УДК 517.9

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ПОЛОСЕ
ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА¹**© 2008 А.Д. Баев²

В работе доказывается теорема о существовании и единственности решения краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Получена априорная оценка решения этой задачи в специальном образе подобранных пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Ключевые слова: априорные оценки, вырождающееся уравнение, пространство С.Л. Соболева, регуляризатор, краевая задача

Введение

Вырождающиеся уравнения моделируют процессы, происходящие вблизи границ различных областей. Влияние границ приводит к тому, что вблизи границы меняется тип или порядок уравнения, описывающего процесс. В этом случае говорят, что уравнение вырождается.

Вырождающиеся уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Потребность в изучении таких задач возникла в механике. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М.В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О.А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка были впервые рассмотрены в работах С.Г. Михлина [3] и М.И. Вишика [4]. Метод "эллиптической регуляризации" был применен О.А. Олейник [5], а затем Дж. Коном и Л. Ниренбергом [6] для изучения эллиптико-параболических уравнений второго порядка. В работах В.П. Глушко была установлена разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

²Баев Александр Дмитриевич (baev@math.vsu.ru), кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М.И. Вишика и В.В. Грушина [9, 10]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен С.З. Левендорским [11]. Отметим, что существенным условием работ [9–11] является условие принадлежности основной весовой функции $\alpha(t)$ пространству $C^\infty(R^1)$. В [12] были изучены общие краевые задачи в полупространстве R_+^n . При этом удалось отказаться от условия бесконечной дифференцируемости функции $\alpha(t)$.

В данной работе устанавливается теорема о существовании и единственности решения краевой задачи типа задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения порядка $2m$, содержащего невырожденную производную по переменной t порядка $2l$ ($m \geq 2l$). Получена априорная оценка решений этой задачи.

1. Основные определения и результаты

В полосе $R_d^n = \{0 < t < d, x \in R^{n-1}\}$ ($d > 0$ — некоторое число) рассматривается уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x, t) \equiv L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + (-1)^l \partial_t^{2l}v = F(x, t), \quad (1.1)$$

где $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, $D_x^\tau = (i)^\tau \frac{\partial^{\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_{n-1}}}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_{n-1}^{\tau_{n-1}}}$,

$$D_{\alpha,t} = i \sqrt{\alpha(t)} \partial_t \sqrt{\alpha(t)}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad a_{\tau j} — \text{комплексные коэффициенты.}$$

На границе $t = 0$ полосы задаются условия:

$$\sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{l-j} v(x, t)|_{t=0} = G_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (1.2)$$

где $b_{\tau j}$ — комплексные коэффициенты.

На границе $t = d$ полосы задаются условия:

$$v(x, t)|_{t=d} = \partial_t v(x, t)|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v(x, t)|_{t=d} = 0. \quad (1.3)$$

Пусть выполнены следующие условия:

Условие 1. При всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$ справедлива оценка $\operatorname{Re} L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ, η .

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + \max_{j=1,2,\dots,l} k_j$ функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s-1}[0, d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. При всех $\xi \in R^{n-1}$ справедливы оценки

$$\left| \sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau j} \xi^\tau \right| > 0, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^d u(t) \exp\left(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(0, d)$. В [12] показано, что это преобразование может быть расширено, то есть рассмотрено, например, на функциях из $L_2(0, d)$ или на некоторых классах обобщенных функций. При этом существует обратное преобразование F_α^{-1} , которое может быть записано в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta \rightarrow \tau}^{-1} [w(\tau)]|_{\tau=\varphi(t)} \quad \text{где } \varphi(t) = \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$$

В [12] показано, что преобразование F_α обладает свойствами, аналогичными свойствам преобразования Фурье. Например, справедлив аналог равенства Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha[u](\eta) \cdot \overline{F_\alpha[w](\eta)} d\eta = 2\pi(u, w),$$

где $u(t), w(t) \in L_2(0, d)$, (u, w) — скалярное произведение в $L_2(0, d)$.

Если $u(t) \in C^s[0, d]$ и функция $u(t)$ удовлетворяет условиям (1.3), то

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u(t)](\eta) = \eta^j F_\alpha[u(t)](\eta) \quad \text{при всех } j = 0, 1, \dots, s.$$

Задача (1.1)–(1.3) изучается в весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Определение 1. Будем говорить, что функция $v(x, t)$ принадлежит пространству $H_{s, \alpha, \frac{m}{7}}(R_d^n)$ (где $s \geq 0$ — действительное число), если для нее конечна норма

$$\|v\|_{s, \alpha, \frac{m}{7}}^2 = \sum_{k + \frac{m}{7} j \leq s, k \geq 0} \left\| F_\alpha^{-1} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi}(\partial_t^j v)] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2.$$

Здесь $F_{x \rightarrow \xi}$ — преобразование Фурье, $F_{\xi \rightarrow x}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье.

