УДК 517.946

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЯДА АППЕЛЯ F_1 [1]

© 2008 Х.А. Чиханов[2]

В статье рассматривается ряд Аппеля F_1 в связи с проблемой аналитического продолжения.

1. Ряд Аппеля F_1

В статье изучается проблема аналитического продолжения ряда Аппеля [1,2]:

$$F_1\left[\begin{array}{c} a,[b,b'] \\ c \end{array}\middle| x,y\right] = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+k}(b)_n(b')_k}{(c)_{n+k}} \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!}, \qquad |x|,|y|<1. \tag{1.1}$$

Здесь $(A)_k \equiv A(A+1)\ldots(A+k-1)$ — символ Похгаммера[3]; k — число множителей в произведении. В случае комплексных x,y ряд (1.1) сходится в бикруге $|x|,|y|<1$ в пространстве двух комплексных переменных $\overline{C^2_{x,y}} \equiv \overline{C_x} \otimes \overline{C_y}$ (произведение двух расширенных комплексных плоскостей). Мы, однако, будем в основном рассматривать вещественные значения x, y. Для простоты также ограничимся вещественными значениями параметров a, b, b', c.

Ряд F_1 является естественным обобщением классического рядя Гаусса. Он обладает как одномерным, так и двумерным интегральными представлениями:

$$\begin{aligned} F_1\left[\begin{array}{c} a,b,b' \\ c \end{array}\middle| x,y\right] &= k_1 \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b}(1-ty)^{-b'}dt = \\ &= k_2 \int\int t_+^{b-1} s_+^{b'-1}(1-t-s)_+^{c-b-b'-1}(1-tx-sy)^{-a}dtds. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь индекс + для функции $f(p)$ означает срезку при отрицательном аргументе (т.е. $f(p)=0$ при $p<0$). Таким образом, двойной интеграл в (1.2) берется по площади треугольника $[t,s>0, t+s<1]$. Постоянные k_1 и k_2 — нормировочные:

$$\frac{1}{k_1} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt = \Gamma\left[\begin{array}{c} a, c-a \\ c \end{array}\right] \equiv \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)},$$

$$\frac{1}{k_2} = \int\int t_+^{b-1} s_+^{b'-1}(1-t-s)_+^{c-b-b'-1}dtds = \Gamma\left[\begin{array}{c} b, b', c-b-b' \\ c \end{array}\right].$$

[1] Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2] Чиханов Хамит Александрович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[3] Мы рассматриваем ситуацию общего положения, игнорируя отдельные значения параметров. В частности, предполагается, что $c \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Интегральные представления проверяются разложением подинтегральных выражений в ряды. Заметим, что эти интегралы дают аналитическое продолжение ряда (1.1) из бикруга $|x|, |y| < 1$ практически на все $\overline{C^2_{x,y}}$, исключая некоторые особые гиперповерхности.

Несложные выкладки приводят к системе дифференциальных уравнений для ряда F_1 (см. [2], 5.9):

$$\begin{aligned} &lx(1-x)U_{xx} + y(1-x)U_{xy} + [c-(a+b+1)x]\,U_x - byU_y - abU = 0,\\ &y(1-y)U_{yy} + x(1-y)U_{xy} + [c-(a+b'+1)y]\,U_y - b'xU_x - ab'U = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Теорема 1. Существует единственное решение $U(x,y)$ системы (1.3), аналитическое в точке (0,0) с нормировкой $U(0,0) = 1$. Доказательство сводится к построению двойного ряда и приводит к ряду F_1.

Теорема 2. Существует единственное решение $U(x,y)$ системы (1.3), аналитическое в точке (1,1) с нормировкой $U(1,1) = 1$. Доказательство аналогично и приводит к ряду U_2.

Теорема 3. Существует единственное решение $U(x,y)$ системы (1.3),имеющее вид $U(x,y) \equiv x^{-b}y^{-b'}\Phi(x,y)$, где $\Phi(x,y)$ — функция, аналитическая в точке (∞,∞) с нормировкой $U(\infty,\infty) = 1$. Доказательство аналогично и приводит к ряду U_3.

