

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА¹

© 2008 А.Д. Баев²

Предложен новый метод доказательства априорных оценок и теоремы существования решения общей краевой задачи в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка.

Ключевые слова: априорные оценки, вырождающееся уравнение, пространство С.Л. Соболева, регуляризатор, краевая задача.

Введение

Вырождающиеся уравнения моделируют процессы, происходящие вблизи границ различных сред. Фундаментальные результаты для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка принадлежат М.В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О.А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С.Г. Михлина [3] и М.И. Вишика [4]. Метод "эллиптической регуляризации" был применен О.А. Олейник [5], а затем Дж.Дж. Коном и Л. Ниренбергом [6] для изучения эллиптико-параболических уравнения второго порядка. В работах В.П. Глушко [7, 8] установлена коэрцитивная разрешимость краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальном образом построенных пространствах типа пространств С.Л. Соболева. Исследование вырождающихся уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М.И. Вишика и В.В. Грушина [9, 10]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен С.З. Левендорским [11]. Отметим, что существенным условием работы [11] является принадлежность основной весовой

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

²Баев Александр Дмитриевич (baev@math.vsu.ru), кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1

функции $\alpha(t)$ пространству $C^\infty(\mathbb{R}^1)$. В работах А.Д. Баева [12, 13] были получены коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании и единственности решений общих краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка в случае, когда весовая функция не обязательно является степенной функцией и бесконечно дифференцируемой. Указанная задача изучалась с помощью специального класса псевдодифференциальных операторов с постоянным символом, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α . Это преобразование было введено в работе [14], а псевдодифференциальные операторы, построенные по этому преобразованию были рассмотрены в [12, 13]. Такие операторы были названы весовыми псевдодифференциальными операторами.

Данная работа является развитием работ [12, 13]. В работе установлен ряд важных свойств весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом и с использованием этих свойств предложен новый метод доказательства коэрцитивных априорных оценок и теорем существования для более широкого класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами.

1. Основные определения и результаты

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^1$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$; $\alpha(t) = \text{const}$ при $t \geq d > 0$, где $d > 0$ — некоторое число. Следуя работе [14], введем интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное первоначально, например, на функциях $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$.

Это преобразование связано с преобразованием Фурье $F_{\tau \rightarrow \eta}$ следующим равенством:

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau \rightarrow \eta}[u_\alpha(\tau)],$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции

$$\tau = \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u(t)](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)},$$

что дает возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(\mathbb{R}^1)$ и $L_2(\mathbb{R}_+^1)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(\mathbb{R}^1)$ на $L_2(\mathbb{R}_+^1)$. На функциях $w(\eta) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ преобразование F_α^{-1} может

быть записано в виде

$$F_{\alpha}^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1}[w] \Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$F_{\alpha}[D_{\alpha,t}^j u(t)](\eta) = \eta^j F_{\alpha}[u(t)](\eta),$$

где $D_{\alpha,t} u(t) = i \sqrt{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\alpha(t)} u(t))$.

Определим пространства $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$, в которых изучается задача.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(\mathbb{R}_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s |F_{\alpha} F_{x \rightarrow \xi}[v(x,t)]|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ ($s \geq 0$, $q > 1$ — действительные числа) состоит из тех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q}^2 = \sum_{j+ql \leq s} \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_{\alpha}^{-1} \left[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^j F_{\alpha} F_{x \rightarrow \xi} \left(\frac{\partial^l v(x,t)}{\partial t^l} \right) \right] \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}^2.$$

Условие 1. Существует такое число $\nu \in (0; 1]$, что функция $\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)$ является ограниченной функцией при всех $t \in [0; +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0; +\infty)$ для некоторого $s_1 \geq 2N - |\sigma|$, где σ — некоторое действительное число

$$N \geq \max_{0 \leq p \leq l} \left\{ 2p + \frac{l-p+1}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2} \right\}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Заметим, что существование такого числа $\nu \in (0; 1]$ следует из условия $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования F_{α} и преобразования Фурье $F_{x \rightarrow \xi}$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} F_{\alpha}^{-1} \left\{ \lambda(t, \xi, \eta) F_{\alpha} F_{x \rightarrow \xi}[v(x,t)] \right\}.$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha}^{\sigma}(\Omega)$, где $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}_+^1$, если функция $\lambda(t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in \mathbb{R}^1$. Причем при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \lambda(t, \xi, \eta) \right| \leq c_{jl} (1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-l}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, $t \in \Omega$. Здесь σ — действительное число.