Определение 2. Будем говорить, что функция $g(x)$ принадлежит пространству $H_s(R^{n-1})$ (s — действительное), если для нее конечна норма $\|g\|_s = \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} \{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} F_{\xi \rightarrow x}[g(x)]\} \right\|_{L_2(R^{n-1})}$.

Основными результатами данной работы являются следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть $s \geq 2m + \max_{j=1, \dots, l} \{k_j\}$ — действительное число, $m \geq 2l$ — четное число и выполнены условия (1.1)–(1.3). Пусть $F(x, t) \in H_{s-2m, \alpha, \frac{m}{7}}(R_d^n)$, $G_j(x) \in H_{s-(l-j)\frac{m}{7} - \frac{m}{2l}}(R^{n-1})$, $j = 1, 2, \dots, l$. Тогда для любого решения $v(x, t) \in$

$\in H_{s,\alpha,\frac{m}{7}}(R_d^n)$ задачи (1.1)–(1.3) справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{m}{7}} \leq c \left(\|F\|_{s-2m,\alpha,\frac{m}{7}} + \sum_{j=1}^l \|G_j(x)\|_{s-(l-j)\frac{m}{7}-\frac{m}{2l}-k_j} \right)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v , F , G_j , $j = 1, 2, \dots, l$.

Теорема 2. Пусть $s \geq 2m + \max_{1 \leq j \leq l} \{k_j\}$ — действительное число; $m \geq 2l$ — четное число и выполнены условия 1–3. Пусть $F(x, t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{m}{7}}(R_d^n)$, $G_j(x) \in H_{s-(l-j)\frac{m}{7}-\frac{m}{2l}}(R^{n-1})$, $j = 1, 2, \dots, l$. Тогда существует единственное решение $v(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{m}{7}}(R_d^n)$.

Изложим кратко схему доказательства теоремы 1. Применим к обеим частям уравнения (1.1) и условий (1.2), (1.3) преобразование Фурье $F_{x \rightarrow \xi}$. Получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in R^{n-1}$.

$$A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u(\xi, t) = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t})u(\xi, t) + (-1)^l \partial_t^{2l} u(\xi, t) = f(\xi, t), \quad (1.4)$$

$$\sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau,j} \xi^\tau \partial_t^{l-j} u(\xi, t)|_{t=0} = g_j(\xi), \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (1.5)$$

$$u(\xi, t)|_{t=d} = \partial_t u(\xi, t)|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} u(\xi, t) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь $u(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[v(x, t)]$, $f(\xi, t) = F_{x \rightarrow \xi}[F(x, t)]$, $g_j(\xi) = F_{x \rightarrow \xi}[G_j(x)]$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Аналогично определенным выше пространствам введем пространство $\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{m}{7}}(0; d)$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $u(\xi, t)$ принадлежит по переменной t пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{m}{7}}(0; d)$ ($s \geq 0$ — действительное число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{m}{7},|\xi|}^2 = \sum_{k+\frac{m}{7}j \leq s, k \geq 0} \left\| F_\alpha^{-1} [(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha(\partial_t^j u)] \right\|_{L_2(0,d)}^2.$$

Теорема 1 следует теперь из следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $s \geq 2m + \max_{j=1,\dots,l} \{k_j\}$ — действительное число, $m \geq 2l$ — четное число. Пусть $f(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{m}{7}}(0; d)$ и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $u(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{m}{7}}(0; d)$ задачи (1.4)–(1.6) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{m}{7},|\xi|}^2 \leq c (\|f\|_{s-2m,\alpha,\frac{m}{7},|\xi|}^2 + \sum_{j=1}^l (1 + |\xi|^2)^{s-k_j-(l-j)\frac{m}{7}-\frac{m}{2l}} |g_j(\xi)|^2) \quad (1.7)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ξ , f , u , g_j , $j = 1, 2, \dots, l$.

Теорема 3 вытекает из следующей совокупности утверждений.