Почему же интегралы (1.2) удовлетворяют системе(1.3)? Несложно убедиться, что при подстановке (1.2) в уравнения (1.3) под знаком интеграла возникает точная дифференциальная форма относительно переменных интегрирования[4]. Поэтому интеграл вычисляется, и он равен нулю. Заметим, что дифференциальная форма

$$\omega = t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-tx)^{-b}(1-ty)^{-b'}\,dt \tag{1.4}$$

является аналитической функцией от t на бесконечно-листной римановой поверхности с пятью точками ветвления 0, 1, ∞, $1/x$, $1/y$. Следовательно, кроме отрезка $[0,1]$ можно брать другие пути интегрирования, соединяющие точки ветвления. Всего таких путей 10 (C^2_5). Итак, мы имеем 10 решений системы (1.3), каждое из которых можно с помощью дробно-линейного преобразования свести к интегралу по отрезку $[0,1]$. Далее, в интеграле (1.2) можно сохранить пределы интегрирования, применяя дробно-линейное преобразование $[0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, \xi \mapsto \infty]$, где ξ — одна из точек $[1/x, 1/y, \infty]$. Таких преобразований — 3, а с учетом перестановки пределов — 6. Кроме того, отметим, что интегралу (1.2) соответствуют два совпадающих между собой ряда ввиду биекции $[x \Leftrightarrow y, b \Leftrightarrow b']$. Это дает стационарную подгруппу точки $(0,0)$ из 12 членов (12 автоморфизмов ряда F_1). Таким образом, мы имеем 120 решений системы (1.3). Они были известны почти 100 лет назад [1].

2. 120 решений системы (1.3)

Для понимания сути дела нам необходимо выписать 60 решений:

$$U_1 = F_1\left[\begin{array}{l} a,[b,b'] \\ c \end{array}\middle| x,y\right],$$

$$U_2 = F_1\left[\begin{array}{l} a,[b,b'] \\ a-c+b+b'+1 \end{array}\middle| 1-x,1-y\right],$$

$$U_3 = x^{-b}y^{-b'}F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1,[b,b'] \\ b+b'-a+1 \end{array}\middle| \frac{1}{x},\frac{1}{y}\right],$$

[4]Дифференциальная форма ω называется точной, если $\omega = d\omega_1$.

$$U_4 = x^{b'-c+1}(1-x)^{c-a-1}(y-x)^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} 1-b, [a-c+1, b'] \\ b'-c+2 \end{array} \middle| \frac{x}{x-1}, \frac{x}{x-y}\right],$$

$$U_5 = y^{b-c+1}(1-y)^{c-a-1}(y-x)^{-b} F_1\left[\begin{array}{l} 1-b', [b, a-c+1] \\ b-c+2 \end{array} \middle| \frac{y}{y-x}, \frac{y}{y-1}\right],$$

$$U_6 = x^{b+b'-c}(1-x)^{c-a-b}(y-x)^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} 1-b, [c-b-b', b'] \\ c-a-b+1 \end{array} \middle| \frac{x-1}{x}, \frac{x-1}{x-y}\right],$$

$$U_7 = y^{b+b'-c}(1-y)^{c-a-b'}(y-x)^{-b} F_1\left[\begin{array}{l} 1-b', [b, c-b-b'] \\ c-a-b'+1 \end{array} \middle| \frac{y-1}{y-x}, \frac{y-1}{y}\right],$$

$$U_8 = x^{-a} F_1\left[\begin{array}{l} a, [a-c+1, b'] \\ a-b+1 \end{array} \middle| \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right],$$

$$U_9 = y^{-a} F_1\left[\begin{array}{l} a, [b, a-c+1] \\ a-b'+1 \end{array} \middle| \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right],$$

$$U_{10} = y^{b+b'-c}(1-y)^{c-a-1}(y-x)^{1-b-b'}$$

$$F_1\left[\begin{array}{l} 1-b', [c-b-b', a-c+1] \\ 2-b-b' \end{array} \middle| \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y-1}\right],$$

$$U_{11} = (1-x)^{-b}(1-y)^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} c-a, [b, b'] \\ c \end{array} \middle| \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right],$$

$$U_{12} = x^{-b} y^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1, [b, b'] \\ a-c+b+b'+1 \end{array} \middle| \frac{x-1}{x}, \frac{y-1}{y}\right],$$

$$U_{13} = (x-1)^{-b}(y-1)^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} c-a, [b, b'] \\ b+b'-a+1 \end{array} \middle| \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-y}\right],$$

$$U_{14} = x^{b'-c+1} y^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1, [a-c+1, b'] \\ b'-c+2 \end{array} \middle| x, \frac{x}{y}\right],$$

$$U_{15} = y^{b-c+1} x^{-b} F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1, [b, a-c+1] \\ b-c+2 \end{array} \middle| \frac{y}{x}, y\right],$$

$$U_{16} = (1-x)^{c-a-b}(1-y)^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} c-a, [c-b-b', b'] \\ c-a-b+1 \end{array} \middle| 1-x, \frac{x-1}{y-1}\right],$$

$$U_{17} = (1-y)^{c-a-b'}(1-x)^{-b} F_1\left[\begin{array}{l} c-a, [b, c-b-b'] \\ c-a-b'+1 \end{array} \middle| \frac{y-1}{x-1}, 1-y\right],$$

