

ДВОЙСТВЕННОСТЬ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПЛОСКИХ R -МОДУЛЕЙ¹

© 2008 А.В. Царев²

В работе показано, что категория плоских конечно порожденных модулей над кольцом псевдорациональных чисел с псевдогомоморфизмами в качестве морфизмов двойственна сама себе.

Введение

Под "группой" в данной работе всюду подразумевается абелева группа, записанная аддитивно; Z , Q и $\widehat{Z}_p$ — обозначения колец целых, рациональных и целых p -адических чисел соответственно или их аддитивных групп, P — множество всех простых чисел, $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел. Если S — подмножество K -модуля M , то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_K$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S , а через $\langle S \rangle_*$ — сервантную оболочку множества S , состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором натуральном n . Через $t(A)$ и A_p будем обозначать соответственно периодическую и p -примарную часть группы A . Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то через $[X]$ будем обозначать столбец элементов $x_1, \dots, x_n$. Остальные обозначения соответствуют [1].

Определение 1.1. Кольцо $R = \langle 1, \bigoplus_{p \in P} \widehat{Z}_p \rangle_* \subset \prod_{p \in P} \widehat{Z}_p$ называется кольцом псевдорациональных чисел.

Это кольцо было введено в работах А.А. Фомина [2] и П.А. Крылова [3] для изучения sp -групп, которые, как они показали, удобно представляются R -модулями. Смешанная абелева группа G называется sp -группой, если она лежит между прямой суммой и прямым произведением своих p -примарных компонент, $\bigoplus_{p \in P} G_p \subset G \subseteq \prod_{p \in P} G_p$. А.А. Фомин впервые применил модули над кольцом псевдорациональных чисел для изучения факторно делимых групп. Напомним, что группа G называется *факторно делимой*, если она не содержит делимых периодических подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F — делимая периодическая группа.

В [4] А.А. Фомин показал, что любая факторно делимая группа сервантно вкладывается в некоторый конечно порожденный R -модуль, который он назвал *псевдорациональным типом* этой группы. Из результатов, полученных в этой работе, следует, что факторно делимые группы и конечно порожденные R -модули

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором А.Н. Пановым.

²Царев Андрей Валерьевич (an-tsarev@yandex.ru), кафедра алгебры Московского педагогического государственного университета, 107140, Россия, г. Москва, ул. Краснопрудная, 14.

имеют ряд аналогичных свойств, и, что как первый класс можно применять для изучения второго, так и второй для изучения первого.

В [5] получен ряд свойств факторно делимых групп и конечно порожденных R -модулей, демонстрирующих "близость" этих двух классов. Здесь мы продолжаем изучение конечно порожденных R -модулей. Для этого вводится понятие *псевдогомоморфизма* R -модулей. Если M, L — R -модули, то псевдогомоморфизмами из M в L будем называть элементы фактор-множества $\text{Hom}_R(M, L)/\text{Hom}_R(M, TL)$, где $T = \bigoplus_{p \in P} \widehat{Z}_p$.

Основным результатом работы является

Теорема 5.2. Категория плоских конечно порожденных R -модулей с псевдогомоморфизмами в качестве морфизмов двойственна сама себе.

Аналогичный результат имеет место и для факторно делимых групп, а именно, D.M. Arnold в [6] доказал, что категория факторно делимых групп без кручения с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов двойственна сама себе.

1. Модули над кольцом псевдорациональных чисел

В кольце целых универсальных чисел $\widehat{Z} = \prod_{p \in P} \widehat{Z}_p$ рассмотрим подкольцо R , аддитивная группа которого сервантно порождается идеалом $\bigoplus_{p \in P} \widehat{Z}_p$ и единицей кольца.

Определение 1.1 [2]. Кольцо $R = \langle 1, \bigoplus_{p \in P} \widehat{Z}_p \rangle_*$ называется кольцом псевдорациональных чисел.

Свойства кольца R .

1. Элемент $r = (\alpha_p) \in \prod_{p \in P} \widehat{Z}_p$ принадлежит кольцу R тогда и только тогда, когда существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$, что $n\alpha_p = m$ почти при всех простых p (это число $\frac{m}{n}$ далее будем обозначать $|r|$).
2. Обозначим через ε_p элемент кольца R такой, что его p -компонента равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Тогда ε_p — идемпотент кольца R .
3. Элементы вида

$$\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_n}, \quad (a)$$

где $p_1, \dots, p_n$ — различные простые числа, и элементы вида

$$1 - \varepsilon, \quad (b)$$

а также 1 и 0 составляют множество всех идемпотентов кольца R .

4. Для элемента $r \in R$ обозначим через $|r|$ рациональное число, определенное в свойстве 1. Тогда число $|r|$ определено однозначно и

$$|r_1 \pm r_2| = |r_1| \pm |r_2|, \quad |r_1 \cdot r_2| = |r_1| \cdot |r_2|,$$

для любых $r_1, r_2 \in R$.

5. Любой элемент $r \in R$ можно представить в виде $r = \varepsilon r + (1 - \varepsilon)|r|$, где ε — идемпотент вида (a).
6. Множество $T = \bigoplus_{p \in P} \widehat{Z}_p$ является максимальным идеалом кольца R , причем $R/T \cong \mathbb{Q}$.

Рассмотрим некоторые свойства R -модулей.

Определение 1.2 [2]. R -модуль M называется делимым, если его аддитивная группа делимая без кручения и $rm = |r|m$ для любых $r \in R$ и $m \in M$. Если R -модуль не содержит делимых подмодулей, то он называется редуцированным.

Заметим, что конечно порожденный R -модуль является делимым тогда и только тогда, когда его аддитивная группа делимая без кручения конечного ранга.

