конца 1980-х годов. В частности, мы сами упоминали возможность таких обобщений в [173, 174, 147], но никаких детальных доказательств в общем случае так и не появилось. Однако, в самые последние годы положение начало стремительно меняться.

- Прежде всего, Виктору Петрову и первому автору [33–35, 63, 146] и, независимо, хотя и не столь исчерпывающим образом, Хон Ю [185–187] удалось полностью описать надгруппы классических групп, класс C_8 . Опираясь на эти работы и недавние работы по структурной теории исключительных групп Александр Лузгарев [58] получил важные продвижения в направлении описания надгрупп исключительных

групп. В частности, в замечательной работе [59] он полностью описал надгруппы группы Шевалле типа F_4 в группе Шевалле типа E_6 .

- В работах [164–166] второй автор смог полностью рассмотреть надгруппы *subring subgroups*, класс C_5 . Оказалось, что для групп, отвечающих системам корней с простыми связями, стандартный ответ, вообще говоря, имеет место лишь для некоторых совсем просто устроенных колец. Еще более удивительным было открытие того обстоятельства, что для групп, отвечающих системам корней с кратными связями, стандартный ответ имеет место для произвольных коммутативных колец.
- В работах Алексея Ананьевского, первого автора и Сергея Синчука [1], *Fortsetzung folgt*, получены ключевые продвижения в направлении описания надгрупп *tensoried subgroups*, класс C_4 . Эти результаты дают надежду на полное описание надгрупп класса $C_4 + C_7$, что до сих пор не было сделано даже для случая поля!
- Кроме того, в недавних работах первый автор, Александр Лузгарев, Сергей Николенко и Елена Филиппова [40] вернулись к задаче описания надгрупп *subsystem subgroups* и смогли понизить оценки в результатах относящихся к классическим группам, а также начать их перенос на подгруппы исключительных групп.

Общей чертой всех этих результатов является то, что все они оказались технически *гораздо* сложнее, чем это представлялось в 1990-е годы, а в некоторых случаях даже сами ответы разительно отличаются от тех, которые ожидались. Кроме того, в отличие от работ 1980-х годов, в которых использовалась главным образом элементарная техника линейной алгебры, теории групп и, отчасти, теории алгебр Ли и теории представлений, ключевую роль в большинстве недавних работ сыграли методы, пришедшие из теории алгебраических групп, коммутативной алгебры и алгебраической К-теории. В первую очередь это относится к методу локализации-пополнения [80, 81, 83, 34, 107–109, 168] и условиям стабильности нового поколения [82, 84, 146].

В настоящей работе мы детально описываем все эти достижения и обсуждаем перспективы описания надгрупп для самого трудного остающегося класса C_3 , *ring extension subgroups*, и для простых групп в неприводимых представлениях, класс $\mathcal{S}$. В нашей совместной работе с Хон Ю [168] можно найти много дальнейших деталей, в частности, обсуждение общей схемы, которая использовалась в большинстве опубликованных доказательств (построение уровня, вычисление нормализаторов, извлечение корневых элементов, ...), и локализационные доказательства основных предшествующих результатов.

Сразу отметим, что в настоящей работе мы обсуждаем только результаты о надгруппах полупростых групп в группах Шевалле над *коммутативным* кольцом. Эти результаты доказываются в терминах унитарных

элементов. В частности, в настоящей работе вообще *не упоминаются* результаты о надгруппах торов, анизотропных групп и т.д. Даже в тех случаях, когда эти результаты формулируются схожим образом, методы их доказательства основаны на использовании полупростых, а не унитарных элементов.

Кроме того, мы не приводим в библиографии работы, относящиеся к описанию различных классов надгрупп в случае поля, в тех случаях, когда для групп Шевалле они *уже перенесены* на произвольные коммутативные кольца. В частности, это относится даже к сыгравшим чрезвычайно важную роль в развитии теории работам Роджера Дая, Оливера Кинга, Ли Шанчжи, Евгения Башкирова [4] и многих других авторов. Заметим, впрочем, что во многих из этих работ трактуются изотропные, а не обязательно расщепимые группы, так что они *пока* далеко не полностью превзойдены нашими работами. Кроме того, мы не обсуждаем работы, относящиеся к конечным группам типа Ли, в тех случаях, когда мы не видим *никакой возможности* перенести их в полном объеме на произвольные коммутативные кольца. В частности, это относится к трудным работам Ирины Супруненко о надгруппах приводимых подгрупп, которые зависят от явной классификации представлений.

Перечислим несколько обзоров, в которых описание подгрупп трактовалось в близких аспектах. Это обзор первого автора о параболических подгруппах [14], обзор о надгруппах торов [20] (а также совместный с Владимиром Нестеровым частичный update [30]) и обзор о промежуточных подгруппах в группах Шевалле [174]. Написанные примерно в то же время обзоры Оливера Кинга [113] и Ли Шанчжи [121] покрывают только классические группы над телами (и главным образом только работы, выполненные в Китае). В настоящей работе мы вообще не обсуждаем общие вопросы описания промежуточных подгрупп, которым посвящен обзор Зенона Боревича и Курта Розенбаума [86]. Подгруппы групп типа Ли над конечным полем обсуждаются в великолепном обзоре Анатолия Кондратьева [55]. За последние годы в этой области был достигнут столь *фантастический* прогресс, что был бы весьма желателен полный update. В обзорах Мартина Либекка и Гари Зейтца [114, 125, 126, 133, 152, 154, 155, 158, 159, 161] обсуждается почти исключительно классификация максимальных подгрупп в группах типа Ли над алгебраически замкнутыми и конечными полями. Информацию о классическом периоде развития можно найти в замечательных обзорах Александра Залесского [48–50].

Что касается сформулированных ниже задач, с нашей точки зрения ни одна из них, даже те, для которых ожидаемое (стандартное) решение может быть получено известными методами, не является совсем очевидной. Решение каждой из них может составить содержание полноценной статьи длиной 20–30–40 страниц и хорошо смотрелось бы как глава кандидатской диссертации. Однако, полные решения некоторых из них (например, задачи о надгруппах *subsystem subgroups* в исключительных группах или задачи о

надгруппах тензорных произведений классических групп) *гораздо* сложнее и займут, вероятно, несколько сотен страниц.

1. Поле versus кольцо

В настоящей работе мы предполагаем основное кольцо R коммутативным. Некоторые из рассматриваемых нами задач можно ставить и для некоммутативных колец, но большинство из них не решены или решены совсем недавно даже для коммутативного случая. Сейчас мы коротко обсудим, какие примерно результаты можно ожидать для наиболее важных и часто рассматривавшихся классов колец.

Для алгебраических подгрупп над **алгебраически замкнутым полем** можно рассчитывать на решение *любого* разумного вопроса. С учетом классификации простых групп любой вопрос о подгруппах сводится к задаче теории представлений. Конечно, часто получение явных ответов, особенно в модулярной теории, представляет собой изрядное упражнение, и ведет к исключениям в малых характеристиках.

То же самое, в принципе, относится к группам над **конечными полями**. Разумеется, ответ для конечных полей часто сложнее, чем для абсолютного случая и, кроме маленьких характеристик, включает еще заметное число исключений, связанных с величиной поля, выполнением сравнений на его порядок и т.д. Типичный результат, специфический для этого случая, это явная классификация максимальных подгрупп в конечных группах типа Ли, полученная в работах Майкла Ашбахера, Гари Зейтца, Мартина Либека, Яна Саксла, Кая Магаарда, Донны Тестерман и других [75–77, 87, 98, 110, 114, 115, 125–142, 149, 152–162, 169–172]. Еще один типичный результат — описание надгрупп произвольных максимальных торов в работах Гари Зейтца [150, 151].

Ясно, что явные ответы такого типа невозможно обобщить даже на произвольные поля. Максимум, на что можно надеяться, это получение (гораздо более сложных) ответов для таких полей, как локальные или глобальные. С другой стороны, результаты перечисленных работ о максимальных подгруппах простых конечных и алгебраических групп могут служить ясным указанием на то, какие подгруппы редуктивных групп в общем случае следует рассматривать в качестве *больших*, и мы *очень* широко пользовались такого рода подсказками.

Над **общими полями** все еще можно надеяться на решение *почти* любого разумного вопроса о подгруппах в *изотропных* группах, если, конечно, не задаваться заведомо бессмысленными в такой общности вопросами типа классификации *всех* максимальных подгрупп. Типичными результатами, относящимися к полям, которые не могут быть перенесены *ни на какие* кольца³, являются описание классов сопряженности, явные разложения ти-

³Кроме тривиальных обобщений, типа прямых сумм полей.

па Брюа и явная классификация подгрупп, порожденных элементами или подгруппами специального вида (теоремы типа Маклафлина, бесконечное обобщение Франца Тиммесфельда теории квадратичных пар и его развитие в работах Ани Штайнбах, Ганса Кейперса, Евгения Башкирова и других, и т.д.).

Почти все результаты о надгруппах (но не о порождении!), которые имеют место для произвольного поля, справедливы также для **полулокальных колец**. Более того, во многих случаях такое обобщение чрезвычайно дешево и сводится к проведению факторизации по радикалу. Даже в тех случаях, когда факторизация по радикалу не является рутинной, она обычно *проще*, чем доказательство результата для случая поля. Типичный результат, специфический для полулокальных колец, это описание надгрупп расщепимого максимального тора. В то же время, единственной спецификой результатов о надгруппах полупростых подгрупп в этом случае является то, что в некоторых случаях можно слегка понизить оценки на ранги. В настоящей работе мы не обсуждаем такого рода дешевые обобщения и, как правило, не отражаем работы, относящиеся к полулокальным кольцам, в библиографии.

Несколько особняком стоят **арифметические кольца**, т.е. одномерные кольца, выделенные арифметическими условиями на элементы или идеалы, такие как эвклидовы, кольца главных идеалов, дедекиндовы и т.д. Группам над такими кольцами посвящено громадное количество работ. Впрочем, в большинстве из них арифметика используется не по существу, а чисто декоративно, для получения *более простых* доказательств. Например, в дедекиндовом кольце R коэффициенты λ, μ в линейных зависимостях $\lambda x + \mu y = 0$ между элементами $x, y \in R$ порождают единичный идеал. Ясно, что это позволяет получить гораздо более простые доказательства, чем для общего коммутативного кольца, где, вообще говоря, можно пользоваться только линейной зависимостью $xy - yx = 0$. Опять же, как правило, мы не отражаем в нашей библиографии многочисленные работы об описании надгрупп в группах Шевалле над арифметическими кольцами в тех случаях, когда мы знаем (или уверены), что их результаты верны в большей общности. Если до середины 1970-х годов такие работы могли считаться формально новыми, сегодня их следует рассматривать как незаконченные и их публикация не имеет никакого смысла.

В то же время, конечно, во многих работах арифметическая специфика используется самым существенным образом. С одной стороны, для дедекиндовых колец, в особенности для областей Хассе, часто удается явно параметризовать все возникающие группы, что невозможно в общем случае [10, 13, 15, 92]. Это связано с тем, что для таких колец явно вычисляются различные инварианты, например K_1 -функторы [3]. С другой стороны, для областей Хассе с бесконечной мультипликативной группой, удается понизить требования на ранги, хотя сделать это часто значительно сложнее, чем для полулокальных колец [13, 16]. Это упражнение на тему ранней

стабилизации [67, 41, 112, 143]. А именно, для таких колец стабилизация наступает на единицу раньше того места, где ей положено наступать исходя из соображений размерности. Поэтому большинство сформулированных в настоящей работе задач допускают арифметический вариант, в котором требование на ранг понижено на 1.

С нашей точки зрения *естественной* общностью для рассмотрения большинства вопросов о подгруппах является класс всех **коммутативных колец**. Во-первых, за исключением серии A_l , никаких групп над некоммутативными кольцами и не существует. Во-вторых, при правильном подходе для коммутативных колец удастся дать простые и естественные доказательства и написать явные полиномиальные формулы.

В то же время, многие вопросы, относящиеся к полной линейной и унитарной группам, рассматривались и над различными классами некоммутативных колец. Обычно это делалось для различных классов **конечномерных колец**. При этом в разных работах использовались самые различные аватары конечномерности: конечность стабильного ранга или какие-то другие условия стабильности, условия типа нетеровости, условия типа Оре, наличие полиномиального тождества и т.д. В настоящей работе мы не имеем возможности систематически обсуждать все результаты такого рода. Большое количество глубоких результатов такого типа было получено московской школой, в первую очередь Александром Михалевым (ст.), Игорем Голубчиком, Леонидом Васерштейном и их учениками и последователями. Обсуждение некоторых условий конечности, их роли в простейших структурных результатах, типа описания нормальных подгрупп, и дальнейшие ссылки можно найти в наших работах [39, 85, 109, 167].

2. Основные обозначения

В настоящем параграфе мы совсем коротко напомним основные обозначения, относящиеся к классическим группам и группам Шевалле, см. [11, 68, 88, 105], см. также дальнейшие ссылки в [24, 26–28, 31, 173–177]. Все наши обозначения, связанные с системами корней, нумерация простых корней и т.д. следуют [12].

Зафиксируем ассоциативное кольцо R с единицей. Как обычно, R^* обозначает множество обратимых элементов R . Запись $I \trianglelefteq R$ означает, что I является идеалом в R . За исключением нескольких мест, где мы вскользь упоминаем некоммутативные обобщения, основное кольцо всегда предполагается *коммутативным*. Наши унитарные группы определены над форменными кольцами (R, Λ) с инволюцией и форменным параметром Λ , все основные определения можно найти в [78, 79, 105, 85, 107, 62, 146, 46].

Пусть Φ — приведенная система корней ранга l , а $\mathcal{P}$ — решетка, лежащая между решеткой корней $\mathcal{Q}(\Phi)$ и решеткой весов $\mathcal{P}(\Phi)$. Мы фиксируем на Φ некоторый порядок и обозначаем через $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, Φ^+ и Φ^- —

множества простых, положительных и отрицательных корней, отвечающие этому порядку.

Как хорошо известно, по данным Φ , $\mathcal{P}$, R можно построить группу Шевалле $G = G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$, являющуюся группой R -точек некоторой аффинной групповой схемы $G_{\mathcal{P}}(\Phi, -)$, называемой схемой Шевалле—Демазюра. Обычно мы опускаем указание на $\mathcal{P}$ и пишем просто $G(\Phi, R)$. Если мы хотим специально подчеркнуть, что речь идет именно об односвязной группе, для которой $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Phi)$, мы пишем $G_{\text{sc}}(\Phi, R)$. Присоединенная группа, для которой $\mathcal{P} = \mathcal{Q}(\Phi)$, обозначается $G_{\text{ad}}(\Phi, R)$.

В дальнейшем мы фиксируем некоторый расщепимый максимальный тор $T(\Phi, -)$ схемы $G(\Phi, -)$, и полагаем $T = T(\Phi, R)$. Как обычно, X_{α} , $\alpha \in \Phi$, обозначает унитарную корневую подгруппу в G , элементарную относительно T . Мы фиксируем изоморфизмы $x_{\alpha} : R \rightarrow X_{\alpha}$, так что $X_{\alpha} = \{x_{\alpha}(\xi), \xi \in R\}$, связанные между собой коммутационной формулой Шевалле, см. [68, 88, 177]. Через $E(\Phi, R)$ обозначается элементарная подгруппа в $G(\Phi, R)$, порожденная всеми корневыми подгруппами X_{α} , $\alpha \in \Phi$.

