УДК 512.572

РАЗРЕШИМЫЕ ТЕРНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ И ТЕРНАРНЫЕ ДЕРЕВЬЯ[1]

© 2008 А.Д. Уадилова[2]

Основным объектом изучения являются тернарные алгебры, т.е. алгебры с трилинейной операцией. В этом классе изучаются конечно порожденные алгебры, а также рост коразмерностей многообразий абсолютно свободных алгебр, свободных симметричных алгебр, свободных кососимметричных алгебр и некоторых других. Для этих целей используются обычные производящие функции, а также экспоненциальные производящие функции (функции сложности).

В рассматриваемых классах изучаются разрешимые и вполне разрешимые алгебры и многообразия. Полученные результаты эквивалентны перечислению тернарных деревьев, которые не содержат некоторых запрещенных поддеревьев.

1. Предварительные замечания

Пусть K — основное поле. Пусть L — алгебра с полилинейной *тернарной* операцией; т.е. для любых $a, b, c \in L$ определен элемент $d = (a, b, c) \in L$ и d полилинейно зависит от a, b, c. Пусть $\mathfrak{W}_0$ — класс всех тернарных алгебр.

Тернарную алгебру L назовем *симметричной*, если выполняется тождество $(a_1, a_2, a_3) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$, где $a_1, a_2, a_3 \in L$ и $\sigma \in S_3$. Класс симметричных тернарных алгебр обозначим $\mathfrak{W}_1$.

Алгебру L с тернарной операцией назовем *кососимметричной*, если выполняется тождество $(a_1, a_2, a_3) = (-1)^{\sigma}(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$, где $a_1, a_2, a_3 \in L$ и $\sigma \in S_3$. Пусть $\mathfrak{W}_2$ — класс всех кососимметричных алгебр.

Тернарную алгебру L назовем *циклической*, если выполняется тождество $(a, b, c) = (b, c, a)$, $a, b, c \in L$. Обозначим через $\mathfrak{W}_3$ класс таких алгебр.

Двудольная тернарная алгебра L задается тождеством "перестановки крайних членов": $(a, b, c) = (c, b, a)$, $a, b, c \in L$. Пусть $\mathfrak{W}_4$ — класс всех таких алгебр.

Далее используем обозначение $\mathfrak{W}_\delta$, где $\delta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Пусть $F = F(\mathfrak{W}_\delta, X)$ — свободная алгебра многообразия тернарных δ-алгебр, порожденная множеством $X = \{x_1, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ (см. определение и свойства многообразий алгебр в [1]). По индукции определим "δ-регулярные" слова. Слово длины 1 (т.е. элементы алфавита $X = \{x_1, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$) назовем δ-*регулярным*. Предположим, что δ-регулярные слова длины меньше n ($n > 1$) уже определены и вполне

[1] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00739-а).

[2] Уадилова Айгуль Дюсенбековна (uadilovaad@rambler.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432970, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

упорядочены. Тогда слово ω длины n назовем δ-*регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) Слово $\omega = (u, v, w)$ представимо как результат тернарной операции, аргументами которой выступают слова u, v, w меньшей длины.
2) Предположим дополнительно, что
   - $u \geqslant v \geqslant w$ в случае $\delta = 1$;
   - $u > v > w$ в случае $\delta = 2$;
   - $u \geqslant \max\{v, w\}$, причем в случае равенства предполагаем $u = v \geqslant w$, в случае $\delta = 3$;
   - $u \geqslant w$ в случае $\delta = 4$.

Продолжим порядок произвольным образом на все δ-регулярные слова длины n.

Для произвольного многообразия тернарных алгебр $\mathfrak{V}$ через $F(\mathfrak{V}, X)$ будем обозначать его свободную алгебру, порожденную множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Если $|X| = s$, то получаем относительно свободную алгебру *ранга* s, которую будем обозначать также $F(\mathfrak{V}, s)$.

Пусть V — многообразие линейных алгебр, $F(V, X)$ — его свободная алгебра, порожденная счетным множеством элементов (свободных порождающих) $X = \{x_i | i \in \mathbf{N}\}$. Обозначим через $P_n(V) \subset F(V, X)$ подпространство всех полилинейных элементов степени n на множестве $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и рассмотрим размерность этого подпространства над полем K

$$c_n(V) = c_n\left(F(V, X), X\right) = \dim_K P_n(V), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Возникает *последовательность коразмерностей* $c_n(V)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, которая является важной характеристикой многообразия V (см. аналогичную последовательность для ассоциативных алгебр в [2] и для алгебр Ли в [3]).

Рассмотрим свободную алгебру A конечного ранга, она является градуированной ($A = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} A_n$). Определяем *ряд Гильберта–Пуанкаре* $\mathcal{H}(A, t)$ как производящую функцию:

$$\mathcal{H}(A, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \text{ где } a_n = \dim_K A_n.$$

Ю.П. Размыслов предложил также рассматривать для многообразия алгебр Ли так называемую *функцию сложности* [4]. Определим функцию сложности для многообразия V как

$$C(V, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(V)}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Это пример *экспоненциальной производящей функции*, которая широко используется в комбинаторике (см. [5]). В. Дренски начал использовать такие функции для многообразий алгебр, а именно он вычислил их для некоторых ассоциативных многообразий [2].

Нам необходимо понятие функции сложности в более общем случае (по аналогии с [6, 7]). Пусть имеется алгебра, порожденная счетным множеством $X = \{x_i | i \in \mathbf{N}\}$, и предположим, что A — подпространство в алгебре.

Для любого набора $Y = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\} \subset X$ различных элементов через $P_n(A, V)$ обозначим линейную оболочку (множество) всех полилинейных элементов степени

n от Y в A. Допустим, что размерность этой линейной оболочки (число элементов) $c_n(A, Y)$ не зависит от выбора Y, а зависит только от n. Тогда обозначим $c_n = c_n(A, Y)$; в этом случае будем говорить, что для A определена *функция сложности* относительно множества X, которую зададим следующим образом:

$$C_X(A, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Следующая лемма применяется для работы с функцией сложности.

Лемма 1.1.

Пусть G — алгебра с тернарной операцией $(*, *, *)$, порожденная множеством $X = \{x_i | i \in \mathbf{N}\}$. Допустим, что для подпространств $A, B, C \subset G$ определены функции сложности.

1) Пусть $D = A \bigoplus B$ — прямая сумма. Тогда для D определена функция сложности относительно X и $C(D, z) = C(A, z) + C(B, z)$.