$$U_{18} = x^{b]-c+1}(1-x)^{c-a-1}(y-x)^{-b'} F_1\left[\begin{array}{l} 1-b, [a-c+1, b'] \\ a-b+1 \end{array} \middle| \frac{1}{1-x}, \frac{y}{y-x}\right],$$

$$U_{19} = y^{b-c+1}(1-y)^{c-a-1}(y-x)^{-b} F_1\left[\begin{array}{l} 1-b', [b, a-c+1] \\ a-b'+1 \end{array} \middle| \frac{x}{x-y}, \frac{1}{1-y}\right],$$

$$U_{20} = x^{b+b'-c}(1-x)^{c-a-1}(y-x)^{1-b-b'} \times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} 1-b, [c-b-b', a-c+1] \\ 2-b-b' \end{array} \middle| \frac{x-y}{x}, \frac{x-y}{x-1}\right],$$

$$U_{21} = (1-x)^{-a} F_1 \left[\begin{matrix} a, [c-b-b', b'] \\ c \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-1}, \frac{y-x}{1-x} \right],$$

$$U_{22} = x^{-a} F_1 \left[\begin{matrix} a, [a-c+1, b'] \\ a-c+b+b'+1 \end{matrix} \middle| \frac{x-1}{x}, \frac{x-y}{x} \right],$$

$$U_{23} = x^{-b} y^{-b'} (1-1/x)^{c-b-b'-1} F_1 \left[\begin{matrix} b+b'-c+1, [1-a, b'] \\ b+b'-a+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{1-x}, \frac{x-y}{y(x-1)} \right],$$

$$U_{24} = x^{b'-c+1} (1-x)^{c-a-b} (y-x)^{-b'} F_1 \left[\begin{matrix} 1-b, [1-a, b'] \\ b'-c+2 \end{matrix} \middle| x, \frac{x(y-1)}{y-x} \right],$$

$$U_{25} = y^{b-c+1} (1-y)^{c-a-1} (y-x)^{1-b-b'} x^{b'-1} \times$$

$$\times F_1 \left[\begin{matrix} 1-b', [1-a, a-c+1] \\ b-c+2 \end{matrix} \middle| \frac{y}{x}, \frac{y(x-1)}{x(y-1)} \right],$$

$$U_{26} = x^{b'-c+1} (1-x)^{c-a-b} (y-x)^{-b'} F_1 \left[\begin{matrix} 1-b, [1-a, b'] \\ c-a-b+1 \end{matrix} \middle| 1-x, \frac{y(x-1)}{x-y} \right],$$

$$U_{27} = y^{b+b'-c} (1-y)^{c-a-b'} (y-x)^{1-b-b'} (1-x)^{b'-1} \times$$

$$\times F_1 \left[\begin{matrix} 1-b', [1-a, c-b-b'] \\ c-a-b'+1 \end{matrix} \middle| \frac{y-1}{x-1}, \frac{x(y-1)}{y(x-1)} \right],$$

$$U_{28} = (1-x)^{-a} F_1 \left[\begin{matrix} a, [c-b-b', b'] \\ a-b+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{1-x}, \frac{y-1}{x-1} \right],$$

$$U_{29} = (y-x)^{-a} F_1 \left[\begin{matrix} a, [c-b-b', a-c+1] \\ a-b'+1 \end{matrix} \middle| \frac{x}{x-y}, \frac{x-1}{x-y} \right],$$

$$U_{30} = y^{b-c+1} (1-y)^{c-a-1} (y-x)^{1-b-b'} x^{b'-1} \times$$

$$\times F_1 \left[\begin{matrix} 1-b', [1-a, a-c+1] \\ 2-b-b' \end{matrix} \middle| \frac{x-y}{x}, \frac{x-y}{x(1-y)} \right],$$

$$U_{31} = (1-y)^{-a} F_1 \left[\begin{matrix} a, [b, c-b-b'] \\ c \end{matrix} \middle| \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1} \right],$$

$$U_{32} = y^{-a} F_1 \left[\begin{matrix} a, [b, a-c+1] \\ a-c+b+b'+1 \end{matrix} \middle| \frac{y-x}{y}, \frac{y-1}{y} \right],$$

$$U_{33} = x^{-b} y^{-b'} (1-1/y)^{c-b-b'-1} F_1 \left[\begin{matrix} b+b'-c+1, [b, 1-a] \\ b+b'-a+1 \end{matrix} \middle| \frac{y-x}{x(y-1)}, \frac{1}{1-y} \right],$$