Ключевую роль в доказательстве всех формулируемых ниже результатов играет тот факт, что, кроме совсем маленьких исключений в рангах ≤ 2 , группы $E(\Phi, R)$ совершенны. В действительности, стандартные ответы на большинство этих задач состоят в том, что каждая подгруппа в $G(\Phi, R)$, содержащая образ элементарной группы Шевалле $E(\Delta, A)$ над некоторым другим кольцом A в некотором представлении, нормализует единственную совершенную промежуточную подгруппу.

Наряду с обычными группами Шевалле часто рассматриваются расширенные группы Шевалле $\overline{G}(\Phi, R)$, получающиеся из обычных групп увеличением размерности максимального расщепимого тора. Различные конструкции этих групп и много дальнейших ссылок можно найти в [20], [25].

Напомним теперь определения относительных подгрупп. Пусть $I \leq R$ — идеал в R . Ядро гомоморфизма редукции $\rho_I : G(\Phi, R) \rightarrow G(\Phi, R/I)$ называется главной конгруэнц-подгруппой уровня I и обозначается $G(\Phi, R, I)$. Оно состоит из всех матриц $g \in G$, сравнимых с e по модулю I . Относительная элементарная подгруппа $E(\Phi, R, I)$ уровня I определяется как нормальная подгруппа в $E(\Phi, R)$, порожденная элементарными корневыми унитарными уровня I . Иными словами,

$$E(\Phi, R, I) = \langle x_{\alpha}(\xi), \alpha \in \Phi, \xi \in I \rangle^{E(\Phi, R)}.$$

В большинстве конструкций группы Шевалле возникают как линейные группы, вместе с рациональным действием на некотором модуле V . В следующем параграфе для классических групп через V обозначается *естественный* модуль, известный также как векторное представление — модуль наименьшей размерности. Впрочем, в случае нечетной ортогональной и симплектической групп над полем характеристики 2 могут быть разночтения в том, что следует рассматривать в качестве *естественного* модуля. Именно

поэтому, кстати, многие результаты, которые мы здесь обсуждаем, в этих случаях зависят от предположения $2 \in R^*$.

Соберем используемые в дальнейшем традиционные обозначения для классических групп и их элементарных подгрупп. Соответствующие относительные подгруппы получаются добавлением в обозначения указания на идеал I .

Φ	$\overline{G}(\Phi, R)$	$G(\Phi, R)$	$E(\Phi, R)$
A_l	$GL(l+1, R)$	$SL(l+1, R)$	$E(n, R)$
B_l	$GO(2l+1, R)$	$SO(2l+1, R)$	$EO(2l+1, R)$
C_l	$GSp(2l, R)$	$Sp(2l, R)$	$Ep(2l, R)$
D_l	$GO(2l, R)$	$SO(2l, R)$	$EO(2l, R)$

В действительности, конечно, для серий B_l и D_l односвязные группы Шевалле — это спинорные группы $Spin(n, R)$, элементарные подгруппы которых обозначаются $Epin(n, R)$.

3. Классы Ашбахера

Удобным контекстом для систематизации результатов о надгруппах полупростых групп является subgroup structure theorem Ашбахера [75–77, 115]. Эта теорема утверждает, что максимальная подгруппа конечной классической группы попадает либо в один из 8 явно определенных классов C_1 – C_8 больших подгрупп, либо в класс $\mathcal{S}$ почти простых групп в неприводимом представлении.

Максимальность групп из классов Ашбахера изучалась в различных конкретных случаях в десятках работ в том числе, конечно, и до появления работы [75]. По модулю классификации конечных простых групп эта задача полностью решена в книге Клейдмана и Либекса [115]. В статье Либекса и Зейтца [136] приводится более простое доказательство теоремы Ашбахера, основанное на теории алгебраических групп. Они же выделили естественные классы больших подгрупп в исключительных группах и доказали для них аналог subgroup structure theorem.

Опишем совсем коротко классы Ашбахера, при этом подчеркнутые слова необходимы только для того, чтобы получающиеся подгруппы были максимальными. Большие подгруппы обычно получаются и без этих предположений.

- C_1 — стабилизаторы вполне изотропных или невырожденных подпространств $U < V$.
- C_2 — стабилизаторы (в целом) разложений в прямую сумму $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_t$ подобных подпространств.
- C_3 — стабилизаторы расширений полей простой степени.

- $\mathcal{C}_4$ — стабилизаторы тензорных разложений $V = U_1 \otimes U_2$ с не подобными факторами.
- $\mathcal{C}_5$ — стабилизаторы подполей простой степени.
- $\mathcal{C}_6$ — нормализаторы некоторых экстраспециальных подгрупп⁴.
- $\mathcal{C}_7$ — стабилизаторы (в целом) тензорных разложений $V = U_1 \otimes \dots \otimes U_t$ на подобные факторы, [116].
- $\mathcal{C}_8$ — классические подгруппы.

Комбинируя способы, которыми определяются подгруппы различных классов, мы часто получаем большие подгруппы. Например, в случае GL_n группы из класса $\mathcal{C}_1$ — это в точности максимальные параболические подгруппы (для других классических групп в него попадают, кроме того, некоторые редуктивные подгруппы). Класс $\mathcal{C}_2$ состоит из (неприводимых) групп клеточно мономиальных матриц. Объединяя способы, которыми определяются эти классы, мы получаем следующий класс, который в случае GL_n состоит из клеточно диагональных матриц.

- $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ — почленные стабилизаторы разложений в прямую сумму

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_t.$$

В частности, на этом пути получаются subsystem subgroups в классических группах. По аналогии и для исключительных групп мы рассматриваем subsystem subgroups [134, 100] как аналог класса $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, хотя фактически в этих случаях стабилизаторов подпространств в минимальных модулях и их разложений в прямую сумму так много, что обозреть их все нет никакой возможности.

Вот два других образованных подобным образом класса больших подгрупп, которые фактически рассматривались во работах по описанию подгрупп.

- $\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_7$ — почленные стабилизаторы тензорных разложений $V = U_1 \otimes \dots \otimes U_t$, см. [1] и § 12 ниже.
- $\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_8$ — классические подгруппы над подполем, [4], [120].
- $\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_5$ — в некоммутативном случае различие между классами $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_5$ исчезает и их следует рассматривать как единый класс [118], [122].

4. Надгруппы subsystem subgroups в классических группах

Пусть $\Delta \subseteq \Phi$ вложение систем корней. Это вложение определяет регулярное вложение групп Шевалле $G(\Delta, R) \leq G(\Phi, R)$ над произвольным

⁴В случае бесконечных полей — и, тем более, колец — класс $\mathcal{C}_6$ не дает больших подгрупп и в дальнейшем не рассматривается.

коммутативным кольцом R с 1. Нас интересует описание надгрупп $E(\Delta, R)$ в $G(\Phi, R)$. Конечно, чтобы получить такое описание, необходимо предположить нечто о системе корней Δ — и возможно также о кольце R .

Одно предположение необходимость которого очевидна, состоит в том, что $\Delta^\perp = \emptyset$, т.е. не существует корней в Φ ортогональных ко всем корням подсистемы Δ . Однако, для коммутативных колец обычно нужны более сильные предположения.

Сформулируем теперь известные результаты для *классических* групп. Прежде всего напомним, как выглядят подсистемы корней в классических системах корней, см. [47], Таблица 9:

$$\begin{aligned}\Phi = A_l : & \quad \Delta = A_{k_1} + \dots + A_{k_r}, \\ \Phi = B_l : & \quad \Delta = A_{k_1} + \dots + A_{k_r} + D_{l_1} + \dots + D_{l_{s-1}} + B_{l_s}, \\ \Phi = C_l : & \quad \Delta = A_{k_1} + \dots + A_{k_r} + C_{l_1} + \dots + C_{l_s}, \\ \Phi = D_l : & \quad \Delta = A_{k_1} + \dots + A_{k_r} + D_{l_1} + \dots + D_{l_s}.\end{aligned}$$

В этих разложениях мы предполагается, что $p + q = l$, где

$$p = (k_1 + 1) + \dots + (k_r + 1), \quad q = l_1 + \dots + l_s, \quad k_1, \dots, k_r \geq 0, \quad l_1, \dots, l_s \geq 0.$$

Как обычно, мы считаем, что $A_0 = B_0 = D_1 = \emptyset$ является пустой системой корней. Положим $n_i = 2l_i$, если соответствующее слагаемое C_{l_i} или D_{l_i} и $n_i = 2l_i + 1$, если это B_{l_i} .

Тогда соответствующие группы $E(\Delta, R)$ изоморфны одной из следующих групп, в зависимости от типа:

$$\begin{aligned}& E(k_1 + 1, R) \oplus \dots \oplus E(k_r + 1, R), \\ & E(k_1 + 1, R) \oplus \dots \oplus E(k_r + 1, R) \oplus \text{Epin}(n_1, R) \oplus \dots \oplus \text{Epin}(n_s, R), \\ & E(k_1 + 1, R) \oplus \dots \oplus E(k_r + 1, R) \oplus \text{Ep}(2l_1, R) \oplus \dots \oplus \text{Ep}(2l_s, R).\end{aligned}$$

Для ортогональной группы $\text{SO}(n, R)$ элементарную подгруппу $\text{Epin}(n, R)$ следует заменить здесь на $\text{EO}(n, R)$.

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основной результат о надгруппах subsystem subgroups в классических группах.

Теорема 1. Пусть $\Phi = A_l, B_l, C_l$ или D_l , а R — коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$ если $\Phi = B_l, C_l$. Кроме того, пусть Δ подсистема корней в Φ такая, что ранги $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s$ ее неприводимых слагаемых не меньше 2. В ортогональном случае предположим дополнительно, что $k_1, \dots, k_r$ не меньше 4.

Тогда подгруппа H в $G(\Phi, R)$ содержащая $E(\Delta, R)$ нормализует подгруппу, порожденную всеми элементарными корневыми унитарными $x_\alpha(\xi) \in H$.

Если воспользоваться введенным Зеноном Боровичем языком сетевых подгрупп, см. [5, 6, 9], эта теорема означает в точности, что существует

единственная D -сеть идеалов σ в R соответствующего типа (симплектическая или ортогональная в соответствующих случаях) такая, что

$$E(\sigma) \leq H \leq N(\sigma).$$

Для серии A_l эта теорема доказана в работах Зенона Боровича и первого автора [8, 9]. Первыми важными шагами в направлении этого результата были работа Николая Романовского [66] и наша совместная работа с Владыславом Наркевичем [10], в которых аналогичные результаты получены для дедекиндовых колец. В дальнейшем мы, Владимир Койбаев и Игорь Голубчик получили много обобщений и уточнений этих результатов [7, 38, 43, 52, 53, 69, 70].

Для остальных классических серий эта теорема была доказана первым автором в второй половине 1980-х годов и анонсирована в работах [17, 19]. Полное доказательство содержалось в Главе V его диссертации и опубликовано в [18, 21–23]. См. также более подробное обсуждение в [174, 154].

В то время доказательства этих результатов потребовали достаточно серьезного технического напряжения. Вместе с тем, по стандартам сегодняшних работ [1, 33–35, 58, 59, 146, 164–166] эти доказательства совершенно элементарны, в том смысле, что в них не используется локализация, теория алгебраических групп или серьезная теория представлений.

Проблема 1. *Снять предположение $2 \in R^*$ в теореме 1.*

Впрочем, скорее всего, эту проблему имеет смысл решать сразу в более общем контексте гиперболических унитарных групп над форменным кольцом (R, Λ) . Дело в том, что без предположения обратимости 2 для изучения *всех* вопросов теории классических групп необходимо пользоваться теорией Бака [78, 79, 85, 105]. Эта теория, *в частности*, правильно учитывает гибридизацию симплектической и ортогональной групп. При правильной формулировке теорема 1 продолжает оставаться верной для любого коммутативного кольца. При этом в описании промежуточных подгрупп вместо идеалов должны фигурировать форменные идеалы.

Проблема 2. *Описать подгруппы унитарной группы $\mathrm{GU}(n, R, \Lambda)$, содержащие группу клеточно диагональных матриц с достаточно большими диагональными блоками.*

Заметим, что для этого случая, вообще говоря, не очень просто даже *сформулировать* стандартный ответ. Во всяком случае, для задачи о надгруппах торов это было сделано только в недавних работах Елизаветы Дыбковой [45, 46].

Проблема 3. *В ортогональном случае ослабить в теореме 1 предположение на ранги неприводимых компонент системы Δ до $l \geq 2$.*

В следующем параграфе на простейшем примере $A_{l-1} \leq D_l$ мы объясним, что для такого обобщения необходимо изменить стандартный ответ.

5. Надгруппы гиперболических вложений

В действительности, в каждом индивидуальном случае сформулированный в предыдущем параграфе результат легко конвертируется в *явное* описание промежуточных подгрупп. Для примера конкретизируем это описание для случая надгрупп гиперболических вложений $A_{l-1} \subseteq C_l$ и $A_{l-1} \subseteq D_l$. А именно, рассмотрим гиперболическое вложение $SL(l, R)$

$$h : g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & fg^{-t}f \end{pmatrix},$$

где f — перъединичная матрица степени l , элементы которой на побочной диагонали равны 1, а все остальные равны 0. В дальнейшем, чтобы различать симплектический и ортогональный случаи, мы введем знак ε , равный -1 в симплектическом случае и $+1$ в ортогональном.

Обозначим через $S^+(l, R)$ множество пер-симметрических матриц степени l над R , для которых $x = fx^t f$, а через $S^-(l, R)$ множество пер-антисимметрических матриц степени l над R , для которых $y = -fy^t f$ и, кроме того, все элементы на побочной диагонали равны 0. Тогда

$$u(x) = \begin{pmatrix} e & x \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad v(y) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ y & e \end{pmatrix}, \quad x, y \in S^{-\varepsilon}(l, R).$$

Иными словами, $x, y \in S^+(l, R)$ в симплектическом случае и $x, y \in S^-(l, R)$ в ортогональном.

Пусть теперь $A, B \trianglelefteq R$ — идеалы в R . Сопоставим им подгруппу $E(A, B) \leq G$, порожденную образом $h(E(l, R))$ элементарной группы в гиперболическом вложении и всеми матрицами вида $u(x)$, $x \in S^{-\varepsilon}(l, A)$ и $v(y)$, $y \in S^{-\varepsilon}(l, B)$:

$$E(A, B) = \langle h(g), \quad g \in E(l, R), \quad u(x), \quad x \in S^{-\varepsilon}(l, A), \quad v(y), \quad y \in S^{-\varepsilon}(l, B) \rangle$$

Кроме того, рассмотрим группу

$$G(A, B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid a, d \in M(l, R), \quad b \in M(l, A), \quad c \in M(l, B) \right\},$$

Ясно, что $E(A, B) \leq G(A, B)$. Наконец, обозначим через $N(A, B)$ нормализатор $G(A, B)$ в G .