Сформулируем свойства весовых псевдодифференциальных операторов, необходимые для доказательства основных результатов работы.

Теорема 1. Пусть $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ и $Q(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $p(t, \xi, \eta)$ и $q(t, \xi, \eta)$, принадлежащими соответственно классам $S_{\alpha}^{m_1}(\Omega)$ и $S_{\alpha}^{m_2}(\Omega)$ (m_1, m_2 — действительные числа). Тогда для любого $N \geq 0$ существует такое $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(t, \xi, \eta) \in S_{\alpha}^{-N}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$P(t, D_x, D_{\alpha,t})Q(t, D_x, D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1} R_j(t, D_x, D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t}),$$

где $T_{N_1}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(t, \xi, \eta)$; $R_j(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(t, \xi, \eta) = \frac{1}{j!} \cdot \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} P(t, \xi, \eta) \cdot \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^j q(t, \xi, \eta).$$

Теорема 2. Пусть $p(t, \xi, \eta) \in S_{\alpha}^m(\Omega)$, m — действительное число. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m, \alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ в $H_{s, \alpha}(\mathbb{R}_+^n)$.

В следующих двух теоремах получены оценки для коммутатора весового псевдодифференциального оператора и оператора дифференцирования $\frac{\partial^l}{\partial t^l}$, $l = 1, 2, \dots$

Теорема 3. Пусть символ $\lambda(t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S_{\alpha}^{\sigma}(\Omega)$, $\Omega \in \overline{\mathbb{R}}_+^1$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$. Пусть $v(x, t) \in H_{s+\sigma, \alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, $\frac{\partial^l v(x, t)}{\partial t^l} \in H_{s+\sigma, \alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, $l = 1, 2, \dots$. Пусть выполнено условие 1 (с заменой σ на $s + \sigma$). Тогда для оператора

$$M_{l, \sigma} = \frac{\partial^l}{\partial t^l} K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t}) - K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t}) \frac{\partial^l}{\partial t^l} \quad (1.1)$$

справедлива оценка

$$\|M_{l, \sigma} v\|_{s, \alpha} \leq c \left(\sum_{j=0}^l \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{s+\sigma-1, \alpha} + \sum_{j=0}^{l-1} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{s+\sigma, \alpha} \right)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v .

Теорема 4. Пусть $q > 1$, $s \geq 0$ — действительные числа, $v(x, t) \in H_{s+(l+1)q, \alpha, q}(\mathbb{R}_+^n)$, $l = 1, 2, \dots$. Пусть символ $\lambda(t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S_{\alpha}^q(\Omega)$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = s + q$. Тогда для оператора $M_{l, q}$, определенного в (1.1) при $\sigma = q$, справедлива оценка

$$\|M_{l, q} v\|_{s, \alpha, q} \leq c \|v\|_{s+(l+1)q-1, \alpha, q}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v .

Теорема 5. Пусть $q > 1$, σ — действительные числа, $v(x, t) \in H_{q+\sigma, \alpha, q}(\mathbb{R}_+^n)$. Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow +0} K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha, t})v(x, t) = \lim_{t \rightarrow +0} K^{(\sigma)}(0, D_x, 0)v(x, t).$$

Теорема 6. Пусть выполнено условие 1, и символ $\lambda(t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha, t})$ принадлежит классу $S_\alpha^\sigma(\Omega)$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$. Пусть при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}^1$ функция $\lambda(t, \xi, \eta)$ является ограниченной функцией по переменной $t \in \mathbb{R}_+^1$. Пусть функция $v(x, t)$ такова, что функция $D_{\alpha, t}^N v(x, t)$ при всех $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $L_2(\mathbb{R}_+^1)$ при некотором $N \in [\max(\sigma + 1, 1); s_1]$, где s_1 определено в условии 1. Пусть $\lim_{t \rightarrow +\infty} D_{\alpha, t}^i v(x, t) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Тогда при всех $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} K^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha, t})v(x, t) = 0.$$

Определение 4. Будем говорить, что функция $k(t, y, \xi, \eta)$ принадлежит классу $S^{m, \alpha}(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}_+^1}$, $m \in \mathbb{R}^1$, если функция $k(t, y, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $t \in \Omega$, $y \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^1$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ и на компактных подмножествах множества $\Omega \times \Omega$ имеет место оценка

$$\left| \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \left(\alpha(y) \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} k(t, y, \xi, \eta) \right| \leq c_{jkl} (1 + |\xi| + |\eta|)^{m-l}$$

с константами $c_{jkl} > 0$, не зависящими от t, y, η, ξ .