2) Пусть множество $(A, B, C) \subset G$ естественным образом изоморфно тензорному произведению векторных пространств $A \otimes B \otimes C$. Тогда $D = (A, B, C)$ обладает функцией сложности, причем $C(D, z) = C(A, z)C(B, z)C(C, z)$.

Доказательство. Пункт (1) рассматриваемой леммы вытекает из определения.

Пункт (2) вытекает из соотношения

$$c_n(D) = c_n((A, B, C)) = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} c_i(A)c_j(B)c_k(C) = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i, j, k} c_i(A)c_j(B)c_k(C),$$

Элементы суммы соответствуют всевозможным разбиениям множества $\{x_i, \cdots, x_n\}$ на три подмножества. Отсюда и вытекает соотношение для рядов.

Далее функции сложности будут использоваться также для перечисления множеств базисных мономов (по аналогии с [6]).

Лемма 1.2.

Все δ-регулярные слова образуют базис свободной тернарной δ-алгебры $F(\mathfrak{W}_\delta, X)$ для всех $\delta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Доказательство. Понятно, что линейная оболочка всех δ-регулярных слов есть в точности соответствующая тернарная δ-алгебра. Осталось показать, что δ-регулярные слова линейно независимы. В случае $\delta = 0$ это очевидно. В случае $\delta = 1, 2, 3, 4$ линейная независимость следует из вполне упорядоченности слов (с использованием условия (2) определения δ-регулярных слов).

Будем интерпретировать элементы построенного базиса как тернарное дерево. Например, элементу $\omega = (((x_1, x_2, x_3), x_4, x_5), x_6, (x_7, x_8, x_9))$, где $x_1, \ldots, x_9 \in X$, сопоставим следующее тернарное дерево (рис. 1):

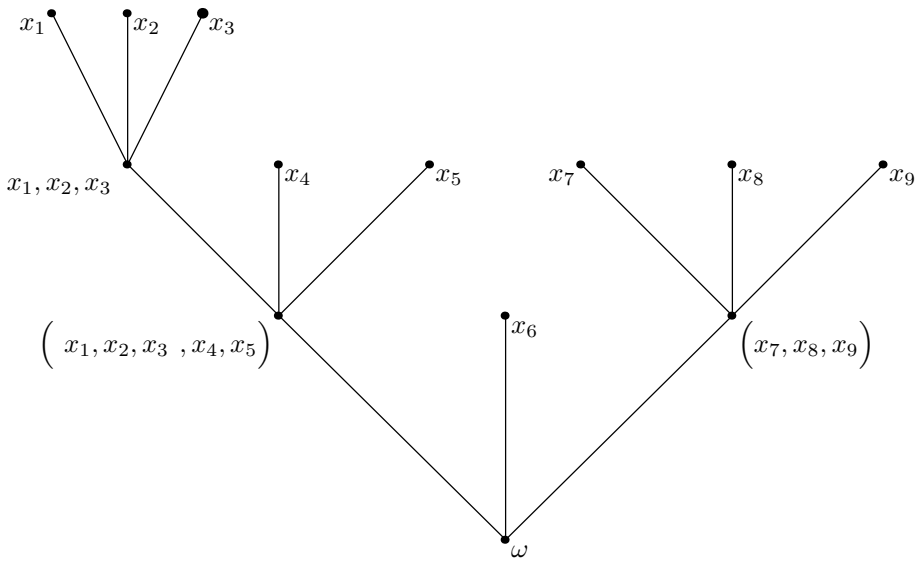

Рис. 1. Тернарное дерево слова $\omega = \Big(\big((x_1, x_2, x_3), x_4, x_5\big), x_6, \big(x_7, x_8, x_9\big)\Big)$

У такого дерева зафиксирован корень, т.е. дерево является *корневым*. Остальные концевые вершины будем называть *листьями*, при этом мы считаем, что у дерева из одной вершины корень совпадает с единственным листом. Если расположение поддеревьев на плоскости существенно, то деревья называем *плоскими*, иначе — *пространственными*. Дерево назовем *помеченным*, если каждому листу сопоставлен элемент некоторого множества X, это однозначно задает метки мономами для остальных вершин. Рассмотренное выше дерево является помеченным.

Рассматриваем только *тернарные* деревья, т.е. у неконцевой вершины кроме ребра, идущего вниз, есть ровно три ребра вверх, задающих три поддерева.

Каждый базисный моном δ-алгебры интерпретируем как некоторое помеченное дерево. Таким образом, каждой δ-алгебре можно сопоставить некоторые помеченные деревья в соответствии с базисом.

В терминах тернарных деревьев функции сложности δ-многообразий $\mathfrak{W}_\delta$, $\delta \in \{0, 1, \ldots, 4\}$ перечисляют все корневые тернарные деревья соответствующих пяти типов, листья которых отмечены различными элементами счетного множества $X = \{x_i |\ i \in \mathbf{N}\}$.

2. Понятие разрешимости и запретные поддеревья

В настоящем параграфе мы даем определения разрешимости и вполне разрешимости для тернарных алгебр и описываем деревья соответствующих алгебр в терминах запрещенных поддеревьев.

Определим понятие *разрешимости* для δ-алгебр. Определим рекуррентно мономы: $S_0(X_1) = X_1$ и для $q > 0$ положим

$$S_{q+1}(X_1, \ldots, X_{3^{q+1}}) = \Big(S_q(X_1, \ldots, X_{3^q}), S_q(X_{3^q+1}, \ldots, X_{2\cdot 3^q}), S_q(X_{2\cdot 3^q+1}, \ldots, X_{3^{q+1}})\Big).$$

Назовем δ-алгебру *разрешимой ступени* q, если она удовлетворяет тождеству $S_q(X_1, \ldots, X_{3^q}) \equiv 0$. Многообразие δ-алгебр, разрешимых ступени q, обозначим как $\mathfrak{A}_\delta^q$.

Пусть δ-алгебра L является разрешимой ступени 1. Тогда $(a, b, c) \equiv 0$. Такую

δ-алгебру назовем *абелевой*. Разрешимую ступени 2 алгебру называем *метабелевой*.

Определим ряд *коммутантов* для тернарной δ-алгебры L: $L^{(0)} = L$ и $L^{(i+1)} = \langle (L^{(i)}, L^{(i)}, L^{(i)}) \rangle_K$ для $i \geqslant 1$.