В этих обозначениях (весьма!) частный случай теоремы предыдущего параграфа, относящийся к случаю надгрупп $E(l, R)$ в гиперболическом вложении, можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Пусть H — подгруппа $SO(2l, R)$, содержащая группу $h(E(l, R))$. В предположении $l \geq 3$, $l \neq 4$, существуют единственные идеалы $A, B \trianglelefteq R$ такие, что

$$E(A, B) \leq H \leq N_G(E(A, B)) = N(A, B).$$

Теорема 3. Пусть H — подгруппа $Sp(2l, R)$, содержащая группу $h(E(l, R))$. В предположении $l \geq 3$, $2 \in R^*$, существуют единственные

идеалы $A, B \trianglelefteq R$ такие, что

$$E(A, B) \leq H \leq N_G(E(A, B)) = N(A, B).$$

Случай $l = 3$ в первой из этих теорем явно не доказывался, но с учетом изоморфизма $A_3 \cong D_3$ он вытекает уже из результатов работы [9], где один из блоков рассматриваемого разбиения мог быть тривиальным. Так как в D_3 имеется единственный класс сопряженности A_2 , то фактически речь здесь идет об описании надгрупп $GL(4, R)$, содержащих $E(3, R)$. Как известно из [9], подгруппы $GL(n, R)$, содержащие $E(n - 1, R)$, как раз и классифицируются в терминах двух идеалов $A, B \trianglelefteq R$, а именно, нормализуют подгруппу, порожденную $E(n - 1, R)$, $t_{in}(A)$, $i \neq n$, и $t_{nj}(B)$, $j \neq n$. См. [174, 167, 168] по поводу более простых доказательств основных результатов работы [9] и дальнейших ссылок.

И в том и в другом случае предположение $l \geq 3$ отвечает существу дела и связано с тем, что группа $E(2, R)$ не является, вообще говоря, совершенной. Это значит, что описать ее надгруппы теми же методами — и получить при этом такого же типа ответ! — для произвольного коммутативного кольца нет *абсолютно* никаких шансов. В ортогональном случае, *кроме того*, централизатор $h(E(2, R))$ содержит нетривиальную полупростую подгруппу, так что в этом случае задача описания надгрупп $h(E(2, R))$ не имеет простого решения даже для поля!

Возникающие и в том и в другом случае дополнительные ограничения менее фундаментальны, но тоже необходимы. Дело в том, что без этих ограничений заключение теорем перестает быть справедливым уже для случая поля. Роль условия $2 \in R^*$ уже упоминалась в предыдущем параграфе: симплектическая группа $Sp(2l, K)$ над полем характеристики 2 содержит ортогональную группу $SO(2l, K)$, которая, конечно, и является контрпримером (и ведет к возникновению целых серий гибридных примеров над кольцом).

Для ортогонального случая спинорное представление группы Шевалле типа B_3 ортогонально, 8-мерно и содержит подгруппу типа $D_3 \cong A_3$ в гиперболическом вложении. Механизм возникновения этого контрпримера совершенно очевиден. Для этого рассмотрим действие группы $SL(l, R)$ на унитарных радикалах

$$U = \{u(x), x \in S^{-\varepsilon}(l, R)\}, \quad U^- = \{v(y), y \in S^{-\varepsilon}(l, R)\},$$

определенное гиперболическим вложением. Ясно, что

$$h(g)u(x)h(g)^{-1} = u(gxg^t), \quad h(g)v(y)h(g)^{-1} = v(g^{-t}yg^{-1}).$$

Таким образом, в U и U^- реализуются фундаментальные представления группы $SL(l, R)$ со старшими весами ϖ_2 и ϖ_{l-2} , соответственно. При $l \neq 4$ эти представления неэквивалентны, а в прямой сумме $M \oplus N$ двух *неэквивалентных* неприводимых модулей обычно совсем мало подмодулей: 0, M , N и $M \oplus N$. С другой стороны, при $l = 4$ эти представления становятся эквивалентными. В частности, разбить произведение $T_{1,-2}(\xi)T_{-3,4}(\zeta)$ на две

составляющие его ортогональные трансвекции — имея в своем распоряжении лишь элементы $SL(4, R)$ в гиперболическом вложении — нет никакой возможности. Разумеется, это несложно сделать, если добавить к $E(l, R)$ какие-то нетривиальные *полупростые* элементы, например, если заменить $E(l, R)$ на $GE(l, R)$, см. [57].

Новые по сравнению со случаем $l \neq 4$ группы возникают здесь следующим образом. Рассмотрим *четыре* идеала $A, B, C, D \trianglelefteq R$ такие, что $A \leq C$ и $B \leq D$ и изоморфизм $\phi : C/A \longrightarrow D/B$. Сопоставим этим данным подгруппу $E(A, B, C, D, \phi)$ в $SO(8, R)$, порожденную образом $h(E(l, R))$ элементарной группы в гиперболическом вложении и матрицами вида $T_{1,-2}(\xi)T_{-3,4}(\zeta)$, где $\xi \in C$, $\zeta \in D$ таковы, что $\phi(\xi + A) = \zeta + B$,

$$E(A, B, C, D, \phi) = \left\langle h(g), g \in E(l, R), T_{i,-j}(\xi)T_{-h,k}(\zeta), \right. \\ \left. \xi \in C, \zeta \in D, \phi(\xi + A) = \zeta + B, \{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\} \right\rangle. \quad (5.1)$$

Разумеется, также и любая содержащая $E(A, B, C, D, \phi)$ подгруппа, лежащая в ее нормализаторе, также содержит $h(E(4, R))$.

Оказывается — именно в этом и состоит основной результат работы первого автора и Елены Филипповой [40] — для любого коммутативного кольца R никаких других подгрупп в $SO(8, R)$, содержащих $h(E(4, R))$, нет. **Теорема 4.** Пусть H — подгруппа $SO(8, R)$, содержащая группу $h(E(4, R))$. Тогда существуют единственная четверка идеалов $A, B, C, D \trianglelefteq R$, $A \leq C$, $B \leq D$ и изоморфизм $\phi : C/A \cong D/B$ такие, что

$$E(A, B, C, D, \phi) \leq H \leq N_G(E(A, B, C, D, \phi)).$$

В следующей задаче мы заменяем h на *эрмитово* гиперболическое вложение, иными словами, (R, Λ) здесь форменное кольцо, а транспонирование заменяется на эрмитово сопряжение. Разумеется, в случае симплектической группы кольцо R коммутативно, а инволюция на нем тривиальна.

Проблема 4. Описать подгруппы в $U(2l, R, \Lambda)$, содержащие

$$\left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & f\bar{g}^{-t}f \end{pmatrix} \mid g \in E(l, R) \right\}.$$

Техника решения подобных задач в гиперболической унитарной группе — и, тем самым, в частности, в симплектической группе, *независимо* от обратимости 2 — была в последние 10 лет отработана в работах Елизаветы Дыбковой [45, 46].

Решение следующей задачи было бы совместным обобщением теорем 2–4 и результатов работ первого автора и Виктора Петрова [33–35, 63, 146]. Поэтому оно не может быть *совсем* простым.

Проблема 5. Описать подгруппы в $GL(2l, R)$, содержащие

$$\left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-t} \end{pmatrix} \mid g \in E(l, R) \right\}.$$

Следующая задача играет точно такую же роль, являясь совместным обобщением теорем 2–4 и *нетривиальной части* результата Ли Шанчжи [119] посвященного описанию надгрупп тензорных подгрупп = **tensorized subgroups**. А именно, для $m, n \geq 3$ имеет место стандартное описание надгрупп $E(m, R) \otimes E(n, R)$ в $GL(mn, R)$, в то время как при $n = 2$ даже для случая поля появляются исключения. Значит, они должны возникнуть и при решении следующей задачи.

Проблема 6. *Описать подгруппы в $GL(2l, R)$, содержащие*

$$\left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \mid g \in E(l, R) \right\}.$$

Отметим, что для случая поля эта задача, при некоторых дополнительных ограничениях, решена в работе Алексея Короткевича [56].

6. Надгруппы subsystem subgroups в исключительных группах

Естественно возникает вопрос о том, в какой степени результаты о надгруппах subsystem subgroups могут быть обобщены на исключительные группы. Отметим, что именно создание инструментов для такого обобщения было значительной частью внутренней мотивации при развитии разложения унипотентов [37, 173, 177, 167] и дальнейших геометрических методов в структурной теории групп Шевалле [26–28, 31, 176].

Проблема 7. *Описать подгруппы исключительных групп $G(\Phi, R)$, содержащие регулярно вложенную подгруппу $E(\Delta, R)$, $\Delta \leq \Phi$, в предположении, что Δ достаточно велика.*

Подгруппы, в терминах которых формулируется стандартный ответ на эту задачу, определены в работе первого автора и Евгения Плоткина [36].

Очевидное необходимое условие, разумеется, состоит в том, что $\Delta^\perp = 0$. В действительности для возможности провести извлечение корневых унипотентов должно выполняться более сильное условие, состоящее в том, что каждый корень $\alpha \in \Phi \setminus \Delta$ должен зацепляться за неприводимую компоненту Δ ранга ≥ 2 . Ниже мы перечисляем все случаи, для которых это происходит.

Отметим, что формально эта задача не решена даже для случая поля. Разумеется, для этого случая ответ должен вытекать из результатов Брюса Куперстейна, Франца Тиммесфельда, Ани Штайнбах и других о подгруппах в исключительных группах, порожденных корневыми подгруппами. Однако, насколько нам известно, для приводимых подгрупп над бесконечным полем подобная задача нигде *систематически* не рассматривалась.

Единственная часть этой задачи, которая полностью решена — это описание надгрупп элементарной подгруппы подгруппы Леви в параболической подгруппе [179, 51, 163], а также некоторые специальные случаи над полем.

Одна из основных трудностей при решении сформулированной выше задачи в полной общности состоит в том, что не видно никакого единого подхода к извлечению корневых унитаров, который позволил бы избежать case by case analysis. В случае кольца никаких общих теорем в духе геометрии корневых подгрупп нет (и не может быть!), так что в каждом случае извлечение корневых элементов производится ad hoc, с использованием конкретной информации о стандартных надгруппах $E(\Delta, R)$.

Вот несколько конкретных задач, с которых можно начинать работу над сформулированной выше общей проблемой. Сложность первых трех из них представляются достаточно умеренной.

Проблема 8. *Описать надгруппы $E(3A_2, R)$ в $G(E_6, R)$.*

Проблема 9. *Описать надгруппы $E(D_5, R)$ в $G(E_6, R)$.*

Проблема 10. *Описать надгруппы $E(A_5 + A_1, R)$ в $G(E_6, R)$.*

Упомянем, в порядке возрастания сложности, еще три случая, которые, как мы уверены, являются самыми простыми среди subsystem subgroups в больших исключительных группах, первый из них вероятно даже проще, чем проблема 9.

Проблема 11. *Описать надгруппы $E(A_7, R)$ в $G(E_7, R)$.*

Проблема 12. *Описать надгруппы $E(D_8, R)$ в $G(E_8, R)$.*

Проблема 13. *Описать надгруппы $E(A_8, R)$ в $G(E_8, R)$.*

Следующая задача уже заметно сложнее, но, как мы уверены, уже в основном решена в работе первого автора и Сергея Николенко [31], в которой предложено A_2 -доказательство основных структурных теорем в группе Шевалле типа F_4 . Дело в том, что в приведенном там доказательстве используются только длинные корни, так что фактически его можно адаптировать для описания подгрупп в $G(F_4, R)$, нормализуемых $E(D_4, R)$.

Проблема 14. *Описать надгруппы $E(D_4, R)$ в $G(F_4, R)$.*

Дополнительную сложность этой задаче придает наличие исключительных симметрий. А именно, в группе $W(F_4)$ реализуются все автоморфизмы системы D_4 . Это приводит к наличию нескольких копий B_4 , содержащих D_4 , так что даже правильная формулировка ответа требует некоторой аккуратности. Заметим, что в [180] доказана максимальность нормализатора $E(D_4, R)$ для случая поля.

Следующая задача еще гораздо сложнее и должна дать более реалистическое представление о трудностях, с которыми придется столкнуться в общем случае. Дело в том, что решение этой задачи включает в себя в частности, как решение предыдущей задачи, так и описание надгрупп надгруппы $E(F_4, R)$ в $G(E_6, R)$. Эта последняя задача недавно решена Лузгаревым [59]. Из работы [59] в сочетании с наличием исключительных симметрий видно, что уже решение этой конкретной задачи будет чрезвычайно сложным.

Проблема 15. *Описать надгруппы $E(D_4, R)$ в $G(E_6, R)$.*

Перечислим теперь все случаи, для которых, с нашей точки зрения, нет принципиальных препятствий к описанию надгрупп $E(\Delta, R)$ в $G(\Phi, R)$ над

произвольным коммутативным кольцом R . Возможно, в некоторых случаях для получения *стандартного* ответа нужно будет предполагать дополнительно, что $2 \in R^*$ или даже $6 \in R^*$.

- Для $\Phi = E_6$ описание возможно для случаев $\Delta = 3A_2, D_5, A_5 + A_1, D_4, A_4 + A_1, 2A_2 + A_1, A_3 + 2A_1$.
- Для $\Phi = E_7$ описание возможно для случаев $\Delta = A_7, A_5 + A_2, E_6, A_6, A_4 + A_2, 3A_2, D_6 + A_1, D_5 + A_1, (A_5 + A_1)', (A_5 + A_1)'', A_3 + A_2 + A_1, A_4 + A_1, D_4 + 3A_1$.
- Для $\Phi = E_8$ описание возможно для случаев⁵ $\Delta = D_8, E_6 + A_2, A_8, D_5 + A_3, 2D_4, 2A_4, 4A_2, E_7, D_7, (A_7)', D_5 + A_2, D_4 + A_3, A_7 + A_1, A_5 + A_2 + A_1, 2A_2 + 2A_1, E_6 + A_1, A_6 + A_1, D_6 + 2A_1, D_5 + 2A_1, A_5 + 2A_1$.
- Для $\Phi = F_4$ описание возможно для случаев $\Delta = B_4, A_2 + \tilde{A}_2, D_4, C_3 + A_1, A_3 + \tilde{A}_1$.
- Для $\Phi = G_2$ описание возможно только для случая $\Delta = A_2$.

Как обычно, см. [89] по поводу деталей, через Δ' и Δ'' здесь обозначены два класса сопряженности подсистем одного и того же типа Δ в Φ . Через $\tilde{\Delta}$ обозначено вложение системы типа Δ на короткие корни.

Сами случаи перечислены здесь приблизительно в порядке нарастания сложности, от самых простых к самым сложным. С нашей точки зрения, сложность случаев зависит от ранга, величины нормализатора, количества промежуточных подсистем, количества слагаемых типа A_1 и других подобных факторов, влияющих на возможность осуществить извлечение корневых элементов.

7. Надгруппы классических групп

Сформулируем основные результаты работ первого автора и Виктора Петрова о надгруппах расщепимых классических групп. Основную роль в этих работах играют совершенные надгруппы $E_p(2l, R)$ или $EO(n, R)$, соответственно, отвечающие идеалам $A \subseteq R$. А именно, положим

$$EE_p(2l, R, A) = E_p(2l, R)E(2l, R, A), \quad EEO(n, R, A) = EO(n, R)E(n, R, A).$$

Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_A : GL(2l, R) \rightarrow GL(2l, R/A)$ и обозначим через $CGSp(2l, R, A)$ полный прообраз группы $GSp(2l, R)$ и, соответственно, через $CGO(n, R, A)$ полный прообраз группы $GO(n, R)$ относительно относительно ρ_A . Условие принадлежности матрицы группе $CGSp(2l, R, A)$ или $CGO(n, R, A)$ описывается очевидными квадратичными сравнениями на ее коэффициенты, и можно доказать, что эти группы совпадают с нормализатором $EE_p(2l, R, A)$ и, соответственно, $EEO(n, R, A)$ в $GL(n, R)$, см. [34, 35] по поводу деталей.

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основные результаты работ [33–35].