Рассмотрим оператор вида

$$K(u)(x, t) = F_{\alpha_{\eta \rightarrow t}}^{-1} F_{\alpha_{y \rightarrow \eta}} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \{k(t, y, \xi, \eta) F_{x \rightarrow \xi}[u(x, y)]\}, \quad (1.2)$$

где $F_{\alpha_{y \rightarrow \eta}}$ ($F_{\alpha_{\eta \rightarrow t}}^{-1}$) — прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее y в η (η в t).

Теорема 7. Пусть K — оператор вида (1.2), причем $k(t, y, \xi, \eta) \in S^{m, \alpha}(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}_+^1}$, $m \in \mathbb{R}^1$. Тогда найдется такой символ $p(t, \xi, \eta) \in S_\alpha^m(\Omega)$, что $K = P(t, D_x, D_{\alpha, t})$, где $P(t, D_x, D_{\alpha, t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $p(t, \xi, \eta)$. Причем

$$p(t, \xi, \eta) = \sqrt{\alpha(t)} \exp \left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right) K \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}} \exp \left(-i\eta \int_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right) \right).$$

При этом справедливо соотношение

$$p(t, \xi, \eta) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(i!)^j}{j!} \left(\alpha(y) \frac{\partial}{\partial y} \right)^j \frac{\partial^j k(t, y, \xi, \eta)}{\partial \eta^j} \Big|_{y=t} \in S_\alpha^{m-N}(\Omega)$$

при любых $N = 1, 2, \dots$.

Утверждение теоремы 7 дает возможность построить сопряженный оператор к весовому псевдодифференциальному оператору.

Определение 5. Сопряженным оператором к весовому псевдодифференциальному оператору $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ назовем оператор $P^*(t, D_x, D_{\alpha,t})$, удовлетворяющий равенству

$$(P(t, D_x, D_{\alpha,t})u(x, t), v(x, t))_{L_2(\mathbb{R}_+^n)} = (u(x, t), P^*(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t))_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}$$

для всех $v(x, t) \in L_2(\mathbb{R}_+^n)$, $u(x, t) \in L_2(\mathbb{R}_+^n)$ таких, что $P(t, D_x, D_{\alpha,t})u(x, t) \in L_2(\mathbb{R}_+^n)$. Здесь $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathbb{R}_+^n)}$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}_+^n)$.

Теорема 8. Пусть $p(t, \xi, \eta) \in S_\alpha^m(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}_+^1}$, $m \in \mathbb{R}^1$. Тогда оператор $P^*(t, D_x, D_{\alpha,t})$, сопряженный к весовому псевдодифференциальному оператору $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ с символом $p(t, \xi, \eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $p^*(t, \xi, \eta) \in S_\alpha^m(\Omega)$, причем, для любого $N = 1, 2, \dots$ справедливо соотношение

$$p^*(t, \xi, \eta) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{i^j}{j!} \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^j \frac{\partial^j \bar{p}(t, \xi, \eta)}{\partial \eta^j} \in S_\alpha^{m-N}(\Omega),$$

где $\bar{p}(t, \xi, \eta)$ — функция, комплексно сопряженная к функции $p(t, \xi, \eta)$.

С помощью теорем 7 и 8 доказывается неравенство, являющееся аналогом неравенства Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов.

Теорема 9. Пусть $P(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $p(t, \xi, \eta) \in S_\alpha^m(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}_+^1}$, $m \in \mathbb{R}^1$. Пусть $\operatorname{Re} p(t, \xi, \eta) \geq c(1 + |\xi| + |\eta|)^m$, для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, $t \in \Omega$. Тогда для любой функции $u(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \Omega)$ и любого $s_1 \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(P(t, D_x, D_{\alpha,t})u(x, t), u(x, t))_{L_2(\mathbb{R}_+^n)} \geq c_0 \|u\|_{\frac{m}{2}, \alpha}^2 - c_1 \|u\|_{s_1, \alpha}^2$$

с некоторыми константами $c > 0$, $c_1 > 0$, не зависящими от u , t , x .