Лемма 1. Пусть $u(t) \in \tilde{H}_{s,\alpha,\frac{m}{7}}(0; d)$. Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $j = 0, 1, \dots, s$ справедливо неравенство

$$\|D_{\alpha,t}^j u\|^2 \leq \varepsilon^{2(s-j)} \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + (c \cdot \varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}) \|u\|^2 \quad (1.8)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u .

Здесь и в дальнейшем $\|u\| = \|u\|_{L_2(0;d)}$. Неравенство (1.8) является аналогом известного неравенства Эрлинга–Ниренберга для весовых производных $D_{\alpha,t}$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{m}{2}}(0;d)$ задачи (1.4)–(1.6) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^m (1 + |\xi|^2)^{2m-j} \|D_{\alpha,t}^j u\|^2 + (1 + |\xi|^2)^m \|\partial_t^l u\|^2 \leq \\ & \leq c[\|f\|^2 - (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=1}^l \operatorname{Re} \partial_t^{2l-j} u(0) \cdot \overline{\partial_t^{j-1} u(0)}] \end{aligned}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ξ, u, f .

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{m}{2}}(0;d)$ задачи (1.4)–(1.6) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + \|D_{\alpha,t}^m \partial_t^l u\|^2 \leq \varepsilon (\|D_{\alpha,t}^{2m} u\|^2 + \|\partial_t^l u\|^2) + \\ & + c(\varepsilon)(\|f\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2) \end{aligned}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от ξ, u, f .

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{m}{2}}(0;d)$ задачи (1.4)–(1.6) справедлива оценка

$$\|\partial_t^{2l} u\|^2 \leq c(\|f\|^2 + (1 + |\xi|^2)^{2m} \|u\|^2).$$

Константа $c > 0$ не зависит от ξ, u, f .

Лемма 5. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда для любого решения $u \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{m}{2}}(0;d)$ задачи (1.4)–(1.6) справедлива оценка

$$\|u\|_{2m,\alpha,\frac{m}{2},|\xi|} \leq c[\|f\|^2 - (1 + |\xi|^2)^m \sum_{j=1}^l \operatorname{Re} \partial_t^{2l-j} u(0) \overline{\partial_t^{j-1} u(0)}].$$

Константа $c > 0$ не зависит от ξ, u, f .

Из лемм 1–5 следует справедливость априорной оценки (1.7) при $s = 2m$. Так же, как и в [12], доказывается оценка (1.7) при $s > 2m$. Из оценки (1.7) вытекает справедливость теоремы 1.

Изложим теперь схему доказательства теоремы 2. Эта теорема вытекает из следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть $s \geq 2m + \max_{1 \leq j \leq l} \{k_j\}$ — действительное число, $m \geq 2l$ — четное число. Пусть $f(\xi, t) \in \tilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{m}{2}}(0, d)$ и выполнены условия 1–3. Тогда всех $\xi \in R^{n-1}$ существует единственное решение $u(\xi, t)$ задачи (1.4)–(1.6), принадлежащее по переменной t пространству $\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{m}{2}}(0, d)$.

Изложим схему доказательства теоремы 4. Без ограничения общности будем считать, что $a_{0,2m} = 1$. Рассмотрим функцию $\gamma(t) = (i\alpha(t))^{\frac{m}{m-l}}$, тогда

$$D_{\alpha,t}^k u = \sum_{j=0}^k \psi_{k,j}(t) \gamma^{\frac{l(2m-j)}{m}}(t) \cdot \gamma^{j-2l}(t) \partial_t^j u, \quad (1.9)$$

где функции $\Psi_{k,j}(t)$ ($0 \leq j \leq k$) находятся по рекуррентным формулам

$$\Psi_{k+1,k+1}(t) = \Psi_{k,k}(t), \quad \Psi_{0,0}(t) = 1, \quad \Psi_{j+1,0}(t) = \alpha(t)\partial_t\Psi_{j,0}(t) + \frac{1}{2}\alpha'(t)\Psi_{j,0}(t),$$

$$\Psi_{j+1,\chi}(t) = \alpha(t)\partial_t\Psi_{j,\chi}(t) + \Psi_{j,\chi-1}(t) + (\chi + \frac{1}{2})\alpha'(t)\Psi_{j,\chi}(t) \quad (1 \leq \chi \leq j-1),$$

$$\Psi_{j+1,j}(t) = \Psi_{j+1,j-1}(t) + (j + \frac{1}{2})\alpha'(t).$$

Используя формулу (1.9), запишем уравнение (1.4) в виде

$$\sum_{k=2l+1}^{2m} b_{2m-k}(\xi, t) \gamma^{k-2l} \partial_t^k u + \sum_{k=0}^{2l} b_{2m-k}(\xi, t) \partial_t^k u = f(\xi, t), \quad (1.10)$$