Лемма 2.1.
$L^{(q)}$ — подалгебра и $L^{(q)} = \langle S_q(u_1, u_2, \ldots, u_{3^q}) \mid u_i \in L \rangle_K$, для всех $q \geqslant 0$.

Доказательство. По индукции.

Следствие 2.1.1. Разрешимость ступени q эквивалентна условию $L^{(q)} = 0$.

Лемма 2.2.
Следующие утверждения эквивалентны:

1) Алгебра L разрешима ступени q.

2) Верно равенство $L^{(q)} = 0$.

3) Существует цепочка подалгебр

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \ldots \supseteq L_q = 0, \tag{2.1}$$

где $L_i \triangleleft L_{i-1}$ и $L_{i-1}\big/L_i$ — абелева для всех $i = 1, \ldots, q$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) вытекает из леммы 2.1. Докажем эквивалентность условий (2) и (3). Покажем сначала, что условие (3) влечет равенство $L^{(q)} = 0$. Итак, существует некоторая цепочка подалгебр, которая является убывающей, и $L_q = 0$. По индукции докажем, что $L^{(s)} \subseteq L_s$ для $s = 0, \ldots, q$.

База индукции: $L = L^{(0)} \subseteq L_0 = L$. Предположение индукции: $\forall\ s \leqslant q-1$ верно, что $L^{(s)} \subseteq L_s$. Шаг индукции: $L^{(q)} = \langle (L^{(q-1)}, L^{(q-1)}, L^{(q-1)}) \rangle_K$, по условию цепочка подалгебр убывающая, т.е. $L_q \subseteq L_{q-1}$, причем $L_q \triangleleft L_{q-1}$ и $L_{q-1}\big/L^q$ — абелева. Но по предположению индукции $L^{(q-1)} \subseteq L_{q-1}$ и в силу абелевости фактор-алгебры $L_{q-1}\big/L^q$ получаем, что $L^{(q)} \subseteq L_q = 0$, т.е. $L^{(q)} = 0$.

Обратно, цепочка коммутантов является искомой цепочкой вида (2.1).

Заметим, что подалгебры $L^{(i)}$ могут и не быть идеалами для L. Возьмем некоторую подалгебру $H \subset L$ и обозначим через $Id_L(H)$ — идеал в L, порожденный подалгеброй H.

Назовем δ-алгебру L *вполне разрешимой ступени* q, если существует цепочка (2.1), элементы которой являются идеалами в L. Определим ряд *пополненных коммутантов*: $L^{[0]} = L$ и для $i \geqslant 1$ $L^{[i+1]} = Id_L((L^{[i]}, L^{[i]}, L^{[i]}))$.

Лемма 2.3.
Следующие условия эквивалентны:

1) Выполняется условие $L^{[q]} = 0$.

2) L вполне разрешима ступени q.

Доказательство. Если $L^{[q]} = 0$, то существует цепочка вида (2.1) а именно, ее элементы являются пополненными коммутантами, т.е. по определению алгебра L является вполне разрешимой ступени q.

Теперь докажем обратное утверждение. По определению вполне разрешимости существует цепочка вида (2.1), причем подалгебры $L_i, i \in \{\overline{0, \ldots, q}\}$ являются идеалами алгебры L. По индукции докажем, что $L^{[s]} \subseteq L_s \forall\ s = \overline{0, q}$.

База индукции: $L = L^{[0]} \subseteq L_0 = L$. Предположение индукции: $\forall\ s \leqslant m-1$ верно, что $L^{[s]} \subseteq L_s$. Шаг индукции: рассмотрим $L^{[m]} = Id_L\left((L^{[m-1]}, L^{[m-1]}, L^{[m-1]})\right)$. По

предположению индукции $L^{[m-1]} \subseteq L_{m-1}$ имеет $(L_{m-1}, L_{m-1}, L_{m-1}) \subseteq L_m$, т.к. $L_{m-1}\Big/L^m$ абелева. Далее, $Id_L(L_{m-1}, L_{m-1}, L_{m-1}) \subseteq L_m$, так как по условию L_m — идеал в L. Получаем шаг индукции: $L^{[m]} \subseteq L_m$. Получаем $L^{[q]} \subseteq L_q = 0$.

Класс всех вполне разрешимых δ-алгебр обозначим как $\mathfrak{S}_\delta^q$.

Введем такое понятие, как *полное тернарное дерево высоты* q. Будем обозначать его T^q. Вместо формального определения изобразим полное тернарное дерево высоты 3 (рис. 2).

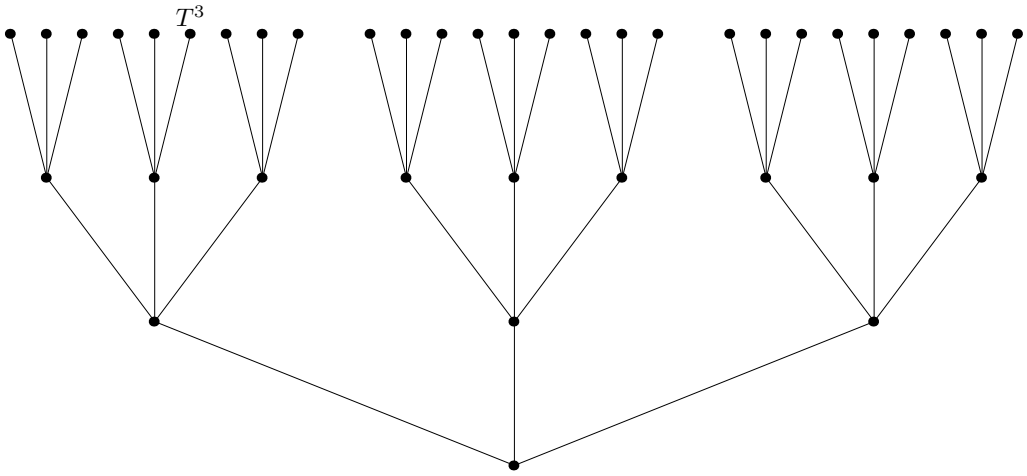

Рис. 2. Полное тернарное дерево T^3 высоты 3

Определим *редукцию* тернарных деревьев следующим образом: зафиксируем вершину, отличную от листа, обрезаем две возрастающие ветви и рисуем одну линию вместо трех исходных ветвей, которые выходят из этой вершины, таким образом удаляя вершину.