⁵Напомним, что $(A_7)'$ содержится в A_8 и D_8 , а $(A_7)''$ содержится в E_7 и $A_7 + A_1$.

Теорема 5. Пусть R — коммутативное кольцо и либо $l \geq 3$, либо $l = 2$ и у кольца R нет поля вычетов из двух элементов. Тогда для любой подгруппы H в $G = \mathrm{GL}(2l, R)$, содержащей элементарную симплектическую группу $\mathrm{E}\mathrm{p}(2l, R)$, существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$\mathrm{E}\mathrm{E}\mathrm{p}(2l, R, A) \leq H \leq \mathrm{C}\mathrm{G}\mathrm{S}\mathrm{p}(2l, R, A).$$

Теорема 6. Пусть R — коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$, и $n \geq 7$. Тогда для любой подгруппы H в $G = \mathrm{GL}(n, R)$, содержащей элементарную ортогональную группу $\mathrm{E}\mathrm{O}(n, R)$, существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$\mathrm{E}\mathrm{E}\mathrm{O}(n, R, A) \leq H \leq \mathrm{C}\mathrm{G}\mathrm{O}(n, R, A).$$

Как будет отмечено в § 15, в большинстве задач настоящей работы можно заменить вопрос описания надгрупп группы H на более общий вопрос описания подгрупп, нормализуемых H . Тем не менее, сформулируем отдельно следующую задачу, которая представляется нам особенно интересной, так как она была бы совместным обобщением огромного количества предшествующих результатов, как сформулированных выше теорем 5 и 6, так и теорем о нормальном строении классических групп.

Проблема 16. Описать подгруппы $\mathrm{GL}(n, R)$, нормализуемые элементарной классической группой, например, $\mathrm{E}\mathrm{p}(n, R)$ или $\mathrm{E}\mathrm{O}(n, R)$.

Виктор Петров [146, 63] обобщил эти результаты на надгруппы гиперболических элементарных унитарных групп $\mathrm{E}\mathrm{U}(2l, R, \Lambda)$ над не обязательно даже коммутативным форменным кольцом (R, Λ) . Сформулируем следствие из его основных результатов, см. [146] по поводу точных определений.

Теорема 7. Предположим, что $l \geq 4$ и кольцо R почти коммутативно. Тогда для каждой подгруппы $H \leq \mathrm{GL}(2l, R)$, содержащей $\mathrm{E}\mathrm{U}(2l, R, \Lambda)$, существует единственный идеальный форменный параметр (A, Γ) такой, что

$$\mathrm{E}\mathrm{E}\mathrm{U}(2l, R, A, \Gamma) \leq H \leq \mathrm{C}\mathrm{G}\mathrm{U}(2l, R, A, \Gamma).$$

В действительности в диссертации Петрова [63] аналогичные результаты получены для надгрупп изотропных классических групп, в предположении, что все локальные ранги ≥ 4 . К сожалению, в такой общности эти результаты до сих пор не опубликованы.

Проблема 17. Понизить в предыдущей теореме и ее аналогах для изотропных групп оценку на [локальные] ранги до $l \geq 3$.

В следующей задаче предлагается перенести это описание на случай введенных Петровым [62, 63] нечетных унитарных групп.

Проблема 18. Описать подгруппы в $\mathrm{GL}(n, R)$, содержащие нечетную элементарную унитарную группу $\mathrm{E}\mathrm{U}(n, R, \mathcal{L})$, без предположения $2 \in R^*$.

8. Надгруппы $\mathrm{Eр}(2, R)$ и $\mathrm{EO}(2, R)$ над некоммутативным кольцом

В настоящем параграфе мы воспроизведем две задачи, предложенные в работах первого автора и Виктора Петрова [34], [35]. Эти задачи дают теоретико-кольцевую переформулировку результатов о надгруппах расщепимых классических групп.

Самым замечательным продвижением в нашем понимании строения симплектической группы над кольцами за много лет была работа Дугласа Косты и Гордона Келлера [91]. Важнейший, как в концептуальном и техническом отношении, аспект этой работы состоит в том, что отличие симплектической группы от всех остальных групп Шевалле и все возникающие при анализе симплектического случая специфические трудности объясняются тем, что в действительности группа Sp_{2l} *любого* ранга является группой SL_2 над некоторым другим кольцом и ведет себя как группа ранга 1.

А именно, пусть A — кольцо с инволюцией, т.е. антиавтоморфизмом $a \mapsto \bar{a}$ порядка 2. Аналога определителя в группе $\mathrm{GL}(2, A)$, вообще говоря, нет. Поэтому по аналогии с коммутативным случаем **специальную линейную группу** $\mathrm{SL}(2, A) = \mathrm{Sp}(2, A)$ естественно определить условием

$$\mathrm{SL}(2, A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, A) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\}.$$

Инволюция в правой части нужна для того, чтобы учесть некоммутативность кольца A и гарантировать, что $\mathrm{SL}(2, A)$ действительно группа. Обычная группа $\mathrm{SL}(2, A)$ получается, если считать, что инволюция здесь тривиальна (и, следовательно, кольцо A коммутативно!) Другой важнейший пример кольца с инволюцией это $A = M(l, R)$, где R — коммутативное кольцо, а инволюция задается транспонированием $a \mapsto a^t$ (чтобы транспонирование было инволюцией, кольцо R обязано быть коммутативным!). В этом случае уравнения, задающие $\mathrm{SL}(2, A)$, совпадают с уравнениями на матрицу, получающимися из

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, $\mathrm{SL}(2, M(l, R)) = \mathrm{Sp}(2l, R)$, см. [91], § 1.

Вернемся снова к общему случаю. Легко видеть, что элементарные трансвекции

$$t_{12}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_{21}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},$$

в том и только том случае принадлежат $\mathrm{SL}(2, A)$, когда элемент a **эрмитов**, т.е. $\bar{a} = a$. Обозначим множество эрмитовых элементов кольца A через $H(A)$. **Элементарную симплектическую группу** $\mathrm{Eр}(2, A)$ естественно

определить как

$$\text{Er}(2, A) = \langle t_{12}(a), t_{21}(a), a \in H(A) \rangle.$$

Легко видеть, что при этом $\text{Er}(2, M(l, R)) = \text{Er}(2l, R)$, так что это определение согласовано с тем определением, которое мы использовали до сих пор.

Проблема 19. *Описать подгруппы в $\text{GL}(2, A)$, содержащие $\text{Er}(2, A)$ в предположении существования в кольце A нетривиальных ортогональных идемпотентов.*

Ортогональный случай полностью аналогичен симплектическому, но эрмитовы элементы при этом заменяются на антиэрмитовы. А именно, по аналогии с коммутативным случаем **ортогональную группу** $O(2, A)$ естественно определить условием

$$O(2, A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, A) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\}.$$

В классическом случае, когда $A = M(l, R)$ есть матричное кольцо над коммутативным кольцом R , инволюция задается транспозицией, и, кроме того, $2 \in R^*$, эти уравнения совпадают с обычными уравнениями задающими ортогональную группу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, $O(2, M(l, R)) = O(2l, R)$.

Вернемся снова к общему случаю. Легко видеть, что элементарные трансвекции $t_{12}(a)$, $t_{21}(a)$ в том и только том случае принадлежат $O(2, A)$, когда элемент a **антиэрмитов**, т.е. $\bar{a} = -a$. Обозначим множество эрмитовых элементов кольца A через $\text{AH}(A)$. **Элементарную ортогональную группу** $\text{EO}(2, A)$ естественно определить как

$$\text{EO}(2, A) = \langle t_{12}(a), t_{21}(a), a \in \text{AH}(A) \rangle$$

Легко видеть, что при этом $\text{EO}(2, M(l, R)) = \text{EO}(2l, R)$, так что это определение согласовано с тем определением, которое мы использовали до сих пор.

Проблема 20. *Описать подгруппы в $\text{GL}(2, A)$, содержащие $\text{EO}(2, A)$ в предположении существования в кольце A трех нетривиальных попарно ортогональных идемпотентов.*

9. Надгруппы исключительных групп

В настоящем параграфе мы сформулируем основные результаты замечательной работы Александра Лузгарева [59] (для случая поля аналогичный результат опубликован в [183]). Эта работа показывает как то, что результаты, относящиеся к подгруппам классических групп, удастся обобщить на исключительные группы, так и то, что сделать это будет совсем непросто.

В следующей теореме фигурирует совершенная группа

$$EE(F_4, R, A) = E(F_4, R)E(E_6, R, A)$$

и ее нормализатор $CG(F_4, R, A)$ равный полному прообразу группы $\overline{G}(F_4, R/A)$ относительно гомоморфизма редукции $G(E_6, R) \rightarrow G(E_6, R/A)$.

Теорема 8. *Для любой подгруппы H в $G(E_6, R)$, содержащей элементарную группу $E(F_4, R)$, существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что*

$$EE(F_4, R, A) \leq H \leq CG(F_4, R, A).$$

В общих чертах доказательство этого результата в [59] следует тому же плану, что доказательство результатов о надгруппах симплектической группы в [34], однако при этом возникают значительные дополнительные технические трудности. Доказательства в [59] используют обычные вычисления с корневыми элементами, вычисления с элементами групп Шевалле $G(F_4, R)$ и $G(E_6, R)$ в 27-мерном представлении, в том числе явный вид уравнений на эти элементы, и, кроме того, всю мощь локализационных методов. Дополнительные трудности появляются в связи с тем, что не каждый первый столбец матрицы из $G(E_6, R)$ является первым столбцом матрицы из $G(F_4, R)$. Поэтому, в отличие от работы [34], не удастся сразу свести задачу об извлечении корневого элемента к случаю параболических подгрупп, и приходится проводить еще одну, совершенно нетривиальную редукцию.

Сформулируем несколько дальнейших вопросов о надгруппах исключительных групп.

Проблема 21. *Описать подгруппы в $GL(27, R)$, нормализуемые $E(E_6, R)$.*

Проблема 22. *Описать подгруппы в $GSp(56, R)$, нормализуемые $E(E_7, R)$.*

Проблема 23. *Описать подгруппы в $GO(248, R)$, нормализуемые $E(E_8, R)$.*

Следующая задача представляется значительно более сложной и для получения стандартного ответа заведомо требует предположения $2 \in R^*$, а может быть и более сильного предположения $6 \in R^*$.

Проблема 24. *Описать подгруппы в $GL(56, R)$, нормализуемые $E(E_7, R)$ в предположении $2 \in R^*$.*

Ни один из этих вопросов полностью не решен, хотя часть программы по переносу результатов работ [33–35, 146], в эти ситуации реализована.

А именно, в работе Лузгарева [58] для двух идеалов $A, B \trianglelefteq R$, $A \leq B$, построены совершенные подгруппы

$$EE_6(27, R, A) = E(E_6, R)E(27, R, A),$$

$$EE_7(56, R, A, B) = E(E_7, R)E(56, R, A)E_p(56, R, B).$$

В предположении $6 \in R^*$ определен уровень подгрупп H в $GL(27, R)$, содержащих $E(E_6, R)$ и в $GL(56, R)$ содержащих $E(E_7, R)$. Иными словами, доказано существование наибольшей подгруппы вида $EE_6(27, R, A)$ или $EE_7(56, R, A, B)$, соответственно, содержащейся в H .

Еще один фрагмент этой программы реализован в работах первого автора и Лузгарева [28, 29]. А именно, там вычислены нормализаторы эле-

ментарных групп Шевалле $E(E_6, R)$ и $E(E_7, R)$ в соответствующих полных линейных группах, что позволяет вычислить и нормализаторы групп $EE_6(27, R, A)$ и $EE_7(56, R, A, B)$.

Однако, центральный фрагмент доказательства, извлечение корневого унипотента, не проведен, и из работ [58, 59] видно, что он будет связан с преодолением огромных технических трудностей.

В противоположность этому описание надгрупп G_2 в небольших классических группах достаточно обозримо. Это связано с наличием цепочки включений

$$A_2 \leq G_2 \leq B_3 \leq D_4 \leq B_4 \leq F_4,$$

которая уже частично обсуждалась в §§ 6–8. Соответствующие результаты будут изложены в совместных работах первого автора, Сергея Николенко и Елены Филипповой. Заметим, что *для поля* первые два из этих вложений изучили Роджер Дай и Ван Денийн [181].

10. Надгруппы subring subgroups

В настоящем параграфе излагаются недавние результаты второго автора о надгруппах subring subgroups. Пусть Z — подкольцо кольца R . Общая проблема в современной формулировке звучит следующим образом.

Проблема 25. *Описать подгруппы $G(\Phi, R)$, содержащие $E(\Phi, Z)$, где Z — некоторое подкольцо кольца R .*

Стандартный ответ состоит в том, что каждая такая подгруппа нормализует группу $E(\Phi, P)$ над некоторым подкольцом P , лежащим между Z и R . До серии работ [164–166] второго автора стандартное описание было известно в следующих случаях.

- $\Phi = A_n$, где $n \geq 2$, а R — поле частных дедекиндова кольца Z , Николай Романовский, Роберт Шмидт и другие [65], [72] – [74], [2].
- Φ — любая система корней достаточно большого ранга, а R — поле частных области главных идеалов Z , Яков Нужин, Якушевич [61].
- Φ — любая система корней, а R — алгебраическое расширение поля Z , Яков Нужин [60] (в [182] позже опубликован значительно более слабый результат).

При этом не было ни одного опубликованного контрпримера к стандартному ответу. На основании перечисленных результатов можно было предположить, что описание надгрупп группы $E(\Phi, Z)$ стандартно в случае, когда R является алгебраическим расширением кольца частных одномерного кольца Z . Размерность здесь можно понимать, например, как размерность Крулля. Это предположение подтвердилось для систем корней *без кратных связей* в работах [164] и [165], где было получено необходимое условие на пару $Z \leq A$ для того, чтобы описание было стандартным.

Кольцо R называется **квази-трансцендентным** расширением кольца Z , если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Z & \longrightarrow & P & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ K & \longrightarrow & K[x] & & \end{array}$$

где $K[x]$ — кольцо многочленов над полем K , горизонтальные стрелки инъективны, а вертикальные сюръективны. В противном случае расширение $Z \subseteq R$ называется **квази-алгебраическим**.

Сформулируем основной результат работы второго автора [165].

Теорема 9. *Предположим, что все корни системы Φ имеют одинаковую длину. Если расширение колец $Z \leq R$ является квази-трансцендентным, то описание подгрупп в $G(\Phi, R)$, содержащих $E(\Phi, Z)$ не является стандартным.*

В случае, когда Z — кольцо арифметического или геометрического происхождения, условие квази-алгебраичности имеет элегантную переформулировку. Обозначим через $\dim Z$ размерность Крулля кольца Z . Следующий результат доказан в работе второго автора [164].

Теорема 10. *Предположим, что Z — область целостности, конечно порожденная над полем или над $\mathbb{Z}$. Кольцо R является квази-алгебраическим расширением Z в одном из следующих двух случаев:*

- $\dim Z \leq 1$ и R вкладывается в алгебраическое замыкание поля частных кольца Z ;
- R является целым расширением Z .

Таким образом, для систем корней без кратных связей естественно сформулировать следующую гипотезу. Пусть $\Phi \neq A_1$ — система корней без кратных связей, а Z — подкольцо кольца R . Описание подгрупп в $G(\Phi, R)$, содержащих $E(\Phi, Z)$, является стандартным тогда и только тогда, когда расширение $Z \leq R$ является квази-алгебраическим.