где $b_0(\xi, t) \equiv 1$, а функции $b_{2m-k}(\xi, t)$, $k = 0, 1, \dots, 2m-1$ определяется по формулам

$$b_{2m-k}(\xi, t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} a_{\tau j} \xi^\tau \Psi_{j,k}(t) \gamma^{\frac{(2m-k)j}{m}}(t), \quad \text{где } k = 2l+1, \dots, 2m-1.$$

$$b_{2m-2l}(\xi, t) = \sum_{j=2}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} a_{\tau j} \xi^\tau \Psi_{j,2e}(t) \gamma^{\frac{(m-2l)j}{m}}(t) + (-1)^l.$$

$$b_{2m-k}(\xi, t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} a_{\tau j} \xi^\tau \Psi_{j,k}(t) \gamma^{\frac{k(m-1)}{m}}(t), \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, 2l-1.$$

$$b_{2m}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} a_{\tau j} \xi^\tau \Psi_{j,0}(t).$$

Обозначим $w_{2m-k}(\xi, t) = \partial_t^k u(\xi, t)$, $k = 0, 1, \dots, 2l$; $w_{2m-k}(\xi, t) = \gamma^{k-2l} \partial_t^k u(\xi, t)$, $k = 2l+1, \dots, 2m$.

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\gamma(t)\partial_t w_{2m-k}(\xi, t) - w_{2m-(k+1)}(\xi, t) - (k-2l)\gamma'(t) - w_{2m-k}(\xi, t) = 0,$$

где $k = 2l+1, \dots, 2m-1$.

$$\gamma(t)\partial_t w_{2m-2l} - w_{2m-2l-1} = 0, \quad \partial_t w_{2m-k} - w_{2m-k-1} = 0, \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, 2l-1.$$

Используя эти формулы можно записать уравнение (1.10) в виде

$$\begin{cases} \gamma(t) \frac{d\bar{u}_4}{dt} + B_{11}(\xi, t) \bar{u}_4 + B_{12}(\xi, t) \bar{u}_2 = \bar{f}(\xi, t), \\ \frac{d\bar{u}_2}{dt} + B_{22} \bar{u}_2 + B_{21} \bar{u}_4 = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где $\bar{u}_4 = (w_1, w_2, \dots, w_{2m-2l})^\top$; $\bar{u}_2 = (w_{2m-2l+1}, \dots, w_{2m})^\top$, $\top$ — символ транспонирования. $B_{11}(\xi, t)$ — матрица размера $(2m-2l) \times (2m-2l)$, все элементы которой равны нулю, за исключением $b_{11}(\xi, t) = b_1 - (2m-2l-1)\gamma'(t)$, $b_{1j} = b_j$, $j = 2, 3, \dots, 2m-2l$, $b_{jj} = -(2m-2l-k)\gamma'(t)$, $k = 2, 3, \dots, 2m-2l$. B_{12} — матрица

размера $(2m-2l) \times 2l$, все элементы которой за исключением элементов первой строки равны нулю, а элементы первой строки равны $b_{1,j} = b_{2m-2l-j}$, $j = 1, 2, \dots, 2l$. B_{22} — матрица размера $2l \times 2l$, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов $b_{j+1,j} = -1$, $j = 1, \dots, 2l-1$. B_{21} — матрица размера $2l \times (2m-2l)$, все элементы которой кроме элемента $b_{1,2m-2l} = -1$, равны нулю. $f(\xi, t) = f(\xi, t) \bar{q}$, $\bar{q} = (1, 0, \dots, 0)^T$ — единичный вектор размерности $(2m-2l)$.