Теорема 1.1 [2]. Для произвольного R -модуля M справедливо:

- 1) модуль M либо редуцированный, либо содержит наибольший делимый подмодуль $\text{div}M$;
- 2) $\text{div}M = \{m \in M \mid tm = 0 \text{ для любого } t \in T\}$;
- 3) $\text{div}M$ выделяется прямым слагаемым в M .

Теорема 1.2 [2]. Если M — произвольный R -модуль, то множество

$$TM = \{tm \mid t \in T, m \in M\}$$

является подмодулем модуля M , причем $TM = \bigoplus_{p \in P} M_p$, где $M_p = \varepsilon_p M$.

Определение 1.3 [2]. Псевдорациональным рангом R -модуля M называется $\dim_Q(M/TM)$ — размерность фактор-модуля M/TM , рассматриваемого в качестве векторного пространства над полем $Q \cong R/T$.

Свойства псевдорационального ранга.

1. Если $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$, то $r^*(M) \leq n$.
2. Если N — подмодуль R -модуля M , то $r^*(M) = r^*(M/N) + r^*(N)$.

Рассмотрим также следующую теорему о гомоморфизмах R -модулей.

Теорема 1.3 [4]. Пусть N и M — конечно порожденные R -модули, причем M — редуцированный или N — делимый, тогда

$$\text{Hom}_Z(N, M) = \text{Hom}_R(N, M).$$

2. Модуль псевдорациональных отношений

Пусть M — конечно порожденный R -модуль, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — произвольная система элементов из M . Рассмотрим множество

$$\Delta M_X = \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n \mid r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0\},$$

которое, очевидно, является R -модулем. Если X — система образующих в M , то ΔM_X будем называть *модулем псевдорациональных отношений* R -модуля M .

Предложение 2.1. Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — система образующих элементов R -модуля M , то $M \cong R^n / \Delta M_X$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi: R^n \rightarrow M$, по закону

$$\varphi(r_1, \dots, r_n) = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n.$$

Нетрудно убедиться, что φ — гомоморфизм. А так как X — система образующих R -модуля M , то φ — эпиморфизм. Заметим, что

$$(r_1, \dots, r_n) \in \ker \varphi \Leftrightarrow r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0,$$

т.е. $\ker \varphi = \Delta M_X$, следовательно, $M \cong R^n / \Delta M_X$.

Следствие 2.1. Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — система образующих элементов R -модуля M , то $r^*(M) + r^*(\Delta M_X) = n$.

Теорема 2.1. Пусть M и L — произвольные модули над кольцом R . Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — система образующих в M , $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ — система образующих в L , A — $(n \times k)$ -матрица с элементами из кольца R , то гомоморфизм $f: M \rightarrow L$ такой, что $f[X] = A[Y]$ существует тогда и только тогда, когда $\Delta M_X \cdot A \subseteq \Delta L_Y$.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм модулей $f: M \rightarrow L$ такой, что $f[X] = A[Y]$. Если $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X$, то $(r_1, \dots, r_n)[X] = 0$, следовательно,

$$f(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = (r_1, \dots, r_n)A[Y] = 0.$$

Таким образом, $(r_1, \dots, r_n)A \in \Delta L_Y$, а значит, $\Delta M_X \cdot A \subseteq \Delta L_Y$.

Покажем достаточность условий теоремы. Пусть $\Delta M_X \cdot A \subseteq \Delta L_Y$, построим гомоморфизм $f: M \rightarrow L$ такой, что $f[X] = A[Y]$.

Рассмотрим соответствие $f: M \rightarrow L$, по закону

$$f(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = (r_1, \dots, r_n)A[Y].$$

Пусть $g = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n$ — два произвольных представления элемента $g \in M$. Тогда

$$(r_1 - s_1)x_1 + \dots + (r_n - s_n)x_n = 0,$$

т.е. $(r_1 - s_1, \dots, r_n - s_n) \in \Delta M_X$. Тогда из условий теоремы следует, что

$$(r_1 - s_1, \dots, r_n - s_n)A[Y] = 0,$$

а значит,

$$f(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = (r_1, \dots, r_n)A[Y] = (s_1, \dots, s_n)A[Y] = f(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n).$$

Таким образом, f — отображение. Очевидно, что f сохраняет операции, т. е. f — гомоморфизм, а так как $f[X] = A[Y]$, то f — искомый гомоморфизм.

3. Условие ортогональности

Пусть M — конечно порожденный R -модуль, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — его система образующих. Рассмотрим R -модуль

$$\Delta M_X^\perp = \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n \mid \Delta M_X \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = 0\}.$$

Теорема 3.1. Если M — конечно порожденный R -модуль с системой образующих X , то $\text{Hom}_R(M, R) \cong \Delta M_X^\perp$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — система образующих R -модуля M . Рассмотрим отображение $\Phi: \text{Hom}_R(M, R) \rightarrow R^n$, по закону

$$\Phi(\varphi) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)).$$

Покажем, что образ отображения Φ совпадает с модулем $\Delta M_X^\perp$. Если $(r_1, \dots, r_n) \in \text{im } \Phi$, то существует гомоморфизм $\varphi \in \text{Hom}_R(M, R)$ такой, что $r_i = \varphi(x_i)$. Тогда

$$\Delta M_X \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \Delta M_X \begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \dots \\ \varphi(x_n) \end{pmatrix} = 0,$$

следовательно, $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X^\perp$ и $\text{im } \Phi \subseteq \Delta M_X^\perp$.

Пусть $(r_1, \dots, r_n)$ — произвольный элемент из $\Delta M_X^\perp$, докажем существование такого гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}_R(M, R)$, что $\varphi(x_i) = r_i$.