Для регулярных одномерных (т.е. дедекиндовых) колец Z и их локализаций R доказательство должно быть достаточно простым. С другой стороны, в настоящий момент (даже для $\Phi = A_l$) нет никаких подходов к доказательству гипотезы для целых расширений, кроме подходов, основанных на разложении Гаусса. Таким образом, для целых расширений колец, не являющихся полулокальными, задача должна быть сложной, и нет полной уверенности в том, что гипотеза верна. Задача о локализации нерегулярных колец включает в себя задачу о целых расширениях.

Как обнаружено в работе второго автора [166], для систем корней с кратными связями ситуация совершенно другая.

Теорема 11. *Предположим, что $\Phi = B_l$ или $\Phi = C_l$, а $2 \in Z^*$. Тогда описание подгрупп в $G(\Phi, R)$, содержащих $E(\Phi, Z)$, является стандартным.*

То есть, грубо говоря, для систем корней с кратными связями описание стандартно почти всегда, а без кратных связей — почти никогда. Технически такая разница обусловлено существованием *тождества с константами*. Обозначим через $p = p(\Phi)$ максимальную кратность связей системы корней Φ , так что $p(G_2) = 3$, и $p = 2$ для $\Phi = B_l, C_l, F_4$. Полупростой элемент s называется “маленьким”, если он аннулируется всеми длинными корнями. Это условие эквивалентно тому, что $s^p = 1$.

Доказательства в работе [166] основаны на следующем замечательном наблюдении, принадлежащем Голубчику—Михалеву [44] и Гордееву [99].

Теорема 12. Пусть K — поле, $s \in G(\Phi, K)$ маленький полупростой элемент, а $h \in G(\Phi, K)$ — длинный корневой элемент. Тогда для любого $g \in G(\Phi, K)$

$$[[h, h^{s^g}], h] = 1.$$

Если $\Phi = B_l$ или $\Phi = C_l$, то выполнено более короткое тождество:

$$[h, h^{s^g}] = 1.$$

Извлечение трансвекций в доказательстве основной теоремы работы [166] основано как раз на существовании короткого тождества. Для того, чтобы перенести этот результат на случай $\Phi = F_4$ надо либо научиться извлекать трансвекции с помощью длинного тождества, что выглядит мало реальным, либо доказать короткое тождество для этого случая.

Проблема 26. Доказать, что при условии $2 \in Z^*$ описание надгрупп $E(F_4, Z)$ в $G(F_4, R)$ стандартно.

Проблема 27. В условиях теоремы Голубчика—Михалева—Гордеева доказать тождество $[h, h^{s^g}] = 1$ при $\Phi = F_4$.

Для $\Phi = G_2$ короткое тождество неверно, поэтому в настоящий момент не видно никаких подходов к доказательству стандартности в этом случае. Поэтому случай $\Phi = G_2$ исключается из дальнейшего обсуждения.

При попытке снять условие обратимости двойки в теореме 11 возникают проблемы различной степени сложности. Во-первых, необходимо немного подправить определение стандартности. Также, как и при описании нормальных делителей, появляются группы, порожденные унитарными, у которых аддитивные подгруппы на длинных и на коротких корнях разные. Правильно определить такие группы, а также доказать для них стандартные леммы об их нормализаторах и извлечении трансвекций из элементов параболической подгруппы — хорошая задача для дипломной работы. Возможно, эту задачу для классических серий разумно решать в контексте унитарных групп над необязательно коммутативным кольцом.

Во-вторых, маленькие полупростые элементы лежат в конгруэнц-подгруппе уровня $2R$, поэтому с их помощью можно извлечь только трансвекции из относительной элементарной группы $E(\Phi, P, 2P)$, где P — подкольцо, лежащее между Z и R . В случае, когда $2 = 0$, вместо маленьких полупростых элементов можно использовать короткие корневые унитарные, с помощью которых извлекаются все трансвекции. В общем случае

пока непонятно, как совместить эти два способа извлечения трансвекций. Поэтому мы формулируем две проблемы: одна из них уровня хорошей дипломной работы, а вторая — уровня кандидатской диссертации.

Проблема 28. В случае, когда $2 = 0$, доказать стандартное описание надгрупп $E(\Phi, Z)$ в $G(\Phi, R)$ для типов $\Phi = B_l, C_l, F_4$.

Проблема 29. Имеет ли место стандартное описание надгрупп $E(\Phi, Z)$ в $G(\Phi, R)$ для типов $\Phi = B_l, C_l, F_4$, в случае произвольных колец $Z \leq R$?

11. Надгруппы тензорных групп

Общий вопрос, для случая надгрупп тензорных произведений в полной линейной группе, выглядит следующим образом.

Проблема 30. Пусть $n_1, \dots, n_s \geq 3$. Описать подгруппы

$$E(n_1, R) \otimes \dots \otimes E(n_s, R) \leq H \leq \mathrm{GL}(n_1 \dots n_s, R).$$

Заметим, что в таком виде эта задача не решена даже для случая поля K . В то же время, соответствующая задача для *двух* факторов в этом случае полностью решена в цикле трудных статей Ли Шанчжы, [119], [123], а все детали вычислений приведены в его книге [124]. Сформулируем частный случай теоремы Ли Шанчжы.

Теорема 13. Пусть $D = \mathrm{SL}(m, K) \otimes \mathrm{SL}(n, K)$, где $m, n \geq 3$. Далее, пусть $G = \mathrm{GL}(mn, K)$. Тогда любая подгруппа H , $D \leq H \leq G$ нормализует либо D , либо $\mathrm{SL}(n, K)$.

В случае $m = 2$ или $n = 2$ имеются дальнейшие примеры совершенных промежуточных подгрупп.

Проблема 31. Пусть $m, n \geq 3$. Описать подгруппы

$$E(m, R) \otimes E(n, R) \leq H \leq \mathrm{GL}(mn, R).$$

Первые серьезные продвижения в направлении полного решения этой задачи для коммутативных колец получены недавно Алексеем Ананьевским, первым автором и Сергеем Синчуком [1]. При этом выяснилось, что задача описания надгрупп тензорных произведений оказалась *значительно* более сложной, чем нам представлялось в момент написания [173], в момент написания [174] и даже в момент написания [167].

В то время как группа R -точек аффинной групповой схемы $\mathrm{GL}_m \oplus \mathrm{GL}_n$ совпадает с $\mathrm{GL}(m, R) \oplus \mathrm{GL}(n, R)$, для тензорных произведений это, вообще говоря, не имеет места. Подгруппа в $\mathrm{GL}(mn, R)$, состоящая из кронекеровских произведений матриц степеней m и n над R , может быть строго меньше группы R -точек аффинной групповой схемы $\mathrm{GL}_m \otimes \mathrm{GL}_n$. Иными словами, вообще говоря,

$$\mathrm{GL}(m, R) \otimes \mathrm{GL}(n, R) \subsetneq (\mathrm{GL}_m \otimes \mathrm{GL}_n)(R).$$

Это значит, что в отличие от работы [9], где можно было обойтись элементарной матричной техникой, здесь мы должны с самого начала учитывать

эффекты теории алгебраических групп, связанные, в частности, с нетривиальностью таких инвариантов, как группа Пикара [42], [144], [178], [184].

Одним их важных первых шагов в направлении полного решения сформулированной выше проблемы 31 является построение в [1] совершенных надгрупп $E(m, R) \otimes E(n, R)$, которые параметризуются, как выяснилось, *тройками* идеалов $A, B, C \leq R$, таких, что

$$mA, A^2 \leq B \leq A, \quad nA, A^2 \leq C \leq A.$$

Идеалы B и C играют роль форменных параметров и их появление не просматривается на уровне поля (поэтому они не возникают в работе Ли Шанчжи). Дело в том, что если поле имеет характеристику m или n , то оно порождается своими квадратами, так что в этом случае $A = B = C$.

Чтобы определить соответствующие подгруппы, напомним, что при рассмотрении тензорных произведений часто используется поблочная индексация матричных элементов матриц из $\text{GL}(mn, R)$, согласованная с разбиением таких матриц на $m \times m$ блоков размера $n \times n$. А именно, верхняя пара индексов указывает позицию блока в блочной матрице размера $m \times m$, а нижняя пара индексов — позицию элемента внутри такого блока размера $n \times n$.

В частности, e_{pq}^{ij} обозначает стандартную матричную единицу матричного кольца $M(mn, R)$, имеющую 1 в позиции (p, q) блока (i, j) , где $1 \leq i, j \leq m$, $1 \leq p, q \leq n$. Точно так же, элементарные трансвекции в группе $\text{GL}(mn, R)$ будут теперь обозначаться $t_{pq}^{ij}(\xi) = e + \xi e_{pq}^{ij}$, где $1 \leq i, j \leq m$, $1 \leq p, q \leq n$, $(i, p) \neq (j, q)$, а $\xi \in R$.

С такой тройкой (A, B, C) как выше связывается совершенная подгруппа

$$E(m, R) \otimes E(n, R) \leq \text{EE}(m, n, R, A, B, C) \leq \text{GL}(mn, R),$$

порожденная $E(m, R) \otimes E(n, R)$, а также элементарными трансвекциями

$$\begin{aligned} t_{pq}^{ij}(\xi), & \quad 1 \leq i \neq j \leq m, \quad 1 \leq p \neq q \leq n, \quad \xi \in A; \\ t_{pq}^{ii}(\xi), & \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq p \neq q \leq n, \quad \xi \in B; \\ t_{pp}^{ij}(\xi), & \quad 1 \leq i \neq j \leq m, \quad 1 \leq p \leq n, \quad \xi \in C. \end{aligned}$$

В работе [1] для каждой промежуточной подгруппы H доказано существование наибольшей подгруппы вида $\text{EE}(m, n, R, A, B, C)$, содержащейся в H . Кроме того, там вычисляются нормализаторы совершенных подгрупп $E(m, R) \otimes E(n, R)$ и $\text{EE}(m, n, R, A, B, C)$ в $\text{GL}(mn, R)$.

Остается, конечно, еще провести центральный фрагмент доказательства, извлечение трансвекций. Из результатов [1] видно, что сделать это будет много легче в предположении $m \neq n$, а также если $2, m, n \in R^*$, так что $A = B = C$ и дополнительных параметров в ответе не возникает.

В качестве более амбициозной задачи естественно ставить вопрос о том, чтобы совместить это описание с описанием надгрупп классических групп. Для случая поля эта задача также решена в работах Ли Шанчжи.

Проблема 32. Пусть $m, n \geq 3$, причем в случае симплектической группы m и/или n четны. Описать подгруппы

$$\begin{aligned} \mathrm{EO}(m, R) \otimes \mathrm{EO}(n, R) &\leq H \leq \mathrm{GL}(mn, R), \\ \mathrm{EO}(m, R) \otimes \mathrm{Ep}(n, R) &\leq H \leq \mathrm{GL}(mn, R), \\ \mathrm{Ep}(m, R) \otimes \mathrm{Ep}(n, R) &\leq H \leq \mathrm{GL}(mn, R). \end{aligned}$$

12. Надгруппы ring extension subgroups

В следующих задачах предлагается получить описание надгрупп для последнего не обсуждавшегося до сих пор класса $\mathcal{C}_3$, который имеет смысл обсуждать в этом контексте для произвольных коммутативных колец. В предположении $n \geq 2$ эти задачи решены для случая поля в работах Ли Шанчжы [118], [122].

Сформулируем частный случай теоремы Ли Шанчжы, чтобы показать, какой ответ естественно ожидать в общем случае.

Теорема 14. Пусть L/K — расширение полей степени m , $n \geq 3$. Тогда для любой подгруппы $\mathrm{SL}(n, L) \leq H \leq G = \mathrm{GL}(mn, K)$ существует единственное промежуточное подполе $K \leq E \leq L$, $[L : E] = d$ такое, что

$$\mathrm{SL}(dn, E) \leq H \leq N_G(\mathrm{SL}(dn, E)).$$

В случае $n = 2$, $|K| \neq \mathbb{F}_2$, описание аналогично, но при этом возникает еще одна серия совершенных промежуточных подгрупп, а именно, группы $\mathrm{Sp}(2d, E)$, для всех промежуточных полей $K \leq E \leq L$, $[L : E] = d$. В исключительном случае $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{F}_2)$, кроме того, возникают два дальнейших примера.

Отметим, что для случая *конечного* поля Роджер Дай, см., в частности, [95] — [97] и ссылки там, описал надгруппы $\mathrm{GL}(n, L)$ в $\mathrm{GL}(nm, K)$ в предположении $n \geq 1$. Однако, при $n = 1$ группа $\mathrm{GL}(1, L) = L^*$ является максимальным тором. В настоящей работе мы не обсуждаем эти результаты, так как их невозможно обобщить не то что на коммутативные кольца, но даже на произвольные поля.

Проблема 33. Пусть S/R — расширение колец, такое, что $S = R^m$ как R -модуль, а $n \geq 3$. Описать подгруппы

$$E(n, S) \leq H \leq \mathrm{GL}(mn, R).$$

Заметим, что в работе Владимира Койбаева [54] вычислены возникающие здесь нормализаторы. Стоит отметить также, что в случае некоммутативных колец различие между классами $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_5$ полностью стирается. В действительности сформулированную выше задачу можно рассматривать также как задачу, относящуюся к классу $\mathcal{C}_5$, в которой кольцо матриц играет роль основного кольца, а кольцо S — роль подкольца:

$$E(n, S) \leq H \leq \mathrm{GL}(n, M(m, R)).$$

Таким образом, с нашей точки зрения возможность полного решения этой задачи мало отличается от перспектив решения проблемы 25 для случая *алгебраических*, но не обязательно коммутативных расширений.

Естественно поставить аналогичные вопросы также для других классических групп. При этом можно, как это делает Ли Шанчжы в случае поля [118], [122] описывать их надгруппы не в соответствующей классической группе, а сразу в полной линейной группе, так что решение следующей задачи, *в частности*, обобщало бы обсуждавшиеся ранее результаты Виктора Петрова и первого автора о надгруппах классических групп.

Проблема 34. Пусть S/R — расширение колец, такое, что $S = R^m$ как R -модуль, а $n \geq 3$. Описать подгруппы

$$\begin{aligned} \text{EO}(n, S) &\leq H \leq \text{GL}(mn, R), \\ \text{EP}(2n, S) &\leq H \leq \text{GL}(2mn, R). \end{aligned}$$

Мы сознательно формулируем эту задачу для подгрупп в полной линейной группе, а не в соответствующей классической группе. Дело в том, что классическая группа над расширением может быть по разному вложена в классическую группу над основным кольцом.

13. Простые группы в максимальных вложениях

Имеется важное различие между классическими и исключительными группами. А именно, большинство максимальных подгрупп классических групп действуют неприводимо на минимальном модулях, все приводимые подгруппы легко описать. Для исключительных групп ситуация *прямо противоположна*: все подгруппы, действующие неприводимо на микровесовых и присоединенных модулях, известны, а вся трудность состоит в описании приводимых подгрупп.

С одной стороны, кажется, что описать надгруппы простых групп в неприводимых вложениях будет легче, чем в общем случае. С другой стороны, существуют максимальные неприводимые вложения совсем маленьких групп. Следующие задачи являются лишь несколькими из *многих* подобных задач. Мы уверены, что прежде, чем формулировать какие-либо общие гипотезы в этом направлении, необходимо рассмотреть три-четыре типичных случая, наподобие следующих.