Наряду с системой (1.11) рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \gamma(t) \frac{d\bar{u}_1}{dt} + (B_{11}(\xi, 0) + \gamma'(t)I) \bar{u}_1 + B_{12}(\xi, t) \bar{u}_2 = \bar{f}(\xi, t), \\ \frac{d\bar{u}_2}{dt} + B_{22} \bar{u}_2 + B_{21} \bar{u}_1 = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Известно, что нахождение "гладких" вплоть до $t = 0$ решений системы (1.12) связано с расположением спектра матрицы $B_{11}(\xi, 0)$. Из условий на функцию $\alpha(t)$ и определения функции $\gamma(t)$ получим, что $\gamma(0) = \gamma'(0) = 0$. Отсюда получим, что $b_{2m-k}(\xi, 0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, 2m-1$ и $k \neq 2l$, $b_{2m-2l}(\xi, 0) = (-1)^l$. Из вида матрицы $B_{11}(\xi, 0)$ получим, что все собственные числа λ_k матрицы $B_{11}(\xi, 0)$ при $m \geq 2l$ — четном различны, причем $(m-l)$ — собственных чисел лежат в левой полуплоскости, а остальные $(m-l)$ — собственных чисел лежат в правой полуплоскости, при этом нет собственных чисел, лежащих на мнимой оси. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-l}$ — собственные числа лежащие в левой полуплоскости. Пусть $E_-(E_+)$ инвариантные пространства оператора $B_{11}(\xi, 0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой (правой) полуплоскости. Обозначим, через $P_-(P_+)$ проекторы на $E_-(E_+)$. Будем обозначать через P_k ($k = 1, 2, \dots, 2m$) операторы, действующие по формулам

$$P_k \bar{u}_1 = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2m-2l. \quad P_k \bar{u}_2 = w_k, \quad k = 2m-2l+1, \dots, 2m.$$

Граничные условия (1.6) можно записать в виде

$$P_{2m} \bar{u}_2|_{t=d} = P_{2m-1} \bar{u}_2|_{t=d} = P_{2m-2} \bar{u}_2|_{t=d} = P_{2m-2l+1} \bar{u}_2|_{t=d} = 0, \quad (1.13)$$

$$P_{2m-2l} \bar{u}_1|_{t=d} = \dots = P_{m+1} \bar{u}_1|_{t=d} = 0. \quad (1.14)$$

С помощью (1.14) запишем условия (1.5) в виде

$$\sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau,j} \xi^\tau (-1)^j \int_{\tau_j}^d \dots \int_{\tau_1}^d (-1)^l \int_{\tau_1}^d \dots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2l}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_{l+j-1} \Big|_{\tau_{l+j}=0} = g_j(\xi) \quad (1.15)$$

$$(j = 1, 2, \dots, l).$$

Таким образом, задача (1.4)–(1.6) сведена к задаче (1.11), (1.13), (1.15). Докажем вначале существование решения задачи (1.12), (1.13), (1.15). Из (1.12) получим, что

$$\bar{u}_1(\xi, t) = U_1^- \bar{q} - \int_0^d R(t, \tau) f(\tau) d\tau + b_{2m}(\xi, 0) \int_0^d R(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (1.16)$$

где $U_1^\pm(t, s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(t)} \exp \left(P_\pm B_{11}(\xi, 0) \int_t^s \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right)$, $\bar{q}$ — произвольный вектор из E_- ,

$$R(t, \tau) = \begin{cases} -U_1^+(t, \tau) P_+ \bar{e}_1 \cdot \frac{1}{\gamma(\tau)}, & 0 < \tau < t, \\ U_1^-(t, \tau) P_- \bar{e}_1 \cdot \frac{1}{\gamma(\tau)}, & t < \tau < d. \end{cases}$$

Учитывая условия (1.13), запишем равенство (1.16) в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\xi, t) = & U_1^-(t, d) \bar{q} - \int_0^d R(t, \tau) f(\tau) d\tau + \\ & + b_{2m}(\xi, 0) \int_0^d R(t, \tau) \int_\tau^d \int_{\tau_{2l-1}}^d \dots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2l}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_{2l-1} d\tau. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Найдем вектор $\bar{q}$ так, чтобы решение, определенное равенством (1.17) удовлетворяло условиям (1.13)–(1.15). Из (1.17) с учетом равенства $U_1^-(d, d) = I$ и условий (1.13) получим

$$P_\nu \bar{q} = d_\nu + b_{2m}(\xi, 0) M_\nu w_{2m-2l}, \quad \nu = m+1, \dots, 2m-2l, \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} d_\nu = & \int_0^d P_\nu R(d, \tau) f(\tau) d\tau, \\ M_\nu w_{2m-2l} = & \int_0^d \int_\tau^d \int_{\tau_{2l-1}}^d \dots \int_{\tau_1}^d P_\nu R(d, \tau) w_{2m-2l}(\xi, \tau_0) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_{2l-1} d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично из (1.17) и (1.15) получим