С помощью полученных свойств весовых псевдодифференциальных операторов доказываются коэрцитивные априорные оценки решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. При этом удалось применить впервые для вырождающихся эллиптических уравнений метод "разделяющего" оператора. Этот метод позволяет свести при доказательстве априорных оценок случай общих граничных условий к случаю существенно более простому: однородным условиям Дирихле. Доказательство априорной оценки, по-существу, сводится к построению "разделяющего" оператора.

В $\mathbb{R}_+^n$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$A\left(t, D_x, D_{\alpha,t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)v(x, t) = F(x, t), \quad (1.3)$$

где

$$A\left(t, D_x, D_{\alpha,t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{|\tau|+j+q \leq 2m} a_{\tau j l}(t) D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \frac{\partial^l}{\partial t^l};$$

$$D_x^\tau = i^{|\tau|} \frac{\partial^{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}}}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_{n-1}^{\tau_{n-1}}}, \quad q = \frac{2m}{k} > 1 \quad (m, k — натуральные числа), \quad a_{00k} \neq 0,$$

$$|\tau| = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}.$$

На границе $t = 0$ полупространства $\mathbb{R}_+^n$ задаются граничные условия общего вида

$$B_j \left(D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) v(x, t) = \sum_{|\tau|+q \leq m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \frac{\partial^l v(x, t)}{\partial t^l} \Big|_{t=0} = G_j(x), \quad (1.4)$$

$j = 1, 2, \dots, v$, где $b_{\tau j l}$ — комплексные числа.

Кроме того, при $t \rightarrow +\infty$ ставится условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(x, t) = 0. \quad (1.5)$$

Условие 2. Выполнено условие 1 при $\sigma = s + q$, $l = 1, 2, \dots, [sq^{-1}]$, где $q > 1$, $s \geq 0$ — действительные числа, $[sq^{-1}]$ — целая часть числа sq^{-1} .

Условие 3. Уравнение

$$\sum_{|\tau|+q \mid j=2m} a_{\tau j l}(t) \xi^\tau \eta^j z^l = 0 \quad (1.6)$$

при всех $t \geq 0$ не имеет z -корней, лежащих на мнимой оси при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, $|\xi| + |\eta| > 0$.

Пусть $z_j(t, \xi, \eta)$, $j = 1, 2, \dots, r$ ($0 \leq r \leq k$) — корни уравнения (1.6), лежащие в левой полуплоскости, а $z_j(t, \xi, \eta)$, $j = r+1, \dots, k$ — корни, расположенные в правой полуплоскости.

Условие 4. Функции $z_j(t, \xi, \eta)$, $j = 1, 2, \dots, k$ принадлежат классу символов $S_\alpha^q(\Omega)$ и при всех $t \in \Omega$, $|\xi| + |\eta| > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_j(t, \xi, \eta) &\leq -c_1 (1 + |\xi| + |\eta|)^q, \quad j = 1, 2, \dots, r; \\ \operatorname{Re} z_j(t, \xi, \eta) &\geq c_2 (1 + |\xi| + |\eta|)^q, \quad j = r+1, \dots, k \end{aligned}$$

с некоторыми константами $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не зависящими от t , ξ , η .

Условие 5. Число μ граничных условий (1.4) равно числу z -корней уравнения (1.6), лежащих в левой полуплоскости, и при всех $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\xi| > 0$ многочлены $B_j^0(\xi, z) = \sum_{|\tau|+q \mid m_j} b_{\tau j} \xi^\tau z^j$ линейно независимы по модулю много-

члена $P(\xi, z) = \prod_{j=1}^r (z - z_j(0, \xi, 0))$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 10. Пусть $s \geq \max \left\{ 2m, \max_{1 \leq j \leq r} m_j + q \right\}$ — действительное число и выполнены условия 2–5. Тогда для любого решения $v(x, t) \in H_{s, \alpha, q}(\mathbb{R}_+^n)$ задачи (1.3)–(1.5) справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s, \alpha, q} \leq c \left(\|F\|_{s-2m, \alpha, q} + \|v\|_{s-1, \alpha, q} + \sum_{j=1}^r \|G_j\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q} \right)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от v , F , G_j , $j = 1, 2, \dots, r$. Здесь норма $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве С.Л. Соболева $H_s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Теорема 11. Пусть выполнены условия 2–4. Тогда для оператора $A(t, D_x, D_{\alpha,t})$ справедлива формула представления

$$A(t, D_x, D_{\alpha,t}) = \prod_{j=1}^k \left(\frac{\partial}{\partial t} - K_j(t, D_x, D_{\alpha,t}) \right) + T(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t),$$

где $K_j(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $z_j(t, \xi, \eta)$, а порядок оператора $T(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)$ в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ не превосходит $2m - 1$.