$$U_{34} = x^{b'-c+1} (1-x)^{c-a-1} (y-x)^{1-b-b'} y^{b-1} \times$$

$$\times F_1 \left[\begin{matrix} 1-b, [a-c+1, 1-a] \\ b'-c+2 \end{matrix} \middle| \frac{x(y-1)}{y(x-1)}, \frac{x}{y} \right],$$

$$U_{35} = y^{b-c+1} (1-y)^{c-a-b'} (y-x)^{-b} F_1 \left[\begin{matrix} 1-b', [b, 1-a] \\ b-c+2 \end{matrix} \middle| \frac{y(x-1)}{x-y}, y \right],$$

$$U_{36} = x^{b+b'-c}(1-x)^{c-a-b}(y-x)^{1-b-b'}(1-y)^{b-1}\times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} 1-b,[c-b-b',1-a] \\ c-a-b+1 \end{array}\middle| \frac{y(x-1)}{x(y-1)}, \frac{x-1}{y-1}\right],$$

$$U_{37} = y^{b-c+1}(1-y)^{c-a-b'}(y-x)^{-b}F_1\left[\begin{array}{l} 1-b',[b,1-a] \\ c-a-b'+1 \end{array}\middle| \frac{x(y-1)}{y-x}, 1-y\right],$$

$$U_{38} = (y-x)^{-a}F_1\left[\begin{array}{l} a,[a-c+1,c-b-b'] \\ a-b+1 \end{array}\middle| \frac{y-1}{y-x}, \frac{y}{y-x}\right],$$

$$U_{39} = (1-y)^{-a}F_1\left[\begin{array}{l} a,[b,c-b-b'] \\ a-b'+1 \end{array}\middle| \frac{x-1}{y-1}, \frac{1}{1-y}\right],$$

$$U_{40} = y^{b+b'-c}(1-y)^{c-a-b'}(y-x)^{1-b-b'}(1-x)^{b'-1}\times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} 1-b',[c-b-b',1-a] \\ 2-b-b' \end{array}\middle| \frac{x-y}{y(x-1)}, \frac{x-y}{x-1}\right],$$

$$U_{41} = (1-x)^{c-a-b}(1-y)^{-b'}F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[c-b-b',b'] \\ c \end{array}\middle| x, \frac{x-y}{1-y}\right],$$

$$U_{42} = x^{b'-c+1}y^{-b'}F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1,[a-c+1,b'] \\ a-c+b+b'+1 \end{array}\middle| 1-x, \frac{y-x}{y}\right],$$

$$U_{43} = x^{a-c}(1-x)^{c-a-b}(1-y)^{-b'}F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[1-a,b'] \\ b+b'-a+1 \end{array}\middle| \frac{1}{x}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right],$$

$$U_{44} = x^{b'-c+1}(1-x)^{c-b-b'-1}y^{-b'}F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1,[1-a,b'] \\ b'-c+2 \end{array}\middle| \frac{x}{x-1}, \frac{x(y-1)}{y(x-1)}\right],$$

$$U_{45} = y^{b-c+1}(1-y)^{c-a+b'-1}(y-x)^{c-b-b'-1}x^{b'-c+1}\times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1,[1-a,a-c+1] \\ b-c+2 \end{array}\middle| \frac{y}{y-x}, \frac{y(x-1)}{x-y}\right],$$

$$U_{46} = x^{a-c}(1-x)^{c-a-b}(1-y)^{-b'}F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[1-a,b'] \\ c-a-b+1 \end{array}\middle| \frac{x-1}{x}, \frac{y(x-1)}{x(y-1)}\right],$$

$$U_{47} = y^{b+2b'-c}(1-y)^{c-a-b'}(y-x)^{a-c}(1-x)^{c-a-b}\times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[1-a,c-b-b'] \\ c-a-b'+1 \end{array}\middle| \frac{y-1}{y-x}, \frac{x(y-1)}{y-x}\right],$$

$$U_{48} = x^{b+b'-c}(1-x)^{c-a-b}(y-x)^{-b'}F_1\left[\begin{array}{l} 1-b,[c-b-b',b'] \\ a-b+1 \end{array}\middle| \frac{1}{x}, \frac{y-1}{y-x}\right],$$

$$U_{49} = y^{b+2b'-a-1}(1-y)^{-b'}(y-x)^{1-b-b'}F_1\left[\begin{array}{l} 1-b',[c-b-b',a-c+1] \\ a-b'+1 \end{array}\middle| \frac{x}{y}, \frac{x-1}{y-1}\right],$$

$$U_{50} = y^{b-1}(1-y)^{c-a-1+b'}(y-x)^{1-b-b'}x^{b'-c+1}(1-x)^{-b'}\times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} 1-b,[1-a,a-c+1] \\ 2-b-b' \end{array}\middle|\frac{y-x}{y},\frac{x-y}{y(x-1)}\right],$$