Рассмотрим соответствие $\varphi: M \rightarrow R$, по закону

$$\varphi(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) = s_1 r_1 + \dots + s_n r_n,$$

где $s_1, \dots, s_n \in R$. Пусть $s_1 x_1 + \dots + s_n x_n = s'_1 x_1 + \dots + s'_n x_n$, тогда

$$(s_1 - s'_1, \dots, s_n - s'_n) \in \Delta M_X.$$

Так как $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X^\perp$, то $(s_1 - s'_1)r_1 + \dots + (s_n - s'_n)r_n = 0$, и значит,

$$\varphi(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) = \varphi(s'_1 x_1 + \dots + s'_n x_n),$$

т.е. φ — отображение.

Пусть $g_1 = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n$ и $g_2 = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$, где $t_i, s_i \in R$, тогда

$$\varphi(g_1 + g_2) = \varphi((s_1 + t_1)x_1 + \dots + (s_n + t_n)x_n) = (s_1 + t_1)r_1 + \dots + (s_n + t_n)r_n =$$

$$= (s_1 r_1 + \dots + s_n r_n) + (t_1 r_1 + \dots + t_n r_n) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2);$$

$$\varphi(r g_1) = \varphi(r(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n)) = r(s_1 r_1 + \dots + s_n r_n) = r\varphi(g_1).$$

Таким образом, φ — искомый гомоморфизм, следовательно, $\text{im } \Phi = \Delta M_X^\perp$.

Если $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$, то $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$ для любого $x_i \in X$. Но X — система образующих в M , следовательно, последнее равенство влечет $\varphi = \psi$, а значит, Φ — инъекция.

Убедимся, что Φ сохраняет операции. Пусть $\varphi, \psi \in \text{Hom}_R(M, R)$, тогда

$$\Phi(\varphi + \psi) = ((\varphi + \psi)(x_1), \dots, (\varphi + \psi)(x_n)) =$$

$$= (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) + (\psi(x_1), \dots, \psi(x_n)) = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi);$$

$$\Phi(r\varphi) = (r\varphi(x_1), \dots, r\varphi(x_n)) = r(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = r\Phi(\varphi).$$

Таким образом, из всего вышесказанного следует, что Φ задает изоморфизм между R -модулями $\text{Hom}_R(M, R)$ и $\Delta M_X^\perp$.

Теорема 3.2. Пусть M, L — конечно порожденные R -модули, X, Y — системы порождающих в M и L соответственно, тогда

$$\Delta M_X \cdot A \subseteq \Delta L_Y \Rightarrow \Delta L_Y^\perp \cdot A^t \subseteq \Delta M_X^\perp,$$

где A — матрица подходящего размера с элементами из кольца R .

Доказательство. Пусть $\Delta M_X \cdot A \subseteq \Delta L_Y$. Если $(s_1, \dots, s_k)$ — произвольный элемент из $\Delta L_Y^\perp$, то

$$(r_1, \dots, r_n) A \begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_k \end{pmatrix} = 0$$

для любого $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X$. Отсюда следует, что $(s_1, \dots, s_k) A^t \in \Delta M_X^\perp$, а значит, $\Delta L_Y^\perp \cdot A^t \subseteq \Delta M_X^\perp$.

Нетрудно видеть, что всегда $\Delta M_X \subseteq (\Delta M_X^\perp)^\perp$. Будем говорить, что конечно порожденный R -модуль M удовлетворяет *условию ортогональности*, если существует такая система образующих X R -модуля M , что выполняется равенство

$$(\Delta M_X^\perp)^\perp = \Delta M_X.$$

Пусть M — конечно порожденный R -модуль. Рассмотрим его подмодуль

$$K_M(R) = \{x \in M \mid \varphi(x) = 0 \text{ для любого } \varphi \in \text{Hom}_R(M, R)\}.$$

Напомним, что фактор-модуль $M/K_M(R)$ называется *коследом* кольца R в модуле M , и $\text{Hom}_R(M, R) \cong \text{Hom}_R(M/K_M(R), R)$.

Предложение 3.1. $K_M(R) = \{x \in M \mid o(\varepsilon_p x) < \infty \text{ для любого } p \in P\}$. В частности, $\text{div} M \subseteq K_M(R)$ и $\iota(M) \subseteq K_M(R)$.

Доказательство. Так как R — редуцированный R -модуль без кручения, то $\{x \in M \mid o(\varepsilon_p x) < \infty \text{ для любого } p \in P\} \subseteq K_M(R)$.

Если $o(\varepsilon_p x) = \infty$ для некоторого простого p , то $\langle \varepsilon_p x \rangle_R \cong \widehat{Z}_p$. Так как $\varepsilon_p M$ — конечно порожденный $\widehat{Z}_p$ -модуль, то существует гомоморфизм $\varphi: M \rightarrow \widehat{Z}_p$ такой, что $\varphi(x) \neq 0$. Учитывая, что $\widehat{Z}_p$ — прямое слагаемое R , получаем, что $x \notin K_M(R)$. Таким образом, верно обратное включение $K_M(R) \subseteq \{x \in M \mid o(\varepsilon_p x) < \infty \text{ для любого } p \in P\}$.

Теорема 3.3. R -модуль M удовлетворяет условию ортогональности тогда и только тогда, когда он не имеет ненулевых элементов конечного порядка и редуцирован.

Доказательство. Пусть M — произвольный конечно порожденный R -модуль с системой образующих $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. По теореме 3.1 условие $(r_1, \dots, r_n) \in (\Delta M_X^\perp)^\perp$

выполняется тогда и только тогда, когда $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = 0$ при любом $\varphi \in \text{Hom}_R(M, R)$. Так как последнее равенство равносильно

$$r_1 \varphi(x_1) + \dots + r_n \varphi(x_n) = \varphi(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = 0,$$

то $(r_1, \dots, r_n) \in (\Delta M_X^\perp)^\perp \Leftrightarrow r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \in K_M(R)$. Следовательно,

$$(\Delta M_X^\perp)^\perp = \Delta M_X \Leftrightarrow K_M(R) = 0.$$

Тогда из предложения 3.1 получаем справедливость данной теоремы.