Например, рассмотрим тернарное дерево (рис. 3) и удалим, например, вершину μ при помощи редукции (рис. 4).

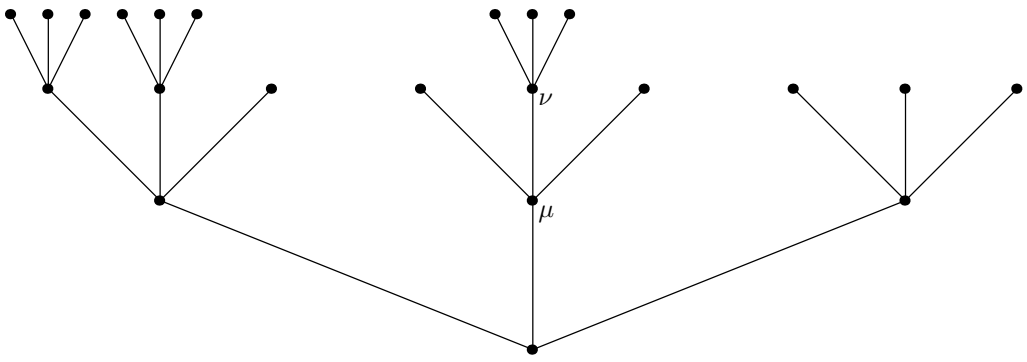

Рис. 3. Тернарное дерево (с обозначенными вершинами μ) и ν

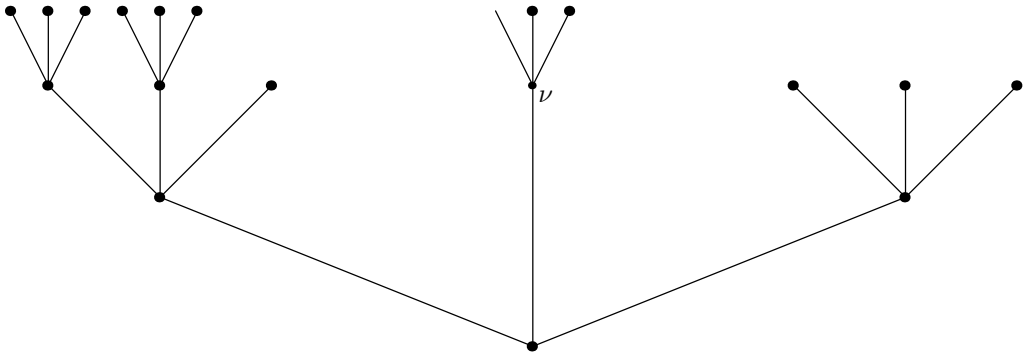

Рис. 4. Тернарное дерево с удаленной вершиной μ

Редукцию можно продолжить. Удалим, например, вершину ν (рис. 5):

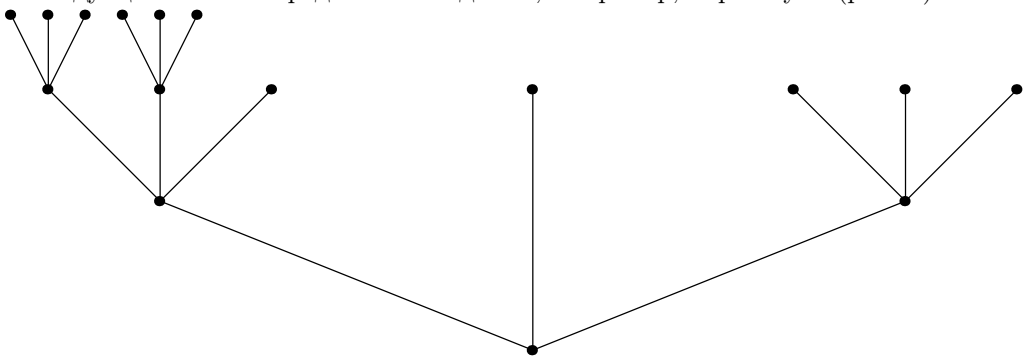

Рис. 5. Тернарное дерево с удаленными вершинами μ и ν

Корневое поддерево — это поддерево, обладающее тем же корнем, что и само дерево.

Теорема 2.1.
Верны два следующих утверждения:

1) Все δ-регулярные мономы, деревья которых не содержат полные тернарные поддеревья T^q, образуют базис свободной разрешимой δ-алгебры $F(\mathfrak{A}^q_\delta, X)$ ступени q.

2) Базис вполне разрешимой δ-алгебры $F(\mathfrak{S}^q_\delta, X)$ ступени q образуют δ-регулярные мономы, деревья которых не содержат полные тернарные поддеревья T^q высоты q после произвольного числа редукций.

Доказательство. Докажем сначала первый пункт леммы. Рассмотрим $F = F(\mathfrak{W}_\delta, X)$ — свободную δ-алгебру. Проверим индукцией по $q = 0, 1, \ldots$, что деревья базисных мономов в коммутантах $F^{(q)}$ содержат T^q как *корневое поддерево*.

База индукции ($q = 0$): T^0 — дерево, состоящее из одной вершины, содержится во всех мономах $F^{(0)} = F$ как корневое поддерево. Индуктивное предположение: пусть для всех $m < q$ поддерево T^m содержится в мономах $F^{(m)}$ как корневое. Шаг индукции: по определению $F^{(q)} = \langle (F^{(q-1)}, F^{(q-1)}, F^{(q-1)}) \rangle_K$. По предположению индукции $F^{(q-1)}$ содержит корневое поддерево T^{q-1}. Тогда понятно, что $F^{(q)}$ содержит T^q (по построению тернарных деревьев) как корневое поддерево.

Шаг индукции сделан.

Тогда идеал $I = Id_F(F^{(q)})$ "натянут" на регулярные мономы, деревья которых содержат T^q как поддерево, не обязательно корневое.

С другой стороны, любой моном, дерево которого содержит T^q, принадлежит идеалу I. Так как $F(\mathfrak{A}^q_\delta, X) \cong F\big/I$, то базис алгебры $F(\mathfrak{A}^q_\delta, X)$ образован δ-регулярными мономами, деревья которых не содержат T^q.

Утверждение (1) доказано.

Второй пункт леммы докажем следующим образом. Сначала докажем индукцией по $q = 0, 1, \ldots$, что деревья базисных мономов в пополненных коммутантах $F^{[q]}$ содержат T^q как *корневое поддерево* после некоторого числа редукций.