$$U_{51}=(1-x)^{-b}(1-y)^{c-b-b'}F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[b,c-b-b'] \\ c \end{array}\middle|\frac{x-y}{x-1},y\right]$$

$$U_{52}=y^{b-c+1}x^{-b}F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1,[b,a-c+1] \\ a-c+b+b'+1 \end{array}\middle|\frac{x-y}{x},1-y\right],$$

$$U_{53}=y^{-b'}(1-1/y)^{c-a-b'}(x-1)^{-b}F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[b,1-a] \\ b+b'-a+1 \end{array}\middle|\frac{x-y}{y(x-1)},\frac{1}{y}\right],$$

$$U_{54}=x^{b'-c+1}(1-x)^{c-a-1+b}(y-x)^{c-b-b'-1}y^{b-c+1}\times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1,[a-c+1,1-a] \\ b'-c+2 \end{array}\middle|\frac{x(y-1)}{y-x},\frac{x}{x-y}\right],$$

$$U_{55}=y^{b-c+1}(1-y)^{c-b-b'-1}x^{-b}F_1\left[\begin{array}{l} b+b'-c+1,[b,1-a] \\ b-c+2 \end{array}\middle|\frac{y(x-1)}{x(y-1)},\frac{y}{y-1}\right],$$

$$U_{56}=x^{2b+b'-c}(1-x)^{c-a-b}(1-y)^{c-a-b'}(y-x)^{a-c}\times$$

$$\times F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[c-b-b',1-a] \\ c-a-b+1 \end{array}\middle|\frac{y(x-1)}{x-y},\frac{x-1}{x-y)}\right],$$

$$U_{57}=y^{a-c}(1-y)^{c-a-b'}(1-x)^{-b}F_1\left[\begin{array}{l} c-a,[b,1-a] \\ c-a-b'+1 \end{array}\middle|\frac{x(y-1)}{y(x-1)},\frac{y-1}{y}\right],$$

$$U_{58}=x^{2b+b'-a-1}(1-x)^{-b}(y-x)^{1-b-b'}F_1\left[\begin{array}{l} 1-b,[a-c+1,c-b-b'] \\ a-b+1 \end{array}\middle|\frac{y-1}{x-1},\frac{y}{x}\right],$$

$$U_{59}=y^{b+b'-c}(1-y)^{c-a-b'}(y-x)^{-b}F_1\left[\begin{array}{l} 1-b',[b,c-b-b'] \\ a-b'+1 \end{array}\middle|\frac{x-1}{x-y},\frac{1}{y}\right],$$

$$U_{60}=y^{2b+b'-c}(1-y)^{b-1}(y-x)^{1-b-b'}(1-x)^{c-a-b}x^{-b}$$
$$F_1\left[\begin{array}{l} 1-b,[c-b-b',1-a] \\ 2-b-b' \end{array}\middle|\frac{x-y}{x(1-y)},\frac{x-y}{1-y}\right],$$

Вторая половина решений строится по формуле

$$U_{60+k}=U_k\Rightarrow\left\{F_1\left[\begin{array}{l} \alpha,[\beta,\beta'] \\ \gamma \end{array}\middle|\xi,\eta\right]\Rightarrow F_1\left[\begin{array}{l} \alpha,[\beta',\beta] \\ \gamma \end{array}\middle|\eta,\xi\right]\right\},\quad k=1\ldots60.$$

Здесь преобразование рассматривается как внешнее над U_k (см. ниже). Все 120 решений, рассматриваемые как двойные ряды, сходятся в бикруговых областях $|z_1|,|z_2|<1$, где z_1, z_2 — соответствующие аргументы решений. Первые 10 решений соответствуют следующим путям интегрирования:

$$U_1 \Leftrightarrow \int_0^1, \quad U_2 \Leftrightarrow \int_0^\infty, \quad U_3 \Leftrightarrow \int_1^\infty, \quad U_4 \Leftrightarrow \int_{1/x}^\infty, \quad U_5 \Leftrightarrow \int_{1/y}^\infty,$$
$$U_6 \Leftrightarrow \int_1^{1/x}, \quad U_7 \Leftrightarrow \int_1^{1/y}, \quad U_8 \Leftrightarrow \int_0^{1/x}, U_9 \Leftrightarrow \int_0^{1/y}, \quad U_{10} \Leftrightarrow \int_{1/x}^{1/y}, \tag{2.1}$$