Проблема 35. Опишите надгруппы $E(C_4, R)$ рассматриваемой в максимальном вложении в $G(E_6, R)$, в предположении $2 \in R^*$.

Над полем K характеристики 2 это вложение не максимально, так как в этом случае $E(C_4, K)$ содержится в $G(F_4, K)$, что должно привести к появлению новых типов подгрупп, по сравнению со случаем $2 \in R^*$.

В случае поля характеристики $\neq 2, 3$ в группах Шевалле типов E_6 и E_7 есть подгруппы типа A_2 максимальные среди связных замкнутых подгрупп.

Проблема 36. Опишите надгруппы $E(A_2, R)$ рассматриваемой в максимальных вложениях в $G(E_6, R)$ и $G(E_7, R)$, в предположении $6 \in R^*$.

Разумеется, тот факт, что эта группа максимальна для поля, еще совершенно не означает, что и над кольцом каждая промежуточная подгруппа будет нормализовать подгруппу вида $E(A_2, R)E(E_6, R, I)$ или $E(A_2, R)E(E_7, R, I)$ для некоторого идеала $I \leq R$. Как мы знаем, при этом могут обнаружиться новые классы подгрупп, появление которых нельзя предсказать на уровне поля. Кроме того, размерность группы $SL(3, R)$ настолько мала, по сравнению с размерностью объемлющей группы, что без возможности апеллировать к явной классификации представлений извлечение корневых унитарных выйдит фантастически трудным вызовом.

В действительности, для более экзотических примеров начинает играть роль обратимость дальнейших простых чисел, а не только 2 и 3.

Проблема 37. Опишите надгруппы $E(G_2, R)$ рассматриваемой в максимальном вложении в $G(E_6, R)$.

Дополнительная пикантность этой задаче придается тем обстоятельством, что над полем K характеристики 7 это вложение не максимально, так как в этом случае $E(G_2, K)$ содержится в $G(F_4, K)$. Это значит, что ответ без условия $7 \in R^*$ будет сложнее, чем при условии $7 \in R^*$, так как при этом будут появляться новые примеры, гибридизирующие E_6 и F_4 . Однако, нам пока совершенно неясно, как это условие можно будет использовать в доказательстве!

Упомянем еще несколько чрезвычайно интересных максимальных вложений непростых групп с компонентой типа G_2 . Для этих случаев анализ надгрупп потребует всего возможного технического напряжения. Вместе с тем, по сравнению с общей задачей описания надгрупп для немаксимальных вложений их сложность представляется все еще умеренной.

Проблема 38. Для $l = 6, 7, 8$ положим

$$\Delta = G_2 + A_2, G_2 + C_3, G_2 + F_2,$$

соответственно. Опишите надгруппы $E(\Delta, R)$ рассматриваемой в максимальном вложении в $G(E_l, R)$.

14. Некоторые дальнейшие классы

Вот еще одна естественная и интересная задача, которая в случае поля решена для внешнего квадрата в работе Брюса Куперстейна [90].

Проблема 39. Описать подгруппы в $GL(\binom{n}{m}, R)$, содержащие внешнюю степень

$$\bigwedge^m(E(n, R)) \leq H \leq GL(\binom{n}{m}, R),$$

в предположении $n \geq 3$.

Некоторые предварительные результаты, которые могут оказаться полезными при описании подгрупп в этом случае, можно найти в [32].

Проблема 40. Описать подгруппы в $\mathrm{GL}(\binom{n+m-1}{m}, R)$, содержащие симметрическую степень

$$S^m(E(n, R)) \leq H \leq \mathrm{GL}(\binom{n+m-1}{m}, R),$$

в предположении $n \geq 3$.

Следующие две задачи, вторая из которых значительно труднее, чем первая, представляют огромный интерес с точки зрения раздела линейной алгебры, известного как linear preserver problems. Насколько нам известно, в полной общности они не решены даже для полей. Полностью они решены лишь для классических полей и в некоторых других случаях в работах Драгомира Дьоковича, Владимира Платонова, Роберта Гуральника и Ли Чи-Квонга [93], [94], [147], [148], [101] – [104].

Проблема 41. Описать подгруппы в $\mathrm{GL}(n^2, R)$, содержащие элементарную группу $E(n, R)$, $n \geq 3$, в присоединенном представлении.

Проблема 42. Описать подгруппы в $\mathrm{GL}(n^2, R)$, содержащие элементарную классическую группу $\mathrm{EO}(n, R)$, $\mathrm{EP}(n, R)$ или $\mathrm{EU}(n, R)$, в присоединенном представлении $\mathrm{GL}(n, R)$.

Эти задачи связаны с задачей о надгруппах тензорных произведений, но, конечно, *гораздо* сложнее. Так, например, в первой из них предлагается описать надгруппы элементарной группы $E(n, R)$ во вложении

$$E(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n^2, R), \quad g \mapsto g \otimes g^{-t}.$$

Однако, как мы видели в § 12, уже описание надгрупп *гораздо* большей группы $E(n, R) \otimes E(n, R)$ является весьма трудной задачей.

15. Куда отсюда?

В настоящем обзоре мы вообще не обсуждали многие дальнейшие вопросы, которым также посвящено значительное количество публикаций. Кроме того, можно было бы указать несколько других больших направлений, в которых было бы естественно обобщать результаты, обсуждавшиеся в настоящей работе. Здесь мы вскользь упомянем несколько таких больших тем:

- подгруппы, нормализуемые большой элементарной подгруппой,
- теоремы сопряженности,
- явное вычисление возникающих в описании фактор-групп,
- улучшение оценок на ранги для специальных колец,
- промежуточные полугруппы
- надгруппы маленьких полупростых групп,
- подгруппы изотропных групп.

Как заметил второй автор в работе [71], часто описание нормальных подгрупп группы H и описание надгрупп H в большей группе G можно совместить с тем, чтобы дать полное описание подгрупп в G , нормализуемых H .

Проблема 43. *Выяснить, в каких из упомянутых выше случаев описание надгрупп H в G можно усилить до описания подгрупп в G , нормализуемых H .*

Результаты в этом направлении служили бы совместными обобщениями огромного количества предшествующих результатов, включая так называемые основные структурные теоремы. Как вытекает из результатов работы [71], для этого достаточно описать нормальные подгруппы в совершенных промежуточных подгруппах.

В теории абстрактных групп имеется множество различных условий сопряженности для промежуточных подгрупп (см., например, [86] и [174] и содержащиеся там ссылки). Мы ограничимся двумя классическими условиями, которые представляются нам наиболее интересными.

Подгруппа B называется **абнормальной** в G , если для каждого $x \in G$ имеет место включение $x \in \langle B, xBx^{-1} \rangle$. Легко видеть, что B в том и только том случае абнормальна в G , когда

- каждая содержащая B подгруппа в G самонормализуема,
- никакие две различные содержащие B подгруппы в G не сопряжены.

Типичным примером абнормальных подгрупп являются борелевская подгруппа B в редуктивной группе (теорема Шевалле—Титса). Другой типичный пример — максимальный расщепимый тор T в B , в предположении, что в основном кольце достаточно много обратимых элементов, см. ссылки в [174].

Проблема 44. *Выяснить, какие из упомянутых выше полупростых подгрупп абнормальны в G .*

Подгруппа T группы G называется **пронормальной** в G , если для каждого $x \in G$ существует такое $y \in \langle T, xTx^{-1} \rangle$, что $yTy^{-1} = xTx^{-1}$. Иными словами, это означает, что любые две подгруппы, сопряженные с T в G , сопряжены уже в порожденной ими подгруппе.

Пусть $N = N_G(T)$ нормализатор T в G . Легко видеть, что T в том и только том случае пронормальна в G , когда

- $N_G(H) = HN_N(H)$ для любой содержащей T подгруппы H ,
- любые две сопряженные подгруппы H и F , содержащие T , сопряжены элементом N .

В действительности оба эти условия естественно объединяются в следующем условии: для любых двух сопряженных подгрупп $T \leq F, H \leq G$ каждый $x \in G$ такой, что $xFx^{-1} = H$ можно выразить в виде $x = wy$ для некоторых $w \in N$ и $y \in F$. Для силовских p -подгрупп в конечных группах это соображение известно как аргумент Фраттини.

Типичным примером пронормальной подгруппы является расщепимый максимальный тор T в G для локального кольца с не слишком маленьким полем вычетов, см. ссылки в [20, 174].

Проблема 45. *Выяснить, какие из упомянутых выше полупростых подгрупп (и их элементарных подгрупп) пронормальны в G .*

В большинстве упомянутых в настоящей работе ситуаций описание промежуточных подгрупп выглядит следующим образом: описывается, обычно в терминах идеалов кольца R , некоторое семейство совершенных промежуточных подгрупп F , после чего утверждается, что каждая промежуточная подгруппа H нормализует одну из этих совершенных подгрупп. Явное вычисление фактор-групп $N_G(F)/F$ является большой самостоятельной задачей, которая обычно включает в себя геометрическую часть (ответ на которую формулируется в комбинаторных терминах, мало зависящую от природы основного кольца) и арифметическую часть (инварианты типа K -функторов). В случае общих коммутативных колец явно вычислить эти фактор-группы обычно невозможно. Однако, для некоторых специальных классов колец более чем реально надеяться на получение полных ответов.

Проблема 46. *Для дедекиндовых колец арифметического типа явно вычислить факторгруппы $N_G(F)/F$ для возникающих в ответах совершенных промежуточных подгрупп F .*

Следующая задача неявно упоминалась в связи с явлением ранней стабилизации.

Проблема 47. *Для дедекиндовых колец арифметического типа понизить на 1 требования на ранг во всех сформулированных выше задачах.*

В работе Александра Панина [145] доказано, что для артинова кольца R каждая подполугруппа в $GL(n, R)$, содержащая группу диагональных матриц, в действительности является подгруппой. Следующая задача в таком же духе не решена ни в одном нетривиальном случае — даже для надгрупп $\text{subsystem subgroups}$ в полной линейной группе!

Проблема 48. *В каких из перечисленных выше случаев все промежуточные подполугруппы являются подгруппами?*

В качестве большой и совсем не исследованной темы естественно возникает вопрос о том, в какой степени результаты настоящей работы зависят от того, что рассматриваются *большие* полупростые подгруппы. Вот простейший пример, который должен дать представление о том, что именно мы имеем в виду.

Проблема 49. *Опишите надгруппы $E(m, R)$, $3 \leq m \leq n$, в $GL(n, R)$ в естественном вложении.*

Можно предполагать, что и в таких случаях описание будет аналогично. А именно, можно явно указать некоторое семейство совершенных промежуточных подгрупп F и доказать что каждая промежуточная подгруппа H лежит между одной из таких совершенных подгрупп F и ее нормализатором $N_G(F)$. Это то, что Зенон Боревиц предложил называть веерным описанием — по-английски это обычно называется sandwiching или ladder description.

Разумеется, существенное *техническое* отличие этого случая от большинства полученных до сих пор результатов о надгруппах состоит в том,

что теперь подгруппы F будут определяться не в терминах абсолютной системы корней Φ , а в терминах подходящей *относительной* системы корней.

Кроме того, имеется одно важное *психологическое* отличие. А именно, нормализаторы больших полупростых подгрупп часто мало отличаются от самих этих подгрупп. Соответствующие фактор-группы обычно разрешимы, совсем невелики, и во многих интересных случаях могут быть явно вычислены. Поэтому обсуждавшиеся в настоящей работе результаты естественно истолковывать как *полное* описание промежуточных подгрупп. В то же время маленькие полупростые подгруппы могут иметь *огромные* нормализаторы, так что в этих случаях сэндвич-теоремы будут восприниматься скорее как редукционные результаты, чем как полное описание надгрупп.

Нет сомнения, что во многих случаях следующая задача может быть решена теми же методами, что для групп Шевалле.

Проблема 50. *Перенести результаты, относящиеся к подгруппам групп Шевалле, на все достаточно изотропные редуктивные группы.*

В этой связи упомянем чрезвычайно важную недавнюю работу Виктора Петрова и Анастасии Ставровой [64], в которой развит один из ключевых фрагментов техники, необходимой для подобных обобщений. Кроме того, важную роль в решении этой задачи могут сыграть геометрические методы, основанные на использовании классических подгрупп небольших рангов [26, 27, 31, 162].

В заключение авторы благодарят Энтони Бака, Евгения Башкирова, Лино Ди Мартино, Елизавету Дыбкову, Александра Залесского, Гари Зейтца, Оливера Кинга, Владимира Койбаева, Анатолия Кондратьева, Брюса Куперстейна, Александра Лузгарева, Ли Шанчжы, Александра Михалева (ст.), Виктора Петрова и Хон Ю за постоянные многолетние обсуждения всего этого круга задач.

Литература

1. Ананьевский А. С. О надгруппах $E(l, R) \otimes E(m, R)$. I. Очевидные подгруппы / А. С. Ананьевский, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук (to appear).
2. Аракелян Ф. О. Подгруппы полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца, содержащие группу элементарных клеточно-диагональных матриц / Ф. О. Аракелян // Депон. ВИНТИ. – 1985. – С. 1–20.
3. Басс Х. Решение конгруэнц-проблемы для SL_n ($n \geq 3$) и Sp_{2n} ($n \geq 2$) / Х. Басс, Дж. Милнор, Ж.-П. Серр // Математика (период сб. перев ин. статей). – 1970. – Т.14, N. 6. – С. 64–128 ; 1971. – Т.15, N. 1. – С. 44–60.
4. Башкиров Е. Л. Линейные группы над телами, содержащие подгруппы квадратичных унитарных элементов / Е. Л. Башкиров. – 2006. – С. 1–270.
5. Борович З. И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих

- группу диагональных матриц / З. И. Борович // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1976. – Т.64. – С. 12–29.
6. Борович З. И. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц / З. И. Борович, Н. А. Вавилов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1978. – Т.148. – С. 43–57.
 7. Борович З. И. Расположение подгрупп, содержащих группу клеточно диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом / З. И. Борович, Н. А. Вавилов // Изв. ВУЗ'ов. – 1982. – С. 12–16.
 8. Борович З. И. О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом / З. И. Борович, Н. А. Вавилов // Докл. АН СССР. – 1982. – Т.267. – С. 777–778.
 9. Борович З. И. Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом / З. И. Борович, Н. А. Вавилов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – Т.165. – С. 24–42.
 10. Борович З. И. О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом / З. И. Борович, Н. А. Вавилов, В. Наркевич // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1979. – Т.94. – С. 13–20.
 11. Борель А. Свойства и линейные представления групп Шевалле / А. Борель // Семинар по алгебраическим группам. – Мир. – М. – 1973, С. 9–59.
 12. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, Гл. IV – VI / Н. Бурбаки. – Мир. – М. – 1972.
 13. Вавилов Н. А. Параболические подгруппы полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа / Н. А. Вавилов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1977. – Т.71. – С. 66–79.
 14. Вавилов Н. А. Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом / Н. А. Вавилов // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1982. – Т.116. – С. 20–43.
 15. Вавилов Н. А. О группе SL_n над дедекиндовым кольцом арифметического типа / Н. А. Вавилов // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1983. – С. 5–10.
 16. Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа / Н. А. Вавилов // Изв. ВУЗ'ов. – 1987. – С. 14–20.
 17. Вавилов Н. А. Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом / Н. А. Вавилов // Докл. АН СССР. – 1988. – Т.299. – С. 1300–1303.
 18. Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом / Н. А. Вавилов // Сиб. Мат. Журн. – 1988. – Т.29. – С. 31–43.
 19. Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых классических групп / Н. А. Вавилов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1990. – Т.183. – С. 29–41.
 20. Вавилов Н. А. Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор / Н. А. Вавилов // Тр. Ленингр. Мат. Об-ва. – 1990. – Т.1. – С. 64–109.
 21. Вавилов Н. А. О подгруппах полной симплектической группы над коммутативным кольцом / Н. А. Вавилов // Кольца и Модули. Предельные Теоремы Теории Вероятностей. – 1993. – С. 16–38.
 22. Вавилов Н. А. Подгруппы расщепимых ортогональных групп над коммутативным кольцом / Н. А. Вавилов // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2001. – Т.281. – С. 35–59.
 23. Вавилов Н. А. О подгруппах симплектической группы, содержащих