Заметим, что класс R -модулей без ненулевых элементов конечного порядка — это в точности класс *плоских* R -модулей (подробнее см. [7]).

Следствие 3.1. $K_M(R) \cong (\Delta M_X^\perp)^\perp / \Delta M_X$.

4. Псевдогомоморфизмы R -модулей

Свойства модулей над кольцом псевдорациональных чисел во многом аналогичны свойствам смешанных абелевых групп. При изучении последних важную роль играет категория Уокера (*Walk*). Объектами этой категории являются (смешанные) группы, а множеством морфизмов из A в B является фактор-множество $\text{Hom}(A, B)/\text{Hom}(A, \iota(B))$. В связи с этим естественно рассмотреть категорию R -модулей, множеством морфизмов из M в L в которой служит фактор-множество $\text{Hom}_R(M, L)/\text{Hom}_R(M, TL)$. Эти морфизмы будем называть *псевдогомоморфизмами* R -модулей, а саму категорию — *категорией псевдогомоморфизмов*. Обратимые псевдогомоморфизмы будем называть *псевдоизоморфизмами*.

Предложение 4.1. Для конечно порожденных R -модулей M_1 и M_2 следующие утверждения равносильны:

1. M_1 и M_2 псевдоизоморфны.
2. $(1 - \varepsilon)M_1 \cong (1 - \varepsilon)M_2$ при некотором идемпотенте $\varepsilon \in R$ вида (а).
3. $M_1 \oplus X \cong M_2 \oplus Y$, где X и Y — некоторые конечно порожденные R -модули псевдорационального ранга 0.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $\bar{\varphi} = \varphi + \text{Hom}_R(M_1, TM_2)$ — псевдоизоморфизм из M_1 в M_2 , а $\bar{\varphi}' = \varphi' + \text{Hom}_R(M_2, TM_1)$ — псевдоизоморфизм из M_2 в M_1 , обратный к $\bar{\varphi}$. Тогда $\varphi\varphi' = 1_{M_1} + \psi$ и $\varphi'\varphi = 1_{M_2} + \chi$, где 1_{M_1} и 1_{M_2} — тождественные отображения R -модулей M_1 и M_2 соответственно, $\psi \in \text{Hom}_R(M_1, TM_1)$ и $\chi \in \text{Hom}_R(M_2, TM_2)$. Так как M_1 — конечно порожденный R -модуль, то $M_1 = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$, а тогда существует такой идемпотент $\varepsilon_1 \in R$ вида (а), что

$$(1 - \varepsilon_1)\psi(x_1) = \dots = (1 - \varepsilon_1)\psi(x_n) = 0,$$

следовательно, $(1 - \varepsilon_1)\psi = 0$. Аналогично показывается, что существует такой идемпотент $\varepsilon_2 \in R$ вида (а), что $(1 - \varepsilon_2)\chi = 0$. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, тогда

$$(1 - \varepsilon)\varphi\varphi' = (1 - \varepsilon)1_{M_1} \text{ и } (1 - \varepsilon)\varphi'\varphi = (1 - \varepsilon)1_{M_2}.$$

Отсюда следует, что $(1 - \varepsilon)\varphi$ — изоморфизм из $(1 - \varepsilon)M_1$ в $(1 - \varepsilon)M_2$.

$2 \Rightarrow 3$. Если $(1 - \varepsilon)M_1 \cong (1 - \varepsilon)M_2$, то $M_1 \oplus X \cong M_2 \oplus Y$, где $X = \varepsilon M_2$ и $Y = \varepsilon M_1$ — конечно порожденные R -модули псевдорационального ранга 0.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть $\varphi_1: M_1 \oplus X \rightarrow M_2 \oplus Y$ — изоморфизм, а φ_2 — обратный к нему изоморфизм. Так как X и Y — конечно порожденные R -модули, то $(1 - \varepsilon)X = (1 - \varepsilon)Y = 0$ для некоторого идемпотента $(1 - \varepsilon) \in R$ вида (б). Тогда $(1 - \varepsilon)\varphi_1$ — гомоморфизм из M_1 в M_2 , а $(1 - \varepsilon)\varphi_2$ — гомоморфизм из M_2 в M_1 , причем

$$(1 - \varepsilon)\varphi_1(1 - \varepsilon)\varphi_2 = 1_{(1 - \varepsilon)M_1} \text{ и } (1 - \varepsilon)\varphi_2(1 - \varepsilon)\varphi_1 = 1_{(1 - \varepsilon)M_2}.$$

Отсюда следует, что псевдогомоморфизмы $(1 - \varepsilon)\varphi_1 + \text{Hom}_R(M_1, TM_2)$ и $(1 - \varepsilon)\varphi_2 + \text{Hom}_R(M_2, TM_1)$ взаимно обратны, т.е. M_1 и M_2 — псевдоизоморфны.

Если для R -модулей M_1 и M_2 выполняется равенство

$$(1 - \varepsilon)M_1 = (1 - \varepsilon)M_2$$

для некоторого идемпотента $\varepsilon \in R$, то будем говорить, что M_1 и M_2 — *псевдоравные* R -модули.

R -модуль M неразложим в категории псевдогомоморфизмов, если в любом его подмодуле $M_1 \oplus M_2$, псевдоизоморфном M , одно из слагаемых псевдоизоморфно 0 (имеет псевдорациональный ранг 0). Нетрудно видеть, что неразложимость R -модуля M в категории псевдогомоморфизмов равносильна тому, что в любом прямом разложении $M = M_1 \oplus M_2$ одно из слагаемых всегда имеет псевдорациональный ранг 0.