База индукции ($q = 0$): T^0, дерево, состоящее из одной вершины — содержится в $F^{[0]} = F$ как корневое поддерево (даже без редукций), т.е. случай тривиален.

Индуктивное предположение: пусть $\forall\, m \leqslant q$ базисный моном из $F^{[m]}$ содержит поддерево T^m после некоторого числа редукций (для каждого монома это число свое).

Шаг индукции: рассмотрим произвольный моном $\tilde{u} = (u, v, w)$, где мономы $u, v, w \in F^{[q]}$. По предположению индукции, каждый из мономов u, v, w содержит некоторое поддерево T^q после нескольких редукций. Рассмотрим ветви, соединяющие их корни с корнем $\tilde{u}$, и обратим эти ветви в ребра, используя редукции. Следовательно, после нескольких редукций моном $\tilde{u}$ содержит корневое поддерево T^{q+1}. Образуем идеал $F^{[q+1]} = Id_F((F^{[q]}, F^{[q]}, F^{[q]}))$. В нем также содержится T^{q+1} после некоторого числа редукций, т. е. шаг индукции доказан.

Докажем индукцией по $q \in \mathbf{N}_0$ обратное утверждение: если моном $\tilde{u}$ содержит T^q после некоторого числа редукций, то $\tilde{u} \in F^{[q]}$.

База индукции ($q = 0$): тривиально. Индуктивное предположение: пусть $\forall\, m \leqslant q$ моном $\tilde{u}$, содержащий поддерево T^m после некоторого числа редукций, является элементом $F^{[m]}$. Шаг индукции: корень полного дерева T^q — это корень поддерева некоторого подмонома v монома $\tilde{u}$. Пусть $v = (v_1, v_2, v_3)$. Тогда v_1, v_2, v_3 содержат после некоторого числа редукций T^{q-1}. По индуктивному предположению, в этом случае $v_1, v_2, v_3 \in F^{[q-1]}$. Но тогда $v = (v_1, v_2, v_3) \in F^{[q]}$. Т.к. v — подмоном $\tilde{u}$, то $\tilde{u} \in F^{[q]}$. Шаг индукции сделан. Обратное утверждение доказано.

Имеем $F(\mathfrak{S}^q_\delta, X) \cong F\big/F^{[q]}$. Из этого следует, что все δ-правильные подмономы не содержат T^q после произвольного числа редукций, т.е. утверждение (2) леммы доказано.

3. Производящие функции разрешимых алгебр

Сначала изучим *вполне разрешимые* алгебры. С этой целью сконструируем специальный базис свободной δ-алгебры $F = F(\mathfrak{W}_\delta, X)$, где $\delta = 0, 1, \ldots, 4$. Построим множество $\mathcal{R} = \mathcal{R}(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n(X)$ вместе с *весовой функцией* $\omega : \mathcal{R}(X) \to \mathbf{N}$. Положим $\mathcal{R}_1(X) = X$ и $\omega(X) = 1$; зафиксируем произвольный порядок на $\mathcal{R}_1$. Предположим, что $\mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_{n-1}$ уже построены и вполне упорядочены. Пусть $u \in \mathcal{R}_i, v \in \mathcal{R}_j, w \in \mathcal{R}_l$, причем $1 \leqslant i, j, l < n$ и $i + j + l = n$. Рассмотрим элемент $\tilde{u} = (u, v, w) \in \mathcal{R}_n$, где дополнительно выполняется условие (2) определения δ-регулярных мономов в случае $\delta = 1, 2, 3, 4$. *Функцию веса* определяем так:

$$\omega(\tilde{u}) = \begin{cases} \omega(u) + 1, & \omega(u) = \omega(v) = \omega(w); \\ \max\{\omega(u), \omega(v), \omega(w)\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расширим линейный порядок на $\mathcal{R}_1 \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{R}_n$ следующим образом: сначала мономы упорядочим по своим функциям веса, потом — по общей длине, и далее мономы упорядочены лексикографически в $\tilde{u} = (u, v, w)$. Тогда $\mathcal{R}(X)$ есть базис для $F = F(\mathfrak{W}_\delta, X)$ по лемме 1.2.

Разобьем этот базис в соответствии с функцией веса на компоненты $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^n(X) = \{u \in \mathcal{R}(X) | \, \omega(u) = n\}$, и тогда $\mathcal{R}(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n(X)$. Заметим, что $\mathcal{R}^1 = X$.

Лемма 3.1.

Предположим, что $F = F(\mathfrak{W}_\delta, X)$. Зафиксируем $s \geqslant 0$. Тогда

1) $\bigcup\limits_{n=s+1}^{\infty} \mathcal{R}_n(X)$ — базис пополненного коммутанта $F^{[s]}$.
2) Образ $\mathcal{R}^1 \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{R}^s$ при естественном отображении является базисом для $F(\mathfrak{S}_\delta^s, X)$ — свободной вполне разрешимой δ-алгебры ступени s.

Доказательство. Вложение $\mathcal{R}^s \subset F^{[s-1]}$ для $s \geqslant 1$ следует по индукции из определения функции веса.

Действительно, $\mathcal{R}^1 = X \subset F^{[0]}$ при $s = 1$. Пусть $\tilde{u} = (u, v, w) \in \mathcal{R}^{s+1}$, где $s \geqslant 1$. Возможны два случая:

1) Пусть $\omega(u) = \omega(v) = \omega(w) = s$, т.е. $u, v, w \in \mathcal{R}^s$. По предположению индукции, мономы $u, v, w \in F^{[s-1]}$. Тогда $\tilde{u} = (u, v, w) \in (F^{[s-1]}, F^{[s-1]}, F^{[s-1]}) \subset F^{[s]}$.

2) Иначе $\max\{\omega(w), \omega(v), \omega(u)\} = s{+}1$. Пусть, например, $\omega(u) = s{+}1$, тогда, используя индукцию по длине мономов, имеем $u \in F^{[s]}$, следовательно, $\tilde{u} = (u, v, w) \in F^{[s]}$.

Проверим индукцией по $s \geqslant 0$, что $F^{[s]}$ "натянут" на $\bigcup\limits_{n \geqslant s+1} \mathcal{R}^n(X)$.