Мы предлагаем далее не совсем стандартный подход. Риманова поверхность, на котрой следует рассматривать решения, имеет достаточно сложную структуру (произведение двух поверхностей с пятью точками ветвления на каждой плюс еще диагональное ветвление относительно поверхности $y = x$). Поэтому мы рассмотрим символическую проекцию пространства $\overline{C^2_{x,y}} \equiv \overline{C_x} \otimes \overline{C_y}$ на вещественную плоскость $R_{x,y}$, которую мы будем рассматривать как произведение двух проективных прямых $\overline{R_{x,y}} = \overline{R_x} \otimes \overline{R_y}$. Естественно полагать, что бесконечная точка проективной прямой $\overline{R_x}$ соответствует бесконечной точке комплексной плоскости $\overline{C_x}$. Таким образом, в отличие от классической проективной плоскости, имеющей одну бесконечную прямую, наша плоскость $\overline{R_{x,y}}$ имеет две бесконечных прямых $x = \infty$ и $y = \infty$. Теперь множество особых точек содержит 7 прямых:

Таблица 1

Множество особых точек

$L1$	$L2$	$L3$	$L4$	$L5$	$L6$	$L7$
$x = 0$	$x = 1$	$y = 0$	$y = 1$	$y = x$	$x = \infty$	$y = \infty$

На каждой особой прямой существуют три точки пересечения с другими особыми прямыми. Среди точек пересечения существуют три точки — $M_0[0,0]$, $M_1[1,1]$ и $M_\infty[\infty,\infty]$, в которых пересекаются 3 особые прямые. Обозначим множество, состоящее из указанных 7 прямых и 3 точек, через LM (всего 10 объектов!). Может показаться странным, что объединяются разнородные объекты. Однако это множество играет важнейшую роль в теории ряда Аппеля F_1. Просто преобразования аргументов в решениях[5] переставляют элементы множества LM. Поясним, что при отображении прямой в точку множество точек прямой превращается во множество направлений, выодяших из точки ("сдутие" прямой в точку). Обратно, при отображении точки на прямую направлениям,выходящим из точки, соответствуют точки прямой ("раздутие" окрестности). Отметим,что предлагаемая достаточно простая конструкция при всем ее примитивизме позволяет построить аналог схемы Римана для двойных рядов, принципиально отличающийся от классической схемы Римана(см. [4]).

Рассмотрим в качестве примера решение U_4, аргументы которого суть $\xi = x/(x-1)$, $\eta = x/(x-y)$. Цепочки переходов для U_4 следуюие:

$$L_1 \mapsto M_0 \mapsto L_1, \quad L_2 \mapsto L_6 \mapsto M_1 \mapsto M_\infty \mapsto L_2, \quad L_4 \mapsto L_5 \mapsto L_7 \mapsto L_3 \mapsto L_4$$

Отметим, что попутно вычисляется порядок элемента.

[5]В [4] на стр. 113 описка в таблице 1 — в столбце T_4 в 6-ом ряду вместо M_0 надо M_1

Таблица 2

Цепочки переходов для $U_1 \dots U_{10}$, (вместо L_k стоит k).

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
L_1	1	2	6	M_0	2	6	5	M_∞	1	2
L_2	2	1	2	6	5	M_0	2	2	5	4
L_3	3	4	7	4	M_0	5	7	3	M_∞	6
L_4	4	3	4	5	7	4	M_0	5	4	7
L_5	5	5	5	7	6	7	6	4	2	M_0
L_6	6	6	1	M_1	1	M_1	1	M_0	6	M_∞
L_7	7	7	3	3	M_1	3	M_1	7	M_0	M_1
M_0	M_0	M_1	M_∞	1	3	M_∞	M_∞	6	7	3
M_1	M_1	M_0	M_1	M_∞	M_∞	1	3	M_1	M_1	1
M_∞	M_∞	M_∞	M_0	2	4	2	4	1	3	5

Указанные преобразования принадлежат к группе квадратичных преобразований на проективной плоскости [3], изучаемых в алгебраической геометрии[6].

Каждое решение U_k можно рассматривать как преобразование на множестве решений. Следует отличать внутренние преобразования(когда преобразуются буквы (переменные и параметры) во всем решении, включая множители перед символом функции F_1 и внешние преобразования (когда преобразуются только аргументы функции F_1 (2 координатных и 3 параметрических аргумента). Мы рассматриваем здесь только внешние преобразования. Обозначим через T_k преобразование $U_1 \mapsto U_k$. Нетрудно убедиться, что $U_{10k+j} = T_{10k+1}(U_j)$, $0 \leqslant k \leqslant 11$, $1 \leqslant j \leqslant 10$. Эта формула использовалась при построении решений.

Группа преобразований содержит 20 циклических подгрупп 6 порядка, 24 — 5 порядка, 30 — 4 порядка, 20 — 3 порядка, 25 — 2 порядка, 1 — 1 порядка.