$$\begin{aligned} (-1)^{l+j} \theta_j(\xi) \int_0^d \int_{\tau_{l+j-1}}^d \dots \int_{\tau_1}^d P_{2m-2l} U_1^-(\tau_1, d) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_{l+j-1} = \\ = d_{m+1-j} + b_{2m}(\xi, 0) M_{m+1-j} w_{2m-2l}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $j = 1, 2, \dots, l$, $\theta_j(\xi) = \sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau j} \xi^\tau$;

$$\begin{aligned} d_{m+1-j} = & g_j(\xi) + (-1)^{l+j} \int_0^d \int_0^d \int_{\tau_{l+j-1}}^d \dots \int_{\tau_1}^d P_{2m-2l} R(\tau_0, \tau) f(\tau) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_{l+j-1} d\tau, \\ M_{m+1-j} w_{2m-2l} = & (-1)^{l+j+1} \theta_j(\xi) \int_0^d \int_0^d \int_{\tau_{l+j-1}}^d \dots \int_{\tau_1}^d P_{2m-2l} R(\tau_0, \tau) \times \\ & \times \left[\int_{\tau_0}^d \int_{s_{2l-1}}^d \dots \int_{s_1}^d w_{2m-2l}(\xi, 0) ds_0 ds_1 \dots ds_{2l-1} \right] d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_{l+j-1} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения вектора $\bar{q}$ — получим систему уравнений (1.18), (1.19). Покажем, что эта система имеет единственное решение при достаточно малых $d > 0$. Пусть $\bar{r}_j$, $j = 1, 2, \dots, m-l$ — собственные векторы матрицы $B_{11}(\xi, 0)$, отвечающие собственным числам, лежащим в левой полуплоскости. Тогда $\bar{q} = \sum_{p=1}^{m-l} \mu_p \bar{r}_p$. Из условия $B_{11}(\xi, 0)\bar{r}_j = \lambda_j \bar{r}_j$ и вида матрицы $B_{11}(\xi, 0)$ получим $r_{p,k} = (-\lambda_p)^{2m-2l-k} r_{p,2m-2}$. Отсюда получим

$$\sum_{p=1}^{m-l} \mu_p r_{p,2m-2l} (\lambda_p)^{2m-2l-v} = (-1)^{2m-2l-v} (d_v + M_v w_{2m-2l}) \cdot b_{2m}(\xi, 0), \quad (1.20)$$

$$v = m+1, m+2, \dots, 2m-2l.$$

$$\sum_{p=1}^{m-l} (-1)^{l+j} \theta_j(\xi) \gamma(d) \mu_p r_{p,2m-2} \left[\sum_{k=0}^{j-1} \frac{d^{l+k}}{(l+k)! \lambda_p^{j-k}} + \varepsilon(\lambda_p d) \right] = \quad (1.21)$$

$$= b_{2m}(\xi, 0) M_{m+1-j} w_{2m-2l} + d_{m+1-j} \quad (j = 1, 2, \dots, l).$$

Здесь $\varepsilon(\lambda_{p-1}, d) = o(d^N)$ при $d \rightarrow 0$, для любого $N > 0$. Определитель системы уравнений (1.20), (1.21) имеет вид $D = \prod_{j=1}^l (-1)^{l+1+j} \theta_j(\xi) \frac{\gamma^l(d)}{(l!)^l} d^{l^2} [D_1 + o(d^N)]$, где $N > 0$ — любое, а D_1 — определитель матрицы $(m-l) \times (m-l)$, элементы которой имеют вид $\beta_{jp} = \lambda_{p-1}^{j-l-1}$, $j = 1, 2, \dots, m-l$; $p = 1, 2, \dots, m-l$.

Таким образом, при достаточно малых $d > 0$ получим, что $D \neq 0$, и система (1.20), (1.21) имеет единственное решение. Запишем это решение в виде

$$\mu_p = \sum_{v=m-l+1}^{2m-2l} \beta_{p,v} (d_v + b_{2m}(\xi, 0) M_v w_{2m-2l}) \frac{1}{r_{p,2m-2l}}, \quad p = 1, 2, \dots, m-l. \quad (1.22)$$

Используя (1.22) в (1.17), получим

$$w_{2m-2l}(\xi, t) = \tilde{F}(\xi, t) + b_{2m}(\xi, 0) \tilde{M} w_{2m-2l}(\xi, t), \quad (1.23)$$