База индукции ($s = 0$): тривиально, т.к. $R(X) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathcal{R}^n(X)$ — базис для $F = F^{[0]}$. Предположение индукции: $\forall m \leqslant s$ идеал $F^{[m]}$ "натянут" на все базисные мономы, вес которых не меньше $m + 1$. Шаг индукции: рассмотрим $F^{[s+1]} = Id_F((F^{[s]}, F^{[s]}, F^{[s]}))$. Рассмотрим моном $\tilde{u} = (u, v, w)$, где $u, v, w \in \bigcup\limits_{n \geqslant s+1} \mathcal{R}^n(X)$. По предположению индукции идеал $F^{[s]}$ "натянут" на $\bigcup\limits_{n=s+1}^{\infty} \mathcal{R}^n(X)$. Если хоть один из мономов u, v, w имеет вес больше $s + 1$, то $\omega(\tilde{u}) \geqslant s + 2$. Если же все они имеют вес $s + 1$, то по определению функции веса моном $\tilde{u}$ имеет вес $s + 2$. Получаем, что $F^{[s+1]}$ "натянут" на $\bigcup\limits_{n=s+2}^{\infty} \mathcal{R}^n(X)$.

Утверждение (*1*) леммы доказано.

По замечанию в доказательстве теоремы 2.1.: из $F(\mathfrak{S}_\delta^s, X) \cong F \big/ F^{[s]}$ следует, что базис алгебры $F(\mathfrak{S}_\delta^s, X)$ образован образом множества $\mathcal{R}^1 \bigcup \ldots \bigcup \mathcal{R}^s$.

Теорема 3.1.

Пусть $\mathfrak{S}_\delta^s$ — многообразие вполне разрешимых тернарных алгебр в классе $\mathfrak{W}_\delta$, $\delta = 0, 1, \ldots, 4$. Тогда функция сложности алгебраична и вычисляется так:

$$C(\mathfrak{S}_\delta^s, z) = \psi_1(z) + \psi_2(z) + \cdots + \psi_s(z),$$

где функции $\psi_i(z), i = 1, \ldots, s$ задаются рекуррентно следующим образом.

Начальное условие: $\psi_1(z) = z$. Для $i = 1, \ldots, s-1$ функция $\psi_{i+1}(z)$ удовлетворяет следующему квадратному уравнению над полем $\mathbf{Q}[\psi_1(z), \ldots, \psi_s(z)]$:

- $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i} \psi_\alpha(z)\right) \cdot \psi_{i+1}^2(z) + \left(\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i} \psi_\alpha(z)\right)^2 - 2\right) \cdot \psi_{i+1}(z) + \dfrac{\psi_i^3(z)}{3} = 0$, для $\delta = 0$;
- $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i} \psi_\alpha(z)\right) \cdot \psi_{i+1}^2(z) + \left(\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i} \psi_\alpha(z)\right)^2 - 2\right) \cdot \psi_{i+1}(z) + \dfrac{\psi_i^3(z)}{3} = 0$, для $\delta = 1, 2$;

- $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i}\psi_\alpha(z)\right)\cdot\psi_{i+1}^2(z)+\left(\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i}\psi_\alpha(z)\right)^2-1\right)\cdot\psi_{i+1}(z)+\dfrac{\psi_i^3(z)}{3}=0,$ для $\delta=3;$
- $\dfrac{3}{2}\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i}\psi_\alpha(z)\right)\cdot\psi_{i+1}^2(z)+\left(\dfrac{3}{2}\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{i}\psi_\alpha(z)\right)^2-1\right)\cdot\psi_{i+1}(z)+\dfrac{\psi_i^3(z)}{2}=0,$ для $\delta=4.$

Доказательство. Доказательство приведем только для случая $\delta=0$. Остальные уравнения получаются аналогичным образом.

По построению базиса, имеем объединение непересекающихся множеств тернарных произведений для многообразия всех тернарных алгебр $\mathfrak{W}_0$

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j,\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j,\mathcal{R}^{i+1}\right)\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j,\mathcal{R}^{i+1},\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j\right)\bigcup\left(\mathcal{R}^{i+1},\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j,\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j\right)\bigcup$$
$$\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j,\mathcal{R}^{i+1},\mathcal{R}^{i+1}\right)\bigcup\left(\mathcal{R}^{i+1},\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j,\mathcal{R}^{i+1}\right)\bigcup\left(\mathcal{R}^{i+1},\mathcal{R}^{i+1},\bigcup_{j=1}^{i}\mathcal{R}^j\right)=$$
$$=\mathcal{R}^{i+1}\setminus\left(\mathcal{R}^i,\mathcal{R}^i,\mathcal{R}^i\right);\tag{3.1}$$

Определим функции $\psi_i(z)=C\left(\mathcal{R}^i,z\right)$, $i\geqslant 1$. Очевидно, что $\psi_1(z)=C(X,z)=z$. Применим лемму 1.1 к соотношению (3.1):

$$3\psi_{i+1}(z)\left(\sum_{j=1}^{i}\psi_j(z)\right)^2+3\psi_{i+1}^2(z)\left(\sum_{j=1}^{i}\psi_j(z)\right)=\psi_{i+1}(z)-\frac{\psi_i^3(z)}{6}.$$

Отсюда получаем искомое квадратное уравнение. Окончательно применяем лемму 3.1

$$C(\mathfrak{S}_0^s,z)=C(\mathcal{R}^1,z)+C(\mathcal{R}^2,z)+\cdots+C(\mathcal{R}^s,z)=\psi_1(z)+\psi_2(z)+\cdots+\psi_s(z).$$

Заметим, что для рядов Гильберта–Пуанкаре в случае конечно порожденных алгебр можно получить аналогичные функциональные соотношения.

Геометрическая интерпретация: мы перечисляем тернарные корневые деревья, не содержащие T^q — полное тернарное дерево высоты q. Ряд Гильберта–Пуанкаре $\mathcal{H}(F(\mathfrak{S}_\delta^q),t)$ перечисляет корневые тернарные деревья соответствующего (в зависимости от δ) типа, листья которых помечены k цветами. Если установим $k=1$, то в этом случае перечисляем непомеченные деревья соответствующего типа.

Теперь перейдем к понятию *разрешимости*. Начнем со случая абсолютно свободной алгебры ($\delta=0$). Это эквивалентно перечислению плоских тернарных корневых деревьев, не содержащих T^q. Согласно следующей теореме, непомеченные деревья перечисляются функцией $\mathcal{H}(F(\mathfrak{A}_0^q,1),t)=C(\mathfrak{A}_0^q,t)$.