- subsystem subgroup / Н. А. Вавилов // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2007. – Т.349. – С. 5–29.
24. Вавилов Н. А. Вычисления в исключительных группах / Н. А. Вавилов // Вестник Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. – 2007. – Т. – С. 11–24.
 25. Вавилов Н. А. Весовые элементы групп Шевалле / Н. А. Вавилов // Алгебра и Анализ. – 2008. – Т.20. – С. 34–85.
 26. Вавилов Н. А. A_2 -доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7 / Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович // Алгебра и Анализ. – 2004. – Т.16. – С. 54–87.
 27. Вавилов Н. А. Строение групп Шевалле: доказательство из Книги / Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2006. – Т.330. – С. 36–76.
 28. Вавилов Н. А. Нормализатор группы Шевалле типа E_6 / Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев // Алгебра и Анализ. – 2007. – Т.19. – С. 35–62.
 29. Вавилов Н. А. Нормализатор группы Шевалле типа E_7 / Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев // Алгебра и Анализ.
 30. Вавилов Н. А. Геометрия микровесовых торов / Н. А. Вавилов, В. В. Нестеров // Владикавказский Мат. Журн. – 2008. – Т.10. – С. 10–23.
 31. Вавилов Н. А. A_2 -доказательство структурных теорем для группы Шевалле типа F_4 / Н. А. Вавилов, С. И. Николенко // Алгебра и Анализ. – 2008. – Т.20.
 32. Вавилов Н. А. Поливекторное представление GL_n / Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2006. – Т.338. – С. 69–97.
 33. Вавилов Н. А. О надгруппах $EO(2l, R)$ / Н. А. Вавилов, В. А. Петров // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2000. – Т.272. – С. 68–85.
 34. Вавилов Н. А. О надгруппах $Er(2l, R)$ / Н. А. Вавилов, В. А. Петров // Алгебра и Анализ. – 2003. – Т.15. – С. 72–114.
 35. Вавилов Н. А. О надгруппах $EO(n, R)$ / Н. А. Вавилов, В. А. Петров // Алгебра и Анализ. – 2007. – Т.19. – С. 10–51.
 36. Вавилов Н. А. Сетевые подгруппы групп Шевалле. I, II / Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1979. – Т.94. – С. 40–49 ; 1982. – Т.114. – С. 62–76.
 37. Вавилов Н. А. Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами / Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов // Докл. АН СССР. – 1990. – Т.40. – С. 145–147.
 38. Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над кольцом, удовлетворяющим условиям стабильности / Н. А. Вавилов, А. В. Степанов // Изв. ВУЗ'ов. – 1989. – С. 19–25.
 39. Вавилов Н. А. Линейные группы над общими кольцами / Н. А. Вавилов, А. В. Степанов // Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер (to appear).
 40. Вавилов Н. А. Надгруппы A_{l-1} в гиперболическом вложении / Н. А. Вавилов, Е. А. Филиппова (to appear).
 41. Васерштейн Л. Н. О группе SL_2 над дедекиндовыми кольцами арифметического типа / Л. Н. Васерштейн // Мат. Сб. – 1972. – Т.89. – С. 313–322.
 42. Воскресенский В. Е. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп. I–IV / В. Е. Воскресенский // Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. – 1997. – С. 18–99 ; 1997. – Т.4(6). – С. 5–69 ; 1998. – Т.2(8). – С. 5–55 ; 1999. – Т.2(12). – С. 5–48.

43. Голубчик И. З. О подгруппах полной линейной группы над ассоциативным кольцом / И. З. Голубчик // Успехи мат. наук. – 1984. – Т.39. – С. 125–126.
44. Голубчик И. З. Обобщенные групповые тождества в классических группах / И. З. Голубчик, А. В. Михалев // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1982. – Т.114. – С. 96–119.
45. Дыбкова Е. В. О сетевых подгруппах гиперболических унитарных групп / Е. В. Дыбкова // Алгебра и Анализ. – 1997. – Т.9. – С. 87–96.
46. Дыбкова Е. В. Подгруппы гиперболических унитарных групп / Е. В. Дыбкова. – Докт. Дисс. СПб Гос. Ун-т. – 2006, С. 1–182.
47. Дынкин Е. Б. Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли / Е. Б. Дынкин // Мат. Сб. – 1952. – Т.30. – С. 349–362.
48. Залесский А. Е. Линейные группы / А. Е. Залесский // Успехи Мат. наук. – 1981. – Т.36. – С. 56–107.
49. Залесский А. Е. Линейные группы / А. Е. Залесский // В кн.: Итоги науки. Алгебра, Топология, Геометрия. – М. – 1985, С. 135–182.
50. Залесский А. Е. Линейные группы / А. Е. Залесский // Итоги науки. Фундаментальные направления. – 1989. – С. 114–228.
51. Казакевич В. Г. Подгруппы, нормализуемые коммутантом подгруппы Леви / В. Г. Казакевич, А. К. Ставрова // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2004. – Т.319. – С. 199–215.
52. Койбаев В. А. О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц / В. А. Койбаев // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1982. – С. 33–40.
53. Койбаев В. А. Подгруппы полной линейной группы над конечным полем, содержащие группу элементарных клеточно-диагональных матриц / В. А. Койбаев // Структурные свойства групп. – Северо-Осетинский ун-т. – Орджоникидзе. – 1982, С. 6–12.
54. Койбаев В. А. Нормализатор группы автоморфизмов модуля, возникающего при расширении основного кольца / В. А. Койбаев // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1994. – Т.211. – С. 133–135.
55. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле / А. С. Кондратьев // Успехи мат. наук. – 1986. – Т.41. – С. 57–96.
56. Короткевич А. И. Подгруппы полной линейной группы, содержащие элементарную группу в приводимом представлении / А. И. Короткевич // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2000. – Т.272. – С. 227–233.
57. Кхатиб А. О подгруппах расщепимой ортогональной группы над коммутативным кольцом / А. Кхатиб // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. – Изд-во СПбГУ. – 1993, С. 74–86.
58. Лузгарев А. Ю. О надгруппах $E(E_6, R)$ и $E(E_7, R)$ в минимальных представлениях / А. Ю. Лузгарев // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2004. – Т.319. – С. 216–243.
59. Лузгарев А. Ю. Надгруппы $E(F_4, R)$ в $G(E_6, R)$ / А. Ю. Лузгарев // Алгебра и Анализ. – 2008. – Т.20. – (см. также препринт ПОМИ 2008, N. 2, 1–34).
60. Нужин Я. Н. О группах, заключенных между группами лиева типа над различными полями / Я. Н. Нужин // Алгебра и Логика. – 1983. – Т.22. – С. 525–541.
61. Нужин Я. Н. Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем част-

- ных кольца главных идеалов / Я. Н. Нужин, А. В. Якушевич // Алгебра и Логика. – 2000. – Т.39. – С. 347–358.
62. Петров В. А. Нечетные унитарные группы / В. А. Петров // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2003. – Т.305. – С. 195–225.
63. Петров В. А. Надгруппы классических групп / В. А. Петров. – Канд. Дисс., СПб Гос Ун-т. – 2005, С. 1–129.
64. Петров В. А. Элементарные подгруппы изотропных редуктивных групп / В. А. Петров, А. К. Ставрова // Алгебра и Анализ. – 2008. – Т.20. – (см. также препринт ПОМИ 2008, N. 1, 1–20).
65. Романовский Н. С. Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом / Н. С. Романовский // Мат. Заметки. – 1969. – Т.6. – С. 335–345.
66. Романовский Н. С. О подгруппах общей и специальной линейных групп над кольцом / Н. С. Романовский // Мат. Заметки. – 1971. – Т.9. – С. 699–708.
67. Серр Ж.-П. Проблема конгруэнц-подгрупп для SL_2 / Ж.-П. Серр // Математика (период сб. перев ин. статей). – 1971. – Т.15. – С. 12–45.
68. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – Мир. – М. – 1975.
69. Степанов А. В. Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами / А. В. Степанов. – Канд. Дисс. ЛГУ. – 1987, С. 1–112.
70. Степанов А. В. Описание подгрупп полной линейной группы над кольцом при помощи условий стабильности / А. В. Степанов // Кольца и линейный группы. – Краснодар. – 1988, С. 82–91.
71. Степанов А. В. О расположении подгрупп, нормализуемых фиксированной / А. В. Степанов // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1991. – Т.198. – С. 92–102.
72. Шмидт Р. А. О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца главных идеалов / Р. А. Шмидт // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1979. – Т.86. – С. 185–187.
73. Шмидт Р. А. О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца / Р. А. Шмидт // Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1979. – Т.94. – С. 119–130.
74. Шмидт Р. А. О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца Безу / Р. А. Шмидт // Структурные свойства алгебраических систем. – Нальчик. – 1981, С. 133–135.
75. Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups / M. Aschbacher // Invent. Math. – 1984. – V.76. – P. 469–514.
76. Aschbacher M. Subgroup structure of finite groups / M. Aschbacher // Proc. Rutgers Group Theory Year. 1983–84. – Cambridge Univ. Press. – 1984, P. 33–44.
77. Aschbacher M. Finite simple groups and their subgroups / M. Aschbacher // Lecture Notes Math., V.1185. – 1986, P. 1–57.
78. Bak A. The stable structure of quadratic modules / A. Bak. – Thesis, Columbia Univ. – 1969, P. 1–120.
79. Bak A. K-theory of forms / A. Bak. – Princeton Univ. Press. – Princeton, N.J. – 1981.
80. Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability / A. Bak // K-Theory. – 1991. – V.4. – P. 363–397.
81. Bak A. Localization-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent by abelian / A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov // J. K-theory. – 2008.

82. Bak A. Stability for quadratic K_1 / A. Bak, V. Petrov, Guoping Tang // K-Theory. – 2003. – V.30. – P. 1–11.
83. Bak A. Dimension theory and nonstable K-theory for net groups / A. Bak, A. Stepanov // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 2001. – V.106. – P. 207–253.
84. Bak A. Stability for hermitian K_1 / A. Bak, Guoping Tang // J. Pure Appl. Algebra. – 2000. – V.150. – P. 107–121.
85. Bak A. Structure of hyperbolic unitary groups I. Elementary subgroups / A. Bak, N. Vavilov // Algebra Colloq. – 2000. – V.7. – P. 159–196.
86. Borewicz Z. I. Zwischengruppenverbände / Z. I. Borewicz, K. Rosenbaum // Sitzungber. Akad. gemein. Wiss. Erfurt, Math.–Natur. Kl. – 2001. – P. 1–80.
87. Burgoyne N. Maximal subgroups and automorphisms of Chevalley groups / N. Burgoyne, R. Griess, R. Lyons // Pacif. J. Math. – 1977. – V.71. – P. 365–403.
88. Carter R. W. Simple groups of Lie type / R. W. Carter. – Wiley. – London et al. – 1972.
89. Carter R. W. Conjugacy classes in the Weyl group / R. W. Carter // Compositio Math. – 1972. – V.25. – P. 1–59.
90. Cooperstein B. N. Nearly maximal representations for the special linear group / B. N. Cooperstein // Michigan Math. J. – 1980. – V.27. – P. 3–19.
91. Costa D. L. Radix redux: normal subgroups of symplectic group / D. L. Costa, G. E. Keller // J. reine angew. Math. – 1992. – V.427. – P. 51–105.
92. Cremona J. E. On $GL(n)$ of Dedekind domains / J. E. Cremona // Quart. J. Math. – 1988. – V.39. – P. 423–426.
93. Djoković D. Z. Overgroups of some classical linear groups with application to some linear preserver problems / D. Z. Djoković, Chi-Kwong Li // Linear Algebra Appl. – 1994. – V.197–198. – P. 31–62.
94. Djoković D. Z. Algebraic groups and linear preserver problems / D. Z. Djoković, V. P. Platonov // C. R. Acad. Sci Paris, Sér. I. – 1993. – V.317. – P. 925–930.
95. Dye R. W. Maximal subgroups of symplectic groups stabilizing spreads. I, II / R. W. Dye // J. Algebra. – 1984. – V.87, N. 2. – P. 493–509 ; J. London. Math. Soc. – 1989. – V.40, N. 2. – P. 215–226.
96. Dye R. W. Maximal subgroups of $PSp_{6n}(q)$ stabilizing spreads of totally isotropic planes / R. W. Dye // J. Algebra. – 1986. – V.99. – P. 111–129.
97. Dye R. W. Spreads and classes of maximal subgroups of $GL_n(q)$, $SL_n(q)$, $PGL_n(q)$ and $PSL_n(q)$ / R. W. Dye // Ann. Math. Pura Appl. – 1991. – V.158. – P. 33–50.
98. Ford B. Overgroups of irreducible linear groups. I, II / B. Ford // J. Algebra. – 1996. – V.181, N. 1. – P. 26–69 ; Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – V.351, N. 10. – P. 3869–3913.
99. Gordeev N. L. Freedom in conjugacy classes of simple algebraic groups and identities with constants / N. L. Gordeev // Алгебра и Анализ. – 1998. – V.9. – P. 709–723.
100. Griess R. L. Basic conjugacy theorems for G_2 / R. L. Griess // Invent. Math. – 1995. – V.121. – P. 257–277.
101. Guralnick R. M. Invertible preservers and algebraic groups / R. M. Guralnick // Linear Algebra Appl. – 1994. – V.212–213. – P. 249–157.
102. Guralnick R. M. Invertible linear preservers and algebraic groups. II. Preservers