Так же как в работе [13] теорема 11 позволяет свести доказательство априорных оценок задачи (1.3)–(1.5) к коэрцитивной оценке снизу формы $\text{Re}(Aw, Qw)$, где $\underline{Q}$ некоторый оператор, $w(x, t) \in \Omega_r$, Ω_r — множество функций $w(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, удовлетворяющих условию

$$w(x, +0) = \frac{\partial w(x, +0)}{\partial t} = \dots = \frac{\partial_t^{r-1} w(x, +0)}{\partial t^{r-1}} = 0.$$

Таким образом, теорема 10 вытекает при выполнении условия 5 из следующей теоремы.

Теорема 12. Пусть выполнены условия 2–4. Тогда существует такой оператор $Q(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)$, порядок которого в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ не превосходит $2m - q$, что для любых $s_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и любых функций $w(x, t) \in \Omega_r$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} c_1 \|w\|_{(k-1\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha}^2 &\leq \varepsilon \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=0}^{k-l} \sum_{i_2=0}^{k-l+1-i_1} \left\| \frac{\partial^{i_2} w}{\partial t^{i_2}} \right\|_{(l-s_0+i_1-\frac{3}{2})q,\alpha}^2 + \\ &+ c(\varepsilon) \sum_{l=1}^k \sum_{i_1=0}^{k-l} \sum_{i_2=0}^{k-l-i_1} \left\| \frac{\partial^{i_2} w}{\partial t^{i_2}} \right\|_{(l-s_0+i_1-\frac{1}{2})q-1,\alpha}^2 + \\ &+ \text{Re}(A(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)w, Qw)_{-s_0q,\alpha}, \end{aligned}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от ε и w , константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от w .

Здесь

$$(u, v)_{-s_0q,\alpha} = (\Lambda^{-s_0q}(D_x, D_{\alpha,t})u, \Lambda^{-s_0q}(D_x, D_{\alpha,t})v)_{L_2(\mathbb{R}_+^n)},$$

а $\Lambda^{-s_0q}(D_x, D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $(1 + |\xi|^2 - i\eta)^{-s_0q}$.

В качестве оператора Q , фигурирующего в теореме 12 можно взять оператор вида

$$Q(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) = \prod_{j=1}^{k-1} (\partial_t - K_j(t, D_x, D_{\alpha,t})).$$

Теорема 13. Пусть выполнены условия 2–5. Тогда существует регуляризатор задачи (1.3)–(1.5), то есть такой оператор $\bar{R} : H_{s-2m,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^r H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$, что $\bar{A}\bar{R}v = (F, \bar{G}) + \bar{T}(F, \bar{G})$, где $\bar{A}$ — опера-

тор, порожденный задачей (1.3)–(1.5), то есть

$$\widetilde{A}: H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow H_{s-2m,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^r H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(\mathbb{R}^{n-1}), \overline{G} = (G_1, G_2, \dots, G_r).$$

Оператор $\widetilde{T}$ является ограниченным оператором из $H_{s-2m,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^r H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})$ в $H_{s-2m+1,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^r H_{s-\frac{1}{2}q+1-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Как известно, при выполнении априорной оценки правый регуляризатор является и левым регуляризатором.

При доказательстве основных теорем 11 и 13 были получены коэрцитивные априорные оценки и теоремы существования краевых задач для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений.

В $\mathbb{R}_+^n$ рассмотрим краевые задачи

$$\begin{cases} K_-^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t) - \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = f(x, t), \\ v(x, t) \Big|_{t=0} = g(x), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(x, t) = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

и

$$\begin{cases} K_+^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t) - \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = f(x), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} v(x, t) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где $K_{\pm}^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_{\pm}(t, \xi, \eta)$, который удовлетворяет следующему условию.

Условие 6. Пусть $\lambda_{\pm}(t, \xi, \eta) \in S_{\alpha}^q(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}_+^1$, $q > 1$ — действительное число и с некоторой константой $c > 0$ справедливы оценки $\pm \operatorname{Re} \lambda_{\pm}(t, \xi, \eta) \geq c(1 + |\xi| + |\eta|)^q$ при всех $t \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}^1$.