Теорема 4.1. В категории псевдогомоморфизмов конечно порожденных R -модулей любой модуль раскладывается в (конечную) прямую сумму неразложимых в этой категории объектов.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по величине псевдорационального ранга.

Пусть M — конечно порожденный R -модуль псевдорационального ранга 1. Так как $r^*(X \oplus Y) = r^*(X) + r^*(Y)$, то в любом прямом разложении $M = M_1 \oplus M_2$ одно из слагаемых имеет псевдорациональный ранг 0, т.е. M неразложим в категории псевдогомоморфизмов.

Предположим, что теорема верна для всех конечно порожденных R -модулей, псевдорациональный ранг которых меньше n . Рассмотрим конечно порожденный R -модуль M такой что $r^*(M) = n$. Если M неразложим в категории квазигомоморфизмов, то $M = M$ — искомое разложение. Если же M разложим, то $M = M_1 \oplus M_2$, где $r^*(M_1) < n$ и $r^*(M_2) < n$. По предположению индукции M_1 и M_2 раскладываются в прямую сумму R -модулей, неразложимых в категории псевдогомоморфизмов, следовательно, таким же разложением обладает и R -модуль $M = M_1 \oplus M_2$.

Теорема 4.2. Пусть M, L — произвольные R -модули, φ, ψ — произвольные гомоморфизмы из M в L , тогда φ и ψ определяют один и тот же псевдогомоморфизм $\Leftrightarrow$ когда совпадают индуцированные ими гомоморфизмы $\varphi': M/TM \rightarrow L/TL$ и $\psi': M/TM \rightarrow L/TL$.

Доказательство. Гомоморфизмы φ и ψ определяют один и тот же псевдогомоморфизм тогда и только тогда, когда $\varphi - \psi \in \text{Hom}_R(M, TL)$, а это равносильно тому, что

$$(\varphi' - \psi')(m + TM) = (\varphi - \psi)(m) + TL = 0$$

для любого $m \in M$, т.е. $\varphi' = \psi'$.

Следствие 4.1. Пусть M и L — R -модули конечных псевдорациональных рангов, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ — максимальные системы в M и L соответственно, независимые по модулю TM и TL ; φ, ψ — гомоморфизмы из $\text{Hom}_R(M, L)$. Если

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_k \end{pmatrix} \text{ и } \psi \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t'_1 \\ \dots \\ t'_k \end{pmatrix},$$

где $t_1, \dots, t_k, t'_1, \dots, t'_k \in TL$, $A = (r_{ij})$, $B = (s_{kl})$ — матрицы подходящего размера с элементами из кольца R , то гомоморфизмы φ, ψ определяют один и тот же псевдогомоморфизм тогда и только тогда, когда равны рациональные матрицы $\bar{A} = (|r_{ij}|)$ и $\bar{B} = (|s_{kl}|)$.

Данное следствие целиком распространяется на конечно порожденные R -модули. Оно показывает, что при работе с псевдогомоморфизмами конечно порожденных R -модулей можно в полной мере использовать матричный аппарат линейной алгебры.

5. Двойственность

Для доказательства основной теоремы данной работы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Теорема 5.1. [7] Для R -модуля M следующие условия равносильны:

1. M имеет прямое слагаемое вида $(1 - \varepsilon)R$;
2. R -модуль $\text{Hom}_R(M, R)$ имеет прямое слагаемое вида $(1 - \varepsilon)R$;
3. $r^* \text{Hom}_R(M, R) > 0$.

Лемма 5.1. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — система порождающих конечно порожденного R -модуля M , C — произвольная $(n \times n)$ -матрица с элементами из кольца R , тогда следующие условия равносильны:

1. $\Delta M_X = \Delta M_{CX}$;
2. Соответствие $\varphi: M \rightarrow M$, такое что

$$\varphi(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = (r_1, \dots, r_n)C[X],$$

является мономорфизмом (причем $\varphi((1 - \varepsilon)M) = (1 - \varepsilon)M$ для некоторого идемпотента $(1 - \varepsilon) \in R$).

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если $\Delta M_X = \Delta M_{CX}$, то по теореме 2.1 отображение $\varphi: M \rightarrow M$, действующее по закону $\varphi(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = (r_1, \dots, r_n)C[X]$, является гомоморфизмом. Далее, если $g = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \in \ker \varphi$, то $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_{CX}$, а значит, $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X$, т.е. $g = 0$. Таким образом, φ — мономорфизм.

Из предложения 2.1 следует, что

$$\varphi(M) = \langle CX \rangle_R \cong R^n / \Delta M_{CX} = R^n / \Delta M_X \cong M,$$

в частности, $r^*(\varphi(M)) = r^*(M)$, а тогда $r^*(M/\varphi(M)) = 0$. Так как M — конечно порожденный R -модуль, то для некоторого идемпотента $(1 - \varepsilon) \in R$ справедливо: $(1 - \varepsilon)(M/\varphi(M)) = 0$, т.е.

$$\varphi((1 - \varepsilon)M) = (1 - \varepsilon)\varphi(M) = (1 - \varepsilon)M.$$

$2 \Rightarrow 1$. Так как φ — мономорфизм и $\varphi[X] = C[X]$, то

$$\varphi(r_1x_1 + \dots + r_nx_n) = 0 \Leftrightarrow (r_1, \dots, r_n)C[X] = 0 \Leftrightarrow (r_1, \dots, r_n)[X] = 0.$$

Следовательно, $\Delta M_X = \Delta M_{CX}$.

Лемма 5.2. Если N — подмодуль конечно порожденного R -модуля M такой, что $r^*(N) = r^*(M)$, то N и M псевдоравны.