Таблица 3

Суперпозиция преобразований $F_1 \dots F_{12}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	12	18	19	48	59	22	32	49	13	3
3	13	1	22	32	21	31	14	15	98	12	11
4	6	18	41	118	42	58	13	64	52	24	26
5	7	19	109	51	49	52	65	13	111	35	37
6	4	26	43	94	23	96	16	20	114	48	18
7	5	37	85	53	87	33	70	17	56	59	19
8	28	14	6	10	4	70	1	68	5	46	44
9	39	15	80	7	20	5	69	1	67	57	55
10	70	30	27	116	25	114	67	16	113	40	90
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1	2
12	11	2	8	9	28	39	42	52	29	3	13

Например, $T_4(U_5) = U_{118}$ или $T_4 \circ T_5 = T_{118}$.

Важную роль играют решения U_{10k+1}, $k = 0, \dots, 11$. Они образуют 12 автоморфизмов основного ряда F_1 и как преобразования составляют стационарную подгруппу точки $M_0(0,0)$. Итак, $U_1 \equiv U_{11} \equiv U_{21} \equiv \dots \equiv U_{111}$. Аналогично, $U_2 \equiv U_{12} \equiv U_{22} \equiv \cdots \equiv U_{112}$(стационарная погруппа точки M_1). В этих равенствах предполагается, что степени x и y принимают вещественные значения. Так-

[6] Не путать с квадратичными преобразованиями гипергеометрической функции — различие принципиальное.

же $U_3 \equiv U_{13} \equiv U_{23} \equiv \cdots \equiv U_{113}$ (Стационарная подгруппа точки M_∞). И здесь все множители должны принимать вещественные значения, а точку (x, y) желательно брать в первом квадранте $x > 0, y > 0$. В точках M_0 и M_1 соответствующие ряды имеют общую область сходимости.

Естественно предполагать, что каждое из решений $U_4, \ldots, U_{10}$ также имеет 12 автоморфизмов. Вообще говоря,это так. Однако наличие точек ветвления добавляет некоторые нюансы в эту картину. Рассмотрим,например, решения U_4 и U_{34}. Ряды обоих решений сходятся в окрестности точек прямой $x = 0$ (исключая окрестности точек M_0 и M_1), но сами решения имеют точку ветвления на прямой $x = 0$. При этом вблизи прямой сходимости $U_4 \approx U_{34} \approx x^{b'-c+1}y^{-b'}$, если выходить на прямую $x = 0$ на интервале $0 < x < 1$ из первого квадранта $x, y > 0$. Так как оба решения получаются из одного и того же комплексного интеграла с помощью дробно-линейных преобразовний переменной интегрирования, то, следовательно, $U_4 \equiv U_{34}$ (при указанных ограничениях). Короче говоря, при манипулированиями различными решениями следует обращать внимание на возможное появление комплексных множителей. Если используются 2 из 12 представлений одного решения, то однозначные ветви множителей следует выбирать так, чтобы соответствующие решения совпадали в общей области сходимости соответствующих рядов.

Таблица 4

Характеристики решений $U_4 \ldots U_{10}$. Каждому решению U_k соответствует прямая сходимости L_k. В нижней строке — множитель ветвления у решения U_k, соответствующий прямой L_k.

U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}
L_1	L_3	L_2	L_4	L_6	L_7	L_5
$x^{b'-c+1}$	y^{b-c+1}	$(1-x)^{c-a-b}$	$(1-y)^{c-a-b'}$	x^{-a}	y^{-a}	$(y-x)^{1-b-b'}$

Таблицы 1–4 отражают основные характеристики решения.

3. Аналитическое продолжение ряда F_1

Наличие одномерного интегрального представления (1.2) позволяет найти формулы аналитического продолжения. Для треугольника $\Gamma = [0, 1/x, 1/y]$ на комплексной плоскости и дифференциальной формы из (1.4) можно записать интегральную формулу Коши:

$$0 = \oint_\Gamma \omega = \int_0^{1/x} \omega + \int_{1/x}^{1/y} \omega + \int_{1/y}^{0} \omega. \tag{3.1}$$

Полученное равенство есть соотношение между тремя решениями и справедлива

Теорема 4. Любые 3 решения из 10 линейно независимы при комплексных значениях аргументов. Всего существует 10 соотношений, подобных (3.1).

К сожалению, практическая польза от этой теоремы ничтожна, так как при переходе к вещественным значениям x и y треугольник $[0, 1/x, 1/y]$ сплющивается, а само равенство становится тривиальным.