Теорема 14. Пусть выполнены условия 2 и 6. Тогда для любого решения $v(x, t)$ задачи (1.7), принадлежащего пространству $H_{s+q,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_1 \left(\|f\|_{s,\alpha,q} + \|g\|_{s+\frac{1}{2}q} \right),$$

а для любого решения задачи (1.8) $v(x, t) \in H_{s+q,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_2 \|f\|_{s,\alpha,q}.$$

При этом константа $c_1 > 0$, не зависит от f , g , v , а $c_2 > 0$ не зависит от f , v . Кроме того, существуют регуляторы задач (1.7) и (1.8).

Заключение

В статье предложен новый метод доказательства коэрцитивных оценок и теоремы существования общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Этот метод основан на свойствах псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному весовому преобразованию F_{α} . Анализ доказательства показывает, что

аналогичные результаты верны не только для вырождающихся дифференциальных уравнений, но и для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений. В частности это результаты верны для операторов вида

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{\partial}{\partial t} - K_j(t, D_x, D_{\alpha,t}) \right) + \widehat{T}(t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t),$$

где $K_j(t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $z_j(t, \xi, \eta)$, удовлетворяющими условию 4, а порядок оператора $\widehat{T}$ в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(\mathbb{R}_+^n)$ меньше порядка оператора $\prod_{j=1}^k \left(\frac{\partial}{\partial t} - k_j(t, D_x, D_{\alpha,t}) \right)$.

Литература

- [1] Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области / М.В.Келдыш // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77. — № 2. — С. 181–183.
- [2] Олейник, О.А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О.А.Олейник // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 87. — № 6. — С. 885–887.
- [3] Михлин, С.Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С.Г.Михлин // Вестник ЛГУ. 1954. № 8. С. 19–48.
- [4] Вишик, М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И.Вишик // Матем. сб. — 1954. — Т. 35(77). — Вып. 33. — С 513–568.
- [5] Олейник, О.А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А.Олейник // Матем. сб. 1966. — Т. 69(111). — Вып. 1. — С. 111–140.
- [6] Кон, Дж.Дж. Некоэрцитивные краевые задачи / Дж.Дж.Кон, Л.Ниренберг // Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1967. — С 88–165.
- [7] Глушко, В.П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В.П.Глушко // Функц. анализ и его прилож. — 1968. — Т. 2. — Вып. 3. — С. 87–88/
- [8] Глушко, В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В.П.Глушко // Труды моск. матем. об-ва. — 1970. — Т. 23. — С. 113–178.
- [9] Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И.Вишик, В.В.Грушин // Матем. сб. — 1969. — Т. 80(112). — Вып. 4. — С. 455–491.

- [10] Вишик, М.И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Успехи матем. наук. – 1970. – Т. 25. – Вып. 4. – С. 29–56.
- [11] Левендорский, С.З. Краевые задачи в полупространстве для квази-эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе области / С.З. Левендорский // Матем. сб. – 1980. – Т. 111(153). – Вып. 4. – С. 483–501.
- [12] Баев, А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 265. – № 4. – С. 1044–1046.
- [13] Баев, А.Д. Весовые псевдодифференциальные операторы в теории эллиптических краевых задач с вырождением / А.Д. Баев, В.П. Глушко // Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики (Труды семинара акад. С.Л. Соболева). – 1983. – № 1. – С. 5–31.
- [14] Баев, А.Д. Коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев, В.П. Глушко. – М., 1979. – Деп. в ВИНТИ 09.02.1979., № 536–79.

Поступила в редакцию 04/IV/2008;
в окончательном варианте — 04/IV/2008.

ON THE SOLVABILITY OF GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN HALF-SPACE FOR DEGENERATING HIGH ORDER ELLIPTIC EQUATIONS³

© 2003 A.D. Baev⁴

A new method to prove the solutions a priori estimations and solutions existence theorem of general boundary problem in half-space for degenerating high order elliptic equations is suggested.

Keywords: *a priori estimations, degenerating equation, S.L. Sobolev space, regularizator, boundary problem.*

Paper received 04/IV/2008.

Paper accepted 04/IV/2008.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Y.N. Radayev.

⁴Baev Aleksandr Dmitrievich (baev@math.vsu.ru), Dept. of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russia.