Доказательство. Так как $r^*(N) = r^*(M)$, то M/N — конечно порожденный R -модуль псевдорационального ранга 0. Тогда $(1 - \varepsilon)M = (1 - \varepsilon)N$ для некоторого идемпотента $\varepsilon \in R$, т.е. N и M псевдоравны.

Следующая теорема является основным результатом данной работы

Теорема 5.2. Категория плоских конечно порожденных R -модулей с псевдогомоморфизмами в качестве морфизмов двойственна сама себе.

Доказательство. Обозначим рассматриваемую категорию через $\mathcal{P}$. Нам надо построить контравариантный функтор $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, такой что $\delta \cdot \delta \cong id_{\mathcal{P}}$, где $id_{\mathcal{P}}$ — тождественный функтор на $\mathcal{P}$.

Для начала построим двойственность на подкатегории $\mathcal{RP}$ категории $\mathcal{P}$, объектами которой являются R -модули, не имеющие прямых слагаемых вида Q и $(1 - \varepsilon)R$ для любого идемпотента $\varepsilon \in R$.

Пусть M — произвольный объект категории $\mathcal{RP}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — максимальная независимая по модулю TM система элементов из M (такую систему далее будем называть просто *максимальной независимой системой*). Тогда модуль, двойственный M , строим следующим образом:

$$L = \delta(M) = R^n / \Delta M_X^\perp,$$

при этом система $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$, двойственная системе X , имеет вид:

$$x_1^* = (1, 0, \dots, 0) + \Delta M_X^\perp, \dots, x_n^* = (0, 0, \dots, 1) + \Delta M_X^\perp.$$

Заметим, что мы можем считать, что X является системой образующих R -модуля M , так как в противном случае, не теряя общности, можно заменить M на его подмодуль $M' = \langle X \rangle_R$, который в силу леммы 5.2 ему псевдоравен. Всюду далее будем использовать это допущение.

Убедимся, что $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ является максимальной независимой системой R -модуля $L = \delta(M)$. Пусть $r_1x_1^* + \dots + r_nx_n^* = 0$, тогда по теореме 3.1

$$(r_1, \dots, r_n) \in \Delta L_{X^*} = \Delta M_X^\perp \cong \text{Hom}_R(M, R).$$

Так как R -модуль M не имеет прямых слагаемых, псевдоизоморфных R (поскольку $M \in \mathcal{RP}$), то по теореме 5.1 $r^*\text{Hom}_R(M, R) = 0$. Тогда $r^*\Delta L_{X^*} = 0$, и следовательно, $r_1, \dots, r_n \in T$, т.е. система X^* независима по модулю TL . А так как

$$r^*(L) = r^*(R^n) - r^*\Delta L_{X^*} = n = |X^*|,$$

то X^* — максимальная независимая система в L .

Из равенства $(\Delta L_{X^*}^\perp)^\perp = \Delta M_X^\perp = \Delta L_{X^*}$ следует, что R -модуль L удовлетворяет условию ортогональности, т.е. L — редуцированный плоский R -модуль. А так как $r^* \Delta M_X = n - r^*(M) = 0$ и $\text{Hom}_R(L, R) \cong \Delta L_{X^*}^\perp = \Delta M_X$, то из теоремы 5.1 следует, что L не имеет прямых слагаемых вида $(1 - \varepsilon)R$ для любого идемпотента $\varepsilon \in R$. Таким образом, $L \in \mathcal{RP}$.

Покажем, что построение объекта $\delta(M)$ не зависит от выбора максимальной независимой системы X . Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — другая максимальная независимая система R -модуля M . Убедимся, что $L = R^n / \Delta M_X^\perp$ и $N = R^n / \Delta M_Y^\perp$ — псевдоизоморфные R -модули.

Пусть $[X] = A[Y]$ и $Y = B[X]$, где A, B — $(n \times n)$ -матрицы с элементами из кольца R . Из данных равенств получаем:

$$\Delta M_X \cdot A \subseteq \Delta M_Y \text{ и } \Delta M_Y \cdot B \subseteq \Delta M_X.$$

Тогда по теореме 3.2

$$\Delta M_Y^\perp \cdot A' \subseteq \Delta M_X^\perp \text{ и } \Delta M_X^\perp \cdot B' \subseteq \Delta M_Y^\perp.$$

Учитывая теорему 2.1, получаем, что существуют гомоморфизмы $\alpha: N \rightarrow L$ и $\beta: L \rightarrow N$ такие, что $\alpha[Y^*] = A'[X^*]$ и $\beta[X^*] = B'[Y^*]$, следовательно,

$$\alpha\beta[X^*] = (AB)^\dagger[X^*] \text{ и } \beta\alpha[Y^*] = (BA)^\dagger[Y^*].$$

Учитывая, что $[X] = AB[X]$, получаем:

$$\Delta M_X = \Delta M_{(AB)X} \Rightarrow \Delta M_X^\perp = \Delta M_{(AB)X}^\perp,$$

но $\Delta M_X^\perp = \Delta L_{X^*}$ и $\Delta M_{(AB)X}^\perp = \Delta L_{(AB)^\dagger X^*}$, значит, $\Delta L_{X^*} = \Delta L_{(AB)^\dagger X^*}$, а тогда по лемме 5.1 отображение $\varphi = \alpha\beta$ является мономорфизмом, причем $(1 - \varepsilon_1)\alpha\beta$ — автоморфизм R -модуля $(1 - \varepsilon_1)L$ для некоторого идемпотента $(1 - \varepsilon_1) \in R$.