Теорема 3.2.
Пусть $\mathfrak{A}_0^q$ — многообразие разрешимых ступени q алгебр в $\mathfrak{W}_0$.

1) Рассмотрим функцию сложности $f(z)=C(\mathfrak{A}_0^q,z)$. Тогда функция $f(z)$ алгебраична и удовлетворяет алгебраическому уравнению степени $2\cdot 3^{q-2}$ над $\mathbf{Q}[z]$:

$$\alpha_q(t)=f(z),$$

где функции $\alpha_i(z)$ задаются рекуррентно. Начальное условие: $\alpha_1(z)=z$. Функция $\alpha_{i+1}(z)$ вычисляется как

$$\alpha_{i+1}(z)=z+3\alpha_i(z)\,(f(z)-\alpha_i(z))^2+3\alpha_i^2(z)\,(f(z)-\alpha_i(z))+\alpha_i^3(z),$$

где $i=1,\ldots,q-1$.

2) Ряд Гильберта–Пуанкаре для относительно свободной алгебры ранга k алгебраичен и равен

$$\mathcal{H}(F(\mathfrak{A}_0^q, k), t) = C(\mathfrak{A}_0^q, kt).$$

Доказательство. Рассмотрим свободную разрешимую алгебру $F(\mathfrak{A}_0^q, X)$. Согласно теореме 2.1, ее базис сформирован из мономов, не содержащих T^q. Обозначим через M множество всех таких мономов.

Начнем с вычисления функций сложности. Пусть X — счетное множество. Обозначим через $M_k \subset M$, где $1 \leqslant k \leqslant q$, подмножество всех мономов, не содержащих T^k в качестве корневого поддерева. В частности, $M_1 = X$ и $M_q = M$. Докажем по индукции, что $C(M_i, z) = \alpha_i(z)$ для $i = 1, \ldots, q$.

База индукции следует из $C(M_1, z) = C(X, z) = z = \alpha_1(z)$.

Предположим, что $C(M_i, z) = \alpha_i(z)$ для всех $i \in \{1, \cdots, q-1\}$. Рассмотрим $\tilde{u} \in M_{i+1}$. Возможны два случая:

1) $\tilde{u} \in X$ — тривиален;

2) $\tilde{u} = (u, v, w)$. Так как u, v и w не содержат T^q, то $u, v, w \in M$. В силу того, что $\tilde{u} \in M_{i+1}$, имеем: $\tilde{u}$ не содержит корневым поддеревом T^{i+1}. Тогда возможны три ситуации:

а) все u, v и w не содержат корневое поддерево T^i, т.е. $u, v, w \in M_i$;

б) ровно два подмонома не содержат T^i как корневое поддерево, т.е., например, $u, v \in M_i$ и $w \in M \setminus M_i$;

в) только один элемент из u, v или w не содержит T^i в качестве корневого поддерева.

Обратно, предположим, что $u, v, w \in M$ удовлетворяют одной из ситуаций а), б) или в). Заметим, что множества поддеревьев для $\tilde{u} = (u, v, w)$ и $u, v, w \in M$ отличаются только корневыми поддеревьями для $\tilde{u}$. Рассматриваемая конструкция запрещает корневые поддеревья высоты $i+1$ для $\tilde{u}$, следовательно, корневые поддеревья высоты q также запрещены. Поэтому $\tilde{u} = (u, v, w) \in M$. Более того, по построению $\tilde{u} \in M_{i+1}$. Применяем лемму 1.1 для функций сложности этих множеств, получаем

$$\begin{aligned} C(M_{i+1}, z) = C(X, z) + 3C^2(M_i, z)C(M \setminus M_i, z) + 3C(M_i, z)C^2(M \setminus M_i, z) + \\ + C^3(M_i, z) = z + 3\alpha_i^2(z)\Big(f(z) - \alpha_i(z)\Big) + 3\alpha_i(z)\Big(f(z) - \alpha_i(z)\Big)^2 + \\ + \alpha_i^3(z) = \alpha_{i+1}(z). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Индуктивный шаг доказан. Так как $M = M_q$, получаем искомое уравнение $\alpha_q(z) = f(z)$.

Также по индукции проверим, что $f(z) = C(\mathfrak{A}_0^q, z)$ входит в $\alpha_i(z)$ с максимальной степенью $2 \cdot 3^{i-2}$, где $2 \leqslant i < q$.

База индукции ($i = 2$): $z + 3z(f(z) - z)^2 + 3z^2(f(z) - z) + z^3 = \alpha_2(z)$, $f(z)$ входит в $\alpha_2(z)$ с максимальной степенью 2. Предположим, что $\forall i < q-1$ выполняется условие на степень алгебраического уравнения, т.е. над $\mathbf{Q}[z]$ можно записать $\alpha_i(z) \sim f^{2*3^{i-2}}(z)$. В силу (3.2) $\alpha_q = z + 3\alpha_{q-1}^2(z)\Big(f(z) - \alpha_{q-1}(z)\Big) + 3\alpha_{q-1}(z)\Big(f(z) - \alpha_{q-1}(z)\Big)^2 + \alpha_{q-1}^3$. Тогда, учитывая предположение индукции, степень алгебраического уравнения над $\mathbf{Q}[z]$ равна $2 \cdot 3^{q-2}$.

Рассмотрим относительно свободную алгебру конечного ранга $F(\mathfrak{A}_0^q, k)$, где $|X| = k$. Аналогично вводим множества M и M_i, $1 \leqslant i \leqslant q$. Вместо функции сложности $C(\mathfrak{A}_0^q, z)$ используем функцию $\phi(t) = \mathcal{H}(\mathfrak{A}_0^q, t)$. Аналогично ранее использованной конструкции положим $\beta_i(t) = \mathcal{H}(M_i, t)$, $i = 1, \cdots, q$ и получим, что $\beta_1(t) = kt$ и $\beta_{i+1}(t) = kt + 3\beta_i^2(t)\Big(\phi(t) - \beta_i(t)\Big) + 3\beta_i(t)\Big(\phi(t) - \beta_i(t)\Big)^2 + \beta_i^3(t)$, при $1 \leqslant i < q$. Таким образом,

приходим к уравнению $\beta_q(t) = \phi(t) = \mathcal{H}(\mathfrak{A}_0^q, t)$. Подставляя $\beta_i(t) = \alpha_i(kt)$, $i = 1, \ldots, q$, получаем решение этого уравнения $\mathcal{H}(F(\mathfrak{A}_0^q, k), t) = C(\mathfrak{A}_0^q, kt)$. Таким образом теорема доказана.