где

$$\tilde{F}(\xi, t) = \sum_{v=m-l+1}^{2m-2l} \sum_{p=1}^{m-l} \beta_{p,v} \frac{\gamma(d)}{\gamma(t)} \exp \left(\lambda_{p-1} \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) - \int_0^d P_{2m-2l} R(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (1.24)$$

$$\tilde{M} w_{2m-2l}(\xi, t) = \sum_{p=1}^{m-l} \sum_{v=m-l+j}^{2m-2l} \beta_{p,v} M_v w_{2m-2l} \frac{\gamma(d)}{\gamma(t)} \cdot \exp \left(\lambda_{p-1} \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) + \quad (1.25)$$

$$+ \int_0^d P_{2m-2l} R(t, \tau) \int_{\tau_1}^d w_{2m-2l}(\xi, 0) d\tau_0 d\tau_1 \dots d\tau_{2l-1} d\tau.$$

Предположим, что выполнены условия

$$\begin{cases} \max_{1 \leq j \leq m-l} \operatorname{Re} \lambda_j + \max_{0 \leq t \leq d} |\gamma'(t)| \leq \delta_- < 0, \\ \min_{m-l+1 \leq j \leq 2m-2l} \operatorname{Re} \lambda_j - \max_{0 \leq t \leq d} |\gamma'(t)| \geq \delta_+ > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

В этом случае так же, как и в [13], доказываем, что при $|\xi| \leq \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число существует единственное решение уравнения (1.23). Подставляя это решение в (1.17) получим решение системы (1.12), удовлетворяющее условиям (1.13)–(1.15). Существование решения доказано при достаточно малых $d > 0$. Причем все компоненты решения принадлежат $L_2(0, d)$. Можно доказать, что при этом функция $u(\xi, t) = w_{2m}(\xi, t)$ является решением уравнения

$$\tilde{A}u \equiv (i)^{2m} \alpha^{2m}(t) \partial_t^{2m} u + (-1)^l \partial_t^{2l} u + \sum_{|\tau| \leq 2m} a_{\tau 0} \xi^\tau u = f(\xi, t).$$

Это решение принадлежит пространству $\tilde{H}_{2m, \alpha, \frac{m}{7}}(0, d)$ по переменной t и удовлетворяет условиям (1.5), (1.6).

Рассмотрим оператор $A^\mu = \mu A + (1 - \mu)\tilde{A}$, где $A = L_{2m}(\xi, D_{\alpha, t}) + (-1)^l \partial_t^{2l}$.

Можно показать, что для оператора A^μ справедлива априорная оценка (1.7) при $|\xi| \leq \delta$, с постоянной, не зависящей от $\mu \in [0; 1]$. Таким образом, с помощью метода продолжения по параметру (см. [13]) получим, что существует единственное решение задачи (1.4)–(1.6) при $|\xi| \leq \delta$, где $\delta > 0$ и $d > 0$ — достаточно малые числа. Рассмотрим теперь оператор $A(\lambda \xi, D_{\alpha, t}, \partial_t)$, где $|\xi| = \delta$. Воспользовавшись априорной оценкой (1.7), применим метод продолжения по параметру $\lambda > 0$. В результате из установленной уже разрешимости задачи (1.5)–(1.6) для уравнения $A(\lambda \xi, D_{\alpha, t}, \partial_t)u = f$ при $\lambda = 1$ получим, что эта задача однозначно разрешима при всех $\lambda > 0$ в $\tilde{H}_{2m, \alpha, \frac{m}{7}}(0, d)$.

Если взять теперь $\lambda = \frac{|\xi|}{\delta}$, то получим однозначную разрешимость задачи (1.5), (1.6) для уравнения $A(\xi, D_{\alpha, t}, \partial_t) = f$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ и достаточно малом $d > 0$. Так как при $d < t < d_1$, где $d_1 > 0$ любое число, уравнение (1.4) не является вырождающимся уравнением, то из [14] следует, что существует единственное решение уравнения (1.4), удовлетворяющее условиям (1.6) и условиям

$$u|_{t=d_1} = \partial_t u|_{t=d_1} = \dots = \partial_t^{m-1} u|_{t=d_1} = 0.$$