Аналогично показывается, что $(1 - \varepsilon_2)\beta\alpha$ является автоморфизмом R -модуля $(1 - \varepsilon_2)N$ для некоторого идемпотента $(1 - \varepsilon_2) \in R$. Таким образом, для идемпотента $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ получаем, что $(1 - \varepsilon)\alpha(1 - \varepsilon)\beta$ является автоморфизмом R -модуля $(1 - \varepsilon)L$, а $(1 - \varepsilon)\beta(1 - \varepsilon)\alpha$ является автоморфизмом R -модуля $(1 - \varepsilon)N$. Из этого следует, что R -модули $(1 - \varepsilon)L$ и $(1 - \varepsilon)N$ изоморфны, а тогда R -модули L и N псевдоизоморфны.

Пусть M, L — произвольные объекты из $\mathcal{RP}$ и $\Phi = \varphi + \text{Hom}_R(M, TL)$ — произвольный псевдогомоморфизм из M в L . Возьмем X и Y — некоторые максимальные независимые системы порождающих в R -модулях M и L соответственно. Тогда $\varphi[X] = A[Y]$ для некоторой матрицы A подходящего размера с элементами из кольца R . Из теорем 2.1 и 3.2 следует, что существует гомоморфизм $\varphi^*: \delta(L) \rightarrow \delta(M)$, такой что $\varphi^*[Y^*] = A'[X^*]$. Тогда положим

$$\delta(\Phi) = \varphi^* + \text{Hom}_R(\delta(L), T\delta(M)).$$

В силу следствия 4.1. построение псевдогомоморфизма $\delta(\Phi)$ не зависит от выбора представителя $\varphi \in \Phi$ и матрицы A . Убедимся также, что построение $\delta(\Phi)$ не зависит от выбора максимальных независимых систем, порождающих X, Y .

Пусть X_1, Y_1 — максимальные независимые системы в R -модулях M и L соответственно, и пусть

$$[X_1] = D[X], \quad [Y_1] = C[Y], \quad \varphi[X_1] = B[Y_1].$$

Тогда $\varphi[X_1] = DA[Y] = BC[Y]$, следовательно,

$$(1 - \varepsilon)DA = (1 - \varepsilon)BC \tag{5.1}$$

для некоторого идемпотента $\varepsilon \in R$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R^n / \Delta M_Y^\perp & \xrightarrow{\varphi^*} & R^n / \Delta M_X^\perp \\ \lambda \downarrow & & \mu \downarrow \\ R^n / \Delta M_{Y_1}^\perp & \xrightarrow{\varphi_1^*} & R^n / \Delta M_{X_1}^\perp, \end{array} \quad (5.2)$$

где $\varphi^*[Y^*] = A^t[X^*]$, $\varphi_1^*[Y_1^*] = B^t[X_1^*]$, и $\lambda[Y^*] = C^t[Y_1^*]$, $\mu[X^*] = D^t[X_1^*]$.

Заметим, что из доказанного выше следует, что λ и μ порождают псевдоизоморфизмы, а из (5.1) следует, что $(1 - \varepsilon)A^t D^t = (1 - \varepsilon)C^t B^t$, т. е.

$$(1 - \varepsilon)\varphi^* \mu = (1 - \varepsilon)\lambda \varphi_1^*.$$

Таким образом, переходя в (5.2) к псевдогомоморфизмам, получаем коммутативную диаграмму, следовательно, псевдогомоморфизм $\delta(\Phi)$ определен нами корректно.

Пусть M, L — произвольные объекты из $\mathcal{RP}$, $\Phi = \varphi + \text{Hom}_R(M, TL)$ — псевдогомоморфизм из M в L . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & L \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ \delta^2(M) & \xrightarrow{\delta^2(\Phi)} & \delta^2(L) \end{array} \quad (5.3)$$

Пусть X, Y — максимальные независимые системы R -модулей M и L соответственно и $\varphi[X] = A[Y]$. Тогда

$$\delta(\Phi) = \varphi^* + \text{Hom}_R(\delta(L), T\delta(M)),$$

где $\varphi^*[Y^*] = A^t[X^*]$. Следовательно,

$$\delta^2(\Phi) = \varphi^{**} + \text{Hom}_R(\delta^2(M), T\delta^2(L)),$$

где $\varphi^{**}[X^{**}] = (A^t)^t[Y^{**}] = A[Y^{**}]$ и $X^{**} = \{x_1^{**}, \dots, x_n^{**}\}$, $Y^{**} = \{y_1^{**}, \dots, y_k^{**}\}$;

$$x_1^{**} = (1, 0, \dots, 0) + \Delta M_X, \dots, x_n^{**} = (0, 0, \dots, 1) + \Delta M_X,$$

$$y_1^{**} = (1, 0, \dots, 0) + \Delta L_Y, \dots, y_n^{**} = (0, 0, \dots, 1) + \Delta L_Y.$$

Из предложения 2.1 следует, что гомоморфизмы $f: M \rightarrow \delta^2(M)$ и $g: L \rightarrow \delta^2(L)$, переводящие X в X^{**} и Y в Y^{**} соответственно, являются изоморфизмами. Тогда из равенств $\varphi[X] = A[Y]$ и $\varphi^{**}[X^{**}] = A[Y^{**}]$ следует, что если в диаграмме (5.3) в качестве псевдогомоморфизмов $M \rightarrow \delta^2(M)$ и $L \rightarrow \delta^2(L)$ взять псевдоизоморфизмы, порожденные изоморфизмами f и g соответственно, то получим коммутативную диаграмму.

Таким образом, функтор δ является двойственностью на категории $\mathcal{RP}$.