Пусть теперь x и y вещественны и $0 < x < y < 1$, а дифференциальная форма ω принимает вещественные значения при $0 < t < 1$. Используя интегральную теорему

Коши для верхней полуплоскости, получаем тождество[7]:

$$0 = -e^{\pi i a} I_1 + I_2 - e^{\pi i(-c+a)} I_3 - e^{\pi i(-c+a+b')} I_4 - e^{\pi i(-c+a+b+b')} I_5,$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} |\omega|, \qquad I_2 = \int_{0}^{1} |\omega|, \qquad I_3 = \int_{1}^{1/y} |\omega|, \qquad I_4 = \int_{1/y}^{1/x} |\omega|, \qquad I_5 = \int_{1/x}^{\infty} |\omega|.$$

Выделяя вещественную и мнимую части,получим 2 соотношения; далее, исключая I_4, имеем:

$$I_2 = \frac{-\sin[\pi(c-b')]I_1 + \sin(\pi b')I_3 - \sin(\pi b)I_5}{\sin[\pi(-c+a+b')]}. \tag{3.2}$$

Выразим интегралы I_k через соответствующие решения, выбирая любое из 12 представлений для каждого решения. Имеем:

$$I_2 = p_1 U_1, \quad I_1 = p_2 U_1, \quad I_3 = p_{17} U_{17}, \quad I_5 = p_{14} U_{14}, \quad \text{где} \quad p_2 = \Gamma\begin{bmatrix} a, b+b'-c+1 \\ a-c+b+b'+1 \end{bmatrix},$$

$$p_1 = \Gamma\begin{bmatrix} a, c-a \\ c \end{bmatrix}, \; p_{14} = \Gamma\begin{bmatrix} b+b'-c+1, 1-b \\ b'-c+2 \end{bmatrix}, \; p_{17} = \Gamma\begin{bmatrix} c-a, 1-b' \\ c-a-b'+1 \end{bmatrix}.$$

Итак, формула аналитического продолжения получена:

$$U_1 = \frac{-\sin[\pi(c-b')]p_2 U_2 + \sin(\pi b')p_{17} U_{17} - \sin(\pi b)p_{14} U_{14}}{p_1 \sin[\pi(-c+a+b')]}, \quad 0 < x < y < 1.$$

Для получения других формул аналитического продолжения необходимо повторить вычисления в следующих случаях:

$$[1 < x < y], \quad [x < y < 0], \quad [x < 0 < y < 1], \quad [0 < x < 1 < y], \quad [x < 0 < 1 < y].$$

Аналогичные 6 случаев возникают при $y < x$. Это дает уже 12 формул. В каждой из формул можно брать различные представления каждого решения (правда, не все 12 ввиду расходимости некоторых рядов, но, как правило, 3 или 4 находятся). Всего получается $12 \cdot 3^4/4! \approx 40$ формул. Повторное применение аналитического продолжения проблематично, поскольку придется продолжать одновременно уже 3 решения, но не исключено, что это возможно. Если обращаться к интегральным представлениям решений, то области допустимых значений аргументов значительно расширяются.

Литература

[1] Appell, Paul Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite / Paul Appell, Kampe de Feriet // M.J. –Gautchier-Villars, 1926

[2] Бэйтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 3, Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье / Г. Бэйтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1967. – 300 с.

[3] Голубева, В.А. Гипергеометрические функции двух переменных Аппеля и Кампе де Ферье / В.А. Голубева // Сиб. мат. журн. – 1979. – Т. 20. – №5. – С. 997–1014.

[7] Разумеется, для существования интегралов требуются ограничения на параметры, коиорые могут быть выполнены.

[4] Чиханов, Х.А. Двойной ряд Аппеля F_1 , разрешение особенностей и схема Римана / Х.А. Чиханов //Аналитические методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. – Куйбышев: Изд-во. – Куйбышевского гос. ун-та, 1990. – С. 107-124.
[5] Чиханов, Х.А. Преобразование Ландена обобщенных эллиптических функций Якоби и ряды Аппеля / Х.А. Чиханов // Вестник Самарского госуниверситета. – 2003, Второй спец. выпуск. – С. 49–57.
[6] Чиханов, Х.А. Гипергеометрические ряды и фуксовы системы / Х.А. Чиханов // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – №10. – С. 1727–1730.

Поступила в редакцию 28/*II*/2008;
в окончательном варианте — 28/*II*/2008.

ANALYTICAL CONTINUATION OF THE APPEL ROW F_1[8]

© 2008 Ch.A. Chikanov[9]

In the paper the problem of analytical continuation of the Appel row F_1 is studied.

Paper received 28/*II*/2008.
Paper accepted 28/*II*/2008.

[8] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.
[9] Chikanov Chamit Alexandrovich, Dept. of Partial Differential Equation, Samara State University, Samara, 443011, Russia.