Таким образом, так же, как и в [14], с помощью ”склеивания” получим существование решения задачи (1.4)–(1.6) при всех $\xi \in R^{n-1}$ и $0 \leq t \leq d_1$, где d_1 — любое число. Разрешимость задачи (1.4)–(1.6) установлена нами при дополнительных условиях (1.26). Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то рассмотрим оператор $\overset{\vee}{A} = L_{2m}(\xi, D_{\alpha, t}) + \overset{\vee}{b}(-1)^l \partial_t^{2l}$, где $\text{Re } \overset{\vee}{b} > 0$. Тогда оператор $\overset{\vee}{A}$ удовлетворяет тем же условиям, что и оператор A . Выберем $\text{Re } \overset{\vee}{b} > 0$ столь большим, чтобы выполнялись условия (1.26). Так же как и выше можно показать, что задача (1.5)–(1.6) для уравнения $\overset{\vee}{A}u = f$ разрешима в $\tilde{H}_{2m, \alpha, \frac{m}{7}}(0, d)$. Можно показать, что априорная оценка (1.7) справедлива и для оператора $\overset{\vee}{A} = L_{2m}(\xi, D_{\alpha, t}) + (-1)^l (\mu + (1 - \mu)\overset{\vee}{b}) \partial_t^{2l}$, причем константа в априорной оценке (1.7) не зависит от $\mu \in [0; 1]$. Это позволяет вновь применить метод продолжения по параметру $\mu \in [0; 1]$ и из одно-

значной разрешимости задачи (1.5)–(1.6) для уравнения $A u = f$ при $\mu = 0$ получить однозначную разрешимость этой задачи при $\mu = 1$. Но так как $A = A$, то тем самым доказана однозначная разрешимость задачи (1.4)–(1.6) в $\tilde{H}_{2m, \alpha, \frac{m}{l}}(0, d)$. Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (1.1)–(1.3) в $H_{2m, \alpha, \frac{m}{l}}(R_d^n)$. Для того чтобы получить однозначную разрешимость задачи (1.1)–(1.3) в пространстве $H_{s, \alpha, \frac{m}{l}}(R_d^n)$ при $s > 2m$, следует воспользоваться известным методом повышения гладкости (см. [13]).

Заключение

В статье предложен новый подход к доказательству теоремы существования и единственности решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Этот метод существенно опирается на априорные оценки решений указанных задач в специальном образом подобранных пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Анализ доказательства показывает, что указанный метод может быть применен и для вырождающихся эллиптических уравнений и для граничных условий более общего вида.

Литература

- [1] Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77. – №2. – С. 181–183.
- [2] Олейник, О.А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О.А. Олейник // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 87. – №6. – С. 885–887.
- [3] Михлин, С.Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С.Г. Михлин // Вестник ЛГУ. – 1954. – №8. – С. 19–48.
- [4] Вишик, М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик // Матем. сб. – 1954. – Т. 35(77). – Вып. 33. – С. 513–568.
- [5] Олейник, О.А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник // Матем. сб. – 1966. – Т. 69(111). – Вып. 1. – С. 111–140.
- [6] Кон, Дж. Некоэрцитивные краевые задачи / Дж. Кон, Л. Ниренберг // Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1967. – С. 9–62.
- [7] Глушко, В.П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В.П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2. – Вып. 3. – С. 87–88.

- [8] Глушко, В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В.П. Глушко // Труды Моск. матем. об-ва. – 1970. – Т. 23. – С. 3–178.
- [9] Вишик, М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Матем. сб. – 1969. – Т. 80(112). – Вып. 4. – С. 455–491.
- [10] Вишик, М.И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Успехи матем. наук. – 1970. – Т. 25. – Вып. 4. – С. 29–56.
- [11] Левендорский, С.З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С.З. Левендорский // Матем. сб. – 1980. – Т. 111(153). – Вып. 4. – С. 483–501.
- [12] Баев, А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 265. – №5. – С. 1044–1046.
- [13] Баев, А.Д. Весовые псевдодифференциальные операторы в теории эллиптических задач с вырождением / А.Д. Баев, В.П. Глушко // Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева). – Новосибирск.: ИМ СО АН СССР, 1983. – №1. – С. 3–31.
- [14] Лионс, Ж. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 371 с.

Поступила в редакцию 04/IV/2008;
в окончательном варианте — 04/IV/2008.

ON GENERAL BOUNDARY PROBLEM IN BAR FOR DEGENERATING HIGH ORDER ELLIPTIC EQUATION³

© 2003 A.D. Baev⁴

In this paper unique existence theorem is proved for solution of boundary problem, like Dirichlet problem, in bar for one class of degenerating high order elliptic equations. The solution of this problem a priori estimation is proved in specially selected spaces like Sobolev spaces.

Keywords: *a priori estimations, degenerating equation, S.L. Sobolev space, regularizator, boundary value problem.*

Paper received 04/IV/2008.

Paper accepted 04/IV/2008.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Y.N. Radayev.

⁴Baev Aleksandr Dmitrievich (baev@math.vsu.ru), Dept. of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russia.