Доопределим действие функтора δ на категорию $\mathcal{P}$. Любой объект M из $\mathcal{P}$ однозначно (с точностью до псевдоизоморфизма) можно представить в виде

$$M = Q^s \oplus R^r \oplus \widetilde{M},$$

где $\widetilde{M} \in \mathcal{RP}$. Для модуля $\widetilde{M}$ мы уже можем построить двойственный ему R -модуль $\delta(\widetilde{M})$. Тогда для M положим

$$\delta(M) = R^s \oplus Q^r \oplus \delta(\widetilde{M}).$$

Пусть $L = Q^m \oplus R^k \oplus \tilde{L} \in \mathcal{M}$ и $\Phi = \varphi + \text{Hom}_R(M, TL)$ — произвольный псевдогомоморфизм из M в L . Рассмотрим максимальные независимые системы $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ и $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ в M и L соответственно такие, что X_1, Y_1 — базисы в Q^s и Q^m , X_2, Y_2 — базисы в R^r и R^k , X_3, Y_3 — максимальные независимые системы в $\tilde{M}$ и $\tilde{L}$. Так как

$$\delta(M) = R^s \oplus Q^r \oplus \delta(\tilde{M}), \quad \delta(L) = R^m \oplus Q^k \oplus \delta(\tilde{L}),$$

то рассмотрим двойственные системы $X^* = X_1^* \cup X_2^* \cup X_3^*$ и $Y^* = Y_1^* \cup Y_2^* \cup Y_3^*$ в $\delta(M)$ и $\delta(L)$ соответственно такие, что X_1^*, Y_1^* — базисы в R^s и R^m , X_2^*, Y_2^* — базисы в Q^r и Q^k , X_3^*, Y_3^* — максимальные независимые систем в $\delta(\tilde{M})$ и $\delta(\tilde{L})$, построение которых показано выше.

Гомоморфизм φ однозначно определяется равенством $\varphi[X] = A[Y]$, где $A = (r_{ij})$ — матрица с элементами из кольца R . Так как

$$\Delta M_X = T^r \oplus 0^s \oplus \Delta \tilde{M}_{X_3}, \quad \Delta L_Y = T^m \oplus 0^k \oplus \Delta \tilde{L}_{Y_3},$$

то

$$\Delta M_X^\perp = 0^r \oplus R^s \oplus \Delta \tilde{M}_{X_3}^\perp, \quad \Delta L_Y^\perp = 0^m \oplus R^k \oplus \Delta \tilde{L}_{Y_3}^\perp.$$

Тогда из теорем 2.1 и 3.2 следует, что

$$(0^m \oplus R^k \oplus \Delta \tilde{L}_{Y_3}^\perp)A^t \subseteq (0^r \oplus R^s \oplus \Delta \tilde{M}_{X_3}^\perp),$$

а значит,

$$(0^m \oplus T^k \oplus \Delta \tilde{L}_{Y_3}^\perp)A^t \subseteq (0^r \oplus T^s \oplus \Delta \tilde{M}_{X_3}^\perp).$$

Но $0^m \oplus T^k \oplus \Delta \tilde{L}_{Y_3}^\perp = \Delta \delta(L)_{Y^*}$ и $0^r \oplus T^s \oplus \Delta \tilde{M}_{X_3}^\perp = \Delta \delta(M)_{X^*}$. Следовательно, по теореме 2.1 существует гомоморфизм $\varphi^*: \delta(L) \rightarrow \delta(M)$ такой, что $\varphi^*[Y^*] = A^t[X^*]$. Тогда положим $\delta(\Phi) = \varphi^* + \text{Hom}(\delta(L), \delta(M))$.

Аналогично случаю вполне редуцированных R -модулей ($\mathcal{RP}$ -случай) проверяется, что построение псевдогомоморфизма $\delta(\Phi)$ не зависит от выбора систем X, Y , и аналогично проверяется, что $\delta \cdot \delta \cong \text{id}_{\mathcal{P}}$.

Следствие 5.1. Двойственность $\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ сохраняет псевдорациональный ранг, т.е. $r^*(M) = r^*(\delta(M))$ для любого R -модуля $M \in \mathcal{P}$.

Работа поддержана грантом Президента РФ, № МК-3345.2007.1.

Литература

- [1] Фукс, Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. — М.: Мир. 1974. — Т. 1. — 335 с.; Т. 2. — 1977. — 416 с.
- [2] Fomin, A.A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers / A.A.Fomin // Abelian Groups and Modules. Trends in Mathematics. — Basel: Birkhaeuser Verlag, 1999. — P. 87–100.
- [3] Крылов, П.А. Об одном классе смешанных абелевых групп / П.А.Крылов, Е.Г.Пахомова, Е.И.Подберезина // Вестник Томского университета. — 2000. — Т. 269. — С. 47–51.
- [4] Fomin, A.A. Quotient divisible mixed groups / A.A.Fomin // Cont. Math. — 2001. — V. 273. — P. 117–128.
- [5] Царев, А.В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторноделимые группы / А.В.Царев // Алгебра и анализ. — 2006. — Т. 18. — №4. — С. 198–214.
- [6] Arnold, D.M. A duality for quotient divisible abelian groups of finite rank / D.M.Arnold // Pacific J. Math. — 1972. — V. 42. — P. 11–15.

- [7] Царев, А.В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел / А.В.Царев // Математические заметки. – 2006. – Т. 80. – №3. – С. 437–448.

Поступила в редакцию 5/*XII*/2007;
в окончательном варианте — 5/*XII*/2007.

A DUALITY FOR FINITELY GENERATED FLAT R -MODULES³

© 2007 A.V. Tsarev⁴

A duality for the category of finitely generated flat modules over the ring of pseudo-rational numbers with pseudo-homomorphisms as morphisms is constructed.

Paper received 5/*XII*/2007.
Paper accepted 5/*XII*/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. A.N. Panov.

⁴Tsarev Andrey Valer'evich (an-tsarev@yandex.ru), Dept. of Algebra, Moscow Pedagogical State University, Moscow, 107140, Russia.