- of similarity matrices and overgroups of $\mathrm{PSL}_n(F)$ / R. M. Guralnick // *Linear Multilinear Algebra*. – 1997. – V.43. – P. 221–255.
103. Guralnick R. M. Monodromy groups of coverings of curves / R. M. Guralnick // *Galois groups of coverings of curves*, V.41. – MSRI Publications. – 2003, P. 1–46.
104. Guralnick R. M. Invertible linear preservers and algebraic groups. III. Preservers of unitary similarity (congruence) invariants and overgroups of some unitary groups / R. M. Guralnick, Chi-Kwong Li // *Linear Multilinear Algebra*. – 1997. – V.43. – P. 257–282.
105. Hahn A. The classical groups and K-theory / A. Hahn, O. T. O'Meara. – Springer-Verlag. – N.Y. et al. – 1989.
106. Harebov A. L. On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus / A. L. Harebov, N. A. Vavilov // *Comm. Algebra*. – 1996. – V.24. – P. 109–133.
107. Hazrat R. Dimension theory and non-stable K_1 of quadratic module / R. Hazrat // *K-theory*. – 2002. – V.27. – P. 293–327.
108. Hazrat R. K_1 of Chevalley groups are nilpotent / R. Hazrat, N. Vavilov // *J. Pure Appl. Algebra*. – 2003. – V.179. – P. 99–116.
109. Hazrat R. Bak's work on K -theory of rings (with an appendix by Max Karoubi) / R. Hazrat, N. Vavilov // *Preprint Queen's Univ. Belfast*. – 2008. – V.. – P. 1–60.
110. Hering Ch. The factorizations of the finite exceptional groups of Lie type / Ch. Hering, M. W. Liebeck, J. Saxl // *J. Algebra*. – 1987. – V.106. – P. 517–527.
111. Holt D. F. Constructing maximal subgroups of classical groups / D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal // *London Math. Soc. J. Comput. Math*. – 2005. – V.8. – P. 46–79.
112. van der Kallen W. Stability for K_2 of Dedekind rings of arithmetic type / van der Kallen W. // *Lecture Notes Math*. – 1981. – V.854. – P. 217–248.
113. King O. H. The subgroup structure of the classical groups / O. H. King // *Contemp. Math*. – 1992. – V.131. – P. 209–215.
114. Kleidman P. A survey of the maximal subgroups of the finite simple groups / P. Kleidman, M. W. Liebeck // *Geom. dedic.* – 1988. – V.25. – P. 375–389.
115. Kleidman P. The subgroup structure of the finite classical groups / P. Kleidman, M. W. Liebeck. – Cambridge Univ. Press. – 1990.
116. Kovács L. G. On tensor induction of group representations / L. G. Kovács // *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*. – 1990. – V.49. – P. 486–501.
117. Lawther R. A_1 subgroups of exceptional algebraic groups / R. Lawther, D. M. Testerman // *Mem. Amer. Math. Soc.* – 1999. – V.674. – P. 1–131.
118. Li Shangzhi Overgroups in $\mathrm{GL}(nr, F)$ of certain subgroups of $\mathrm{SL}(n, K)$. I / Shangzhi Li // *J. Algebra*. – 1989. – V.125. – P. 215–235.
119. Li Shangzhi Overgroups in $\mathrm{GL}(U \otimes W)$ of certain subgroups of $\mathrm{GL}(U) \otimes \mathrm{GL}(W)$. I / Shangzhi Li // *J. Algebra*. – 1991. – V.137. – P. 338–368.
120. Li Shangzhi Overgroups in $\mathrm{GL}(n, F)$ of a classical group over a subfield of F / Shangzhi Li // *Algebra Colloquium*. – 1994. – V.1. – P. 335–346.
121. Li Shangzhi On the subgroup structure of classical groups / Shangzhi Li // *Group theory in China*. – Kluwer Academic. – N.Y. et al. – 1996, P. 70–90.
122. Li Shangzhi Overgroups in $\mathrm{GL}(nr, F)$ of certain subgroups of $\mathrm{SL}(n, K)$. II / Shangzhi Li // *preprint*. – V..

123. Li Shangzhi Overgroups in $GL(U \otimes W)$ of certain subgroups of $GL(U) \otimes GL(W)$.
II / Shangzhi Li // preprint. – V..
124. Li Shangzhi Subgroup structure of classical groups / Shangzhi Li. – Shanghai Scientific & Technical Publ. – 1998.
125. Liebeck M. W. Introduction to the subgroup structure of algebraic groups / M. W. Liebeck. – Preprint Newton Inst. Math. Sci.. – Cambridge. – 1997, P. 1–21.
126. Liebeck M. W. Subgroups of exceptional groups / M. W. Liebeck // Algebraic groups and their representations (Cambridge – 1997). – Kluwer Acad. Publ. – Dordrecht. – 1998, P. 275–290.
127. Liebeck M. W. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M. W. Liebeck, C. E. Praeger, J. Saxl // Mem. Amer. Math. Soc. – 1990. – V.86. – P. 1–151.
128. Liebeck M. W. On factorizations of almost simple groups / M. W. Liebeck, C. E. Praeger, J. Saxl // J. Algebra. – 1996. – V.185. – P. 409–419.
129. Liebeck M. W. On the overgroups of irreducible subgroups of the finite classical groups / M. W. Liebeck, J. Saxl, G. M. Seitz // Proc. London Math. Soc. – 1987. – V.55. – P. 507–537.
130. Liebeck M. W. Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type / M. W. Liebeck, J. Saxl, G. M. Seitz // Proc. London Math. Soc. – 1992. – V.65. – P. 297–325.
131. Liebeck M. W. Factorisations of simple algebraic groups / M. W. Liebeck, J. Saxl, G. M. Seitz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – V.348. – P. 799–822.
132. Liebeck M. W. Simple subgroups of large rank in groups of Lie type / M. W. Liebeck, J. Saxl, D. M. Testerman // Proc. London Math. Soc. – 1996. – V.72. – P. 425–457.
133. Liebeck M. W. Maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // Geom. dedic. – 1990. – V.36. – P. 353–387.
134. Liebeck M. W. Subgroups generated by root elements in groups of Lie type / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // Ann. Math. – 1994. – V.139. – P. 293–361.
135. Liebeck M. W. Reductive subgroups of exceptional algebraic groups / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // Mem. Amer. Math. Soc. – 1996. – V.580. – P. 1–111.
136. Liebeck M. W. On the subgroup structure of classical groups / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // Invent. Math. – 1998. – V.134. – P. 427–453.
137. Liebeck M. W. On the subgroup structure of exceptional groups of Lie type / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – V.350. – P. 3409–3482.
138. Liebeck M. W. On finite subgroups of exceptional algebraic groups / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // J. reine angew. Math. – 1999. – V.515. – P. 25–72.
139. Liebeck M. W. Subgroups of simple algebraic groups containing elements of fundamental subgroups / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1999. – V.126. – P. 461–479.
140. Liebeck M. W. The maximal subgroups of positive dimension in exceptional algebraic groups / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // Mem. Amer. Math. Soc. – 2004. – V.169. – P. 1–227.
141. Liebeck M. W. Subgroups of exceptional groups which are irreducible on an

- adjoint or minimal module / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // J. Group Theory. – 2004. – V.7. – P. 347–372.
142. Liebeck M. W. Maximal subgroups of large rank in exceptional groups of Lie type / M. W. Liebeck, G. M. Seitz // J. London Math. Soc. – 2005. – V.71. – P. 345–361.
143. Liehl B. On the group SL_2 over orders of arithmetic type / B. Liehl // J. reine angew. Math. – 1981. – V.323. – P. 153–171.
144. Milne J. S. Algebraic groups and arithmetic groups / J. S. Milne. – 2006, P. 1–219.
145. Panin A. A. Intermediate semigroups are groups / A. A. Panin // Semigroup Forum. – V..
146. Petrov V. A. Overgroups of unitary groups / V. A. Petrov // K-Theory. – 2003. – V.29. – P. 77–108.
147. Platonov V. P. Linear preserver problems and algebraic groups / V. P. Platonov, D. Z. Djoković // Preprint SFB-343 Uni. Bielefeld. – 1994. – V.29. – P. 1–20.
148. Platonov V. P. Subgroups of $GL(n^2, \mathbb{C})$ containing $PSU(n)$ / V. P. Platonov, D. Z. Djoković // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – V.348. – P. 141–152.
149. Proud R. Subgroups of type A_1 containing a fixed unipotent elements in an algebraic group / R. Proud, J. Saxl, D. M. Testerman // J. Algebra. – 2000. – V.231. – P. 53–66.
150. Seitz G. M. On the subgroup structure of classical groups / G. M. Seitz // Comm. Algebra. – 1982. – V.10. – P. 875–885.
151. Seitz G. M. Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type / G. M. Seitz // Pacif. J. Math. – 1983. – V.106. – P. 153–244.
152. Seitz G. M. Overgroups of irreducible linear groups / G. M. Seitz // Proc. Rutgers Group Theory Year, 1983–1984. – Cambridge Univ. Press. – 1984, P. 95–106.
153. Seitz G. M. The maximal subgroups of classical algebraic groups / G. M. Seitz // Memoirs Amer. Math. Soc. – 1987. – V.67. – P. 1–286.
154. Seitz G. M. Representations and maximal subgroups of finite groups of Lie type / G. M. Seitz // Geom. dedic. – 1988. – V.25. – P. 391–406.
155. Seitz G. M. Maximal subgroups of exceptional groups / G. M. Seitz // Contemp. Math. – 1989. – V.82. – P. 143–157.
156. Seitz G. M. Cross-characteristic embeddings of finite groups of Lie type / G. M. Seitz // Proc. London. Math. Soc. – 1990. – V.60. – P. 166–200.
157. Seitz G. M. Maximal subgroups of exceptional algebraic groups / G. M. Seitz // Mem. Amer. Math. Soc. – 1991. – V.441. – P. 1–197.
158. Seitz G. M. Algebraic groups / G. M. Seitz // Algebraic groups and their representations (Cambridge – 1997). – Kluwer Acad. Publ. – Dordrecht. – 1998.
159. Seitz G. M. Maximal subgroups of finite exceptional groups / G. M. Seitz // Groups and geometries (Siena – 1996). – Birkhäuser. – Basel et al. – 1998, P. 155–161.
160. Seitz G. M. Unipotent centralizers in algebraic groups / G. M. Seitz // J. Algebra. – 2004. – V.279. – P. 226–259.
161. Seitz G. M. Topics in the theory of algebraic groups / G. M. Seitz // Group representation theory. – EPFL Press. – Lausanne. – 2007, P. 355–404.
162. Seitz G. M. Subgroups of type A_1 containing semiregular unipotent elements / G. M. Seitz, D. M. Testerman // J. Algebra. – 1997. – V.196. – P. 595–619.

163. Stavrova A. Normal structure of maximal parabolic subgroups in Chevalley groups over rings / A. Stavrova // Algebra Colloquium (to appear).
164. Stepanov A. Nonstandard subgroups between $E_n(R)$ and $GL_n(A)$ / A. Stepanov // Algebra Colloquium. – 2004. – V.10. – P. 321–334.
165. Stepanov A. Free product subgroups between Chevalley groups $G(\Phi, F)$ and $G(\Phi, F[t])$ / A. Stepanov // Israel J. Math. – 2008. – V. (to appear).
166. Stepanov A. Subring subgroups in symplectic and odd orthogonal group / A. Stepanov // Israel J. Math. – 2008. – V. (to appear).
167. Stepanov A. Decomposition of transvections: a theme with variations / A. Stepanov, N. Vavilov // K-Theory. – 2000. – V.19. – P. 109–153.
168. Stepanov A. Overgroups of semi-simple subgroups via localisation-completion / A. Stepanov, N. Vavilov, Hong You. – V. (to appear).
169. Testerman D. M. Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups / D. M. Testerman // Mem. Amer. Math. Soc. – 1988. – V.390. – P. 1–190.
170. Testerman D. M. A construction of certain maximal subgroups of exceptional algebraic groups E_6 and F_4 / D. M. Testerman // J. Algebra. – 1989. – V.122. – P. 299–322.
171. Testerman D. M. The construction of the maximal A_1 's in the exceptional algebraic groups / D. M. Testerman // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – V.116. – P. 635–644.
172. Testerman D. M. A_1 -type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups / D. M. Testerman // J. Algebra. – 1995. – V.177. – P. 34–76.
173. Vavilov N. Structure of Chevalley groups over commutative rings / N. Vavilov // Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990). – World Sci. Publ. – Singapore et al. – 1991, P. 219–335.
174. Vavilov N. Intermediate subgroups in Chevalley groups / N. Vavilov // Proc Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993). – Cambridge Univ. Press. – 1995, P. 233–280.
175. Vavilov N. A third look at weight diagrams / N. Vavilov // Rend Sem. Mat. Univ. Padova. – 2000. – V.104. – P. 201–250.
176. Vavilov N. An A_3 -proof of structure theorems for Chevalley groups of types E_6 and E_7 / N. Vavilov // Int. J. Algebra Comput. – 2007. – V.17. – P. 1283–1298.
177. Vavilov N. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations / N. Vavilov, E. Plotkin // Acta Applicandae Math. – 1996. – V.45. – P. 73–113.
178. Voskresenskii V. E. Algebraic groups and their birational invariants / V. E. Voskresenskii. – Amer. Math. Soc.. – Providence, RI. – 1998.
179. Wang Dengyin Overgroups of Levi subgroups in parabolic subgroups in Chevalley groups / Dengyin Wang // Acta Math. Sinica. – 2000. – V.43. – P. 931–936. – (Chinese).
180. Wang Dengyin A new type of pronormal subgroups in Chevalley groups / Dengyin Wang // Chinese Ann. Math., Ser. B. – 2001. – V.22. – P. 243–248.
181. Wang Dengyin Overgroups of $A_2(F)$ in $G_2(F)$ and its pronormality / Dengyin Wang // Acta Math. Sinica. – 2002. – V.45. – P. 563–566.
182. Wang Dengyin Overgroups of $L(K)$ in $L(F)$ / Dengyin Wang, Shangzhi Li // Algebra Colloq. – 1998. – V.5. – P. 417–424.

- 183. Wang Dengyin Overgroups of $L_1(F)$ in $L(F)$ / Dengyin Wang, Shangzhi Li // J. China Univ. Sci. Tech. – 1998. – V.28. – P. 246–269. – (Chinese).
- 184. Waterhouse W. C. Introduction to affine group schemes / W. C. Waterhouse. – Springer-Verlag. – N.Y. et al. – 1979.
- 185. You Hong Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings / Hong You // J. Algebra. – 2004. – V.282. – P. 23–32.
- 186. You Hong Overgroups of classical groups in linear group over Banach algebras / Hong You // J. Algebra. – 2006. – V.304. – P. 1004–1013.
- 187. You Hong Overgroups of classical groups over commutative ring in linear group / Hong You // Sci China, Ser. A. – 2006. – V.49. – P. 626–638.

Поступила в редакцию 24/IV/2008;
в окончательном варианте — 24/IV/2008.

OVERGROUPS OF SEMISIMPLE GROUPS

© 2008 N.A. Vavilov⁶ A.V. Stepanov⁷

The paper is a systematic survey of results on overgroups of elementary subgroups of semisimple groups over a commutative ring in the group of points of another semisimple group (generally speaking, over a different commutative ring). As a general context we use the framework of Aschbacher's subgroup structure theorem. We specially concentrate on the recent results obtained in Saint-Petersburg. In particular we expound the description of overgroups of classical groups, obtained by Viktor Petrov, the first author and Hong You, as well as further related results by Alexander Luzgarev on overgroups of exceptional groups (Aschbacher class $\mathcal{C}_8$), and the description of overgroups of subring subgroups, obtained by the second author (Aschbacher class $\mathcal{C}_5$). Furthermore, we outline in some detail description of overgroups of tensored subgroups obtained by Alexei Ananievski, the first author and Sergei Sinchuk (Aschbacher classes $\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_7$) and recent results on overgroups of subsystem subgroups in exceptional groups (Aschbacher classes $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$). We state 50 further unsolved problems in this field.

Keywords: *overgroup, semisimple group, Shevalle group, commutative ring, exceptional group, tensored subgroup.*

Paper received 24/IV/2008.

Paper accepted 24/IV/2008.

⁶Vavilov Nikolai Aleksandrovich (nikolai-vavilov@yandex.ru), Dept. of Mathematics and Mechanics, St.Petersburg State University, Universitetskij pr. 28, 198504, Staryj Petergof, St.Petersburg, Russia

⁷Stepanov Alexei Vladimirovich (alexei@stepanov.spb.su), Dept. of Higher Mathematics N.2, St.Petersburg Electrotechnical University, ul. Prof. Popova 5, 197376, St.Petersburg, Russia