Рассмотрим теперь разрешимые подмногообразия остальных классов $\mathfrak{W}_\delta$ при $\delta = 1, \ldots, 4$. Геометрически это соответствует перечислению *пространственных* тернарных корневых деревьев $\mathfrak{W}_1$ и *плоских* с соответствующими возможностями перестановок поддеревьев $\mathfrak{W}_\delta$ ($\delta = 2, 3, 4$), не содержащих полное тернарное дерево T^q в качестве корневого поддерева.

Теорема 3.3.
Пусть $\mathfrak{A}_\delta^q$ — многообразие разрешимых ступени q δ-алгебр, где $\delta \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда функция сложности $C(\mathfrak{A}_\delta^q, z) = f(z)$, $\delta \in \{1, 2, 3, 4\}$, алгебраична и удовлетворяет алгебраическому уравнению степени $2 \cdot 3^{q-2}$ над $\mathbf{Q}[z]$:

$$\alpha_q(z) = f(z),$$

где $\alpha_1(z) = z$ и α_{i+1}, $i = 1, \ldots, q-1$ вычисляются по формулам:

- $\alpha_{i+1}(z) = z + \frac{1}{2}\alpha_i(z)(f(z) - \alpha_i(z))^2 + \frac{1}{2}\alpha_i^2(z)(f(z) - \alpha_i(z)) + \frac{1}{6}\alpha_i^3(z)$, если $\delta = 1, 2$;
- $\alpha_{i+1}(z) = z + \alpha_i(z)(f(z) - \alpha_i(z))^2 + \alpha_i^2(z)(f(z) - \alpha_i(z)) + \frac{1}{3}\alpha_i^3(z)$, если $\delta = 3$;
- $\alpha_{i+1}(z) = z + \frac{3}{2}\alpha_i(z)(f(z) - \alpha_i(z))^2 + \frac{3}{2}\alpha_i^2(z)(f(z) - \alpha_i(z)) + \frac{1}{2}\alpha_i^3(z)$, если $\delta = 4$

Доказательство. Рассмотрим случай симметричных и кососимметричных алгебр. Аналогично теореме 3.2 определим множества M и M_i, $1 \leqslant i < q$. В случае $\tilde{u} = (u, v, w) \in M_{i+1}$, $1 \leqslant i < q$ имеем три возможных ситуации:

а) $u, v, w \in M_i$, и $u \geqslant v \geqslant w$ при $\delta = 1$, $u > v > w$ для $\mathfrak{W}_2$. В силу симметричности относительно u, v, w производящая функция $\alpha_i^3(z)$ перечисляет каждый моном 6 раз, поэтому перед таким слагаемым должен быть коэффициент $\frac{1}{6}$;

б) ровно два подмонома не содержат T^i, как корневое поддерево, например, $u, v \in M_i, w \in M \backslash M_i$. Тогда в силу симметричности относительно u и v (в классах $\mathfrak{W}_1$ и $\mathfrak{W}_2$) производящая функция $\alpha_i(z) \cdot \alpha_i(z) \cdot (f(z) - \alpha_i(z))$ перечисляет каждый моном (u, v, w) дважды, поэтому перед таким слагаемым должен быть коэффициент $\frac{1}{2}$;

в) только один элемент не содержит T^i в качестве корневого поддерева. Аналогичными рассуждениями получаем коэффициент $\frac{1}{2}$ перед слагаемым $\alpha_i(z) \cdot (f(z) - \alpha_i(z))^2$.

Применив лемму 1.1, получаем доказываемое алгебраическое уравнение.

Аналогичными рассуждениями (с учетом тождеств цикла и "перестановки крайних членов") доказываются алгебраические уравнения, вычисляющие производящие функции в классах $\mathfrak{W}_3$ и $\mathfrak{W}_4$.

Заключение

В качестве основного результата доказано, что экспоненциальные производящие функции для свободных разрешимых (вполне разрешимых) алгебр ступени q в классе абсолютно свободных алгебр, а также в других рассматриваемых классах тернарных алгебр являются алгебраичными. Данная задача в классе абсолютно свободных алгебр эквивалентна перечислению плоских тернарных деревьев, не содержащих запрещенных поддеревьев; а именно: полных тернарных поддеревьев

высоты q в случае свободных разрешимых алгебр и полных тернарных поддеревьев высоты q после произвольного числа редукций в случае свободных вполне разрешимых алгебр.

Автор благодарит В.М. Петроградского за поддержку и внимание к работе.

Литература

[1] Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

[2] Drensky, V. Free algebras and PI-algebras / V. Drensky // Singapore: Springer, 2000. – 271 p.

[3] Бахтурин, Ю. А. Тождества в алгебрах Ли / Ю.А. Бахтурин. – М.: Наука, 1985. – 448 с.

[4] Размыслов, Ю.П. Тождества алгебр и их представлений / Ю.П. Размыслов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

[5] Гульден, Я. Перечислительная комбинаторика / Я. Гульден, Д. Джексон; перев. с англ. – М.: Наука, 1990. – 504 с.

[6] Petrogradsky, V.M. Enumeration of algebras close to absolutely free algebras and binary trees / V.M. Petrogradsky // Journal of Algebra. – №290. – V. 2. – 2005. – P. 337–371.

[7] Петроградский, В.М. Рост полилинейных многообразий алгебр Ли и быстро растущие функции / В.М. Петроградский // Математический сборник. – Т. 188. – №6. – 1997. – С. 119–138.

Поступила в редакцию 31/*III*/2007;
в окончательном варианте — 31/*III*/2007.

SOLVABLE TERNARY ALGEBRAS AND TERNARY TREES

© 2008 A.D. Uadilova[3]

Main objects of study are ternary algebras, i.e. algebras with trilinear operation. In this class we study finitely generated algebras, and the codimension growth for varieties of absolutely free algebras, relatively free symmetric, relatively free skewsymmetric algebras and others. For these purposes we use ordinary generating functions and exponential generating functions complexity functions.

We study solvable and completely solvable algebras and varieties in these classes. The obtained results are equivalent to an enumeration of ternary trees that do not contain some forbidden subtrees.

Paper received 31/*III*/2007.
Paper accepted 31/*III*/2007.

[3]Uadilova Aygoul Dyusenbekovna (uadilovaad@rambler.ru), Dept. of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432970, Russia.