

ЗАДАЧА ТИПА ТРИКОМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ¹

© 2008 И.П. Егорова²

В работе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа со специальным условием сопряжения. Доказаны существование и единственность решения. Ранее такого типа задачи изучались в работах В.Ф. Волкодавовой, Ю.А. Плотниковой, Е.А. Баровой для уравнений смешанного типа первого рода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L(u) = \begin{cases} u_{xx} + y^m u_{yy} = 0, & 0 < m < 1, \quad y > 0, \\ u_{xy} - \frac{q}{x+y}(u_x + u_y) = 0, & q = \frac{m}{2(2-m)}, \quad y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

на множестве $D = D_- \cup D_+$, где $D_- = \{(x, y) | -1 < -x < y < 0\}$, а D_+ ограничена кусочно-гладкой кривой Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, и отрезком $[0, 1]$ оси $y = 0$.

Задача. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D_+), u(x, y) \in C^1(D_-), u_{xy} \in C(D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma; \quad (4)$$

$$u|_{x=1} = \psi(y), -1 \leq y \leq 0; \quad (5)$$

$$v_+(x) = v_-(x), x \in (0, 1), \quad (6)$$

где $\varphi(x, y)$, $\psi(y)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(1, 0) = \psi(0)$,

$$v_+(x) = \lim_{y \rightarrow 0+0} u_y(x, y), x \in (0, 1), \quad (7)$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором К.Б. Сабитовым.

²Егорова Ирина Петровна, кафедра высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443003, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 14.

$$v_-(x) = \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{-r_1} u_1(t, 0) dt + \int_x^1 (t-x)^{-r_2} u_2(x, -t) dt, \quad 0 < r_1, r_2 < 1, \quad (8)$$

при этом $u_1(x, y)$ — решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_- с данными $u_1(x, 0) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $u_1(1, y) = 0$, $-1 \leq y \leq 0$, а $u_2(x, y)$ — решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_- с данными $u_2(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $u_2(1, y) = \psi(y)$, $-1 \leq y \leq 0$, $\tau(1) = \psi(0) = 0$.

Ранее такого типа задачи были изучены в работах [1–3] для уравнений смешанного типа первого рода.

В данной работе методом экстремума доказана единственность решения задачи (2)–(6), а существование при некоторых ограничениях на заданные функции эквивалентно сводится к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

2. Принцип локального экстремума

Предварительно для уравнения (1) в области D_- построим в явном виде решение задачи Гурса и на ее основе установим принцип локального экстремума для уравнения (1).

Задача Гурса. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D_-}) \cap C^1(D_-), u_{xy} \in C(D_-); \quad (9)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D_-; \quad (10)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1; \quad (11)$$

$$u(1, y) = \psi(y), -1 \leq y \leq 0, \quad (12)$$

где $\tau(x)$, $\psi(y)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\tau(1) = \psi(0) = 0$.

Поскольку для уравнения (1) в области D_- известна функция Римана, то, пользуясь этой функцией [4, §14], нетрудно построить решение задачи (9)–(12):

$$u(x, y) = - \int_x^1 R(t, 0; x, y) [\tau'(t) - \frac{q}{t} \tau(t)] dt - \int_y^0 R(1, t; x, y) [\psi'(t) - \frac{q}{1+t} \psi(t)] dt = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad (13)$$

где $R(s, p; x, y) = (s+p)^{-2q} (p+x)^q (y+s)^q F(-q, -q, 1, \sigma)$ — функция Римана уравнения (1) [5], $\sigma = \frac{(s-x)(p-y)}{(p+x)(y+1)}$, $F(-q, -q; 1, \sigma)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Покажем, что функция $u_2(x, y)$ является решением задачи Гурса для уравнения (1) в области D_- . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция $u_2(x, y)$ является решением уравнения (1) в области D_- . Проверим выполнимость следующих краевых условий:

$$u_2(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1]; \quad u_2(1, y) = \psi(y), \quad y \in [-1, 0].$$

Из формы записи функции $u_2(x, y)$ следует справедливость первого краевого условия. Далее, учитывая что

$$R(1, t; 1, y) = (1+t)^{-2q}(t+1)^q(y+1)^q F(-q, -q; 1; \sigma) = (1+t)^{-q}(1+y)^q,$$

найдем

$$\begin{aligned} u_2(1, y) &= - \int_y^0 R(1, t; 1, y) \left[\psi'(t) - \frac{q}{1+t} \psi(t) \right] dt = \\ &= -(y+1)^q \int_y^0 (1+t)^q \left[\psi'(t) - \frac{q}{1+t} \psi(t) \right] dt = \\ &= -(y+1)^q \int_y^0 [\psi(t)(1+t)^q]' dt = \psi(y). \end{aligned}$$

Непрерывность решения в $\overline{D}_-$ следует из свойств интеграла, зависящего от параметра. Единственность решения следует из способа построения решения задачи Гурса.

Аналогично доказывается, что функция $u_1(x, y)$ является решением задачи Гурса с данными:

$$u_1(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1], \quad u_1(1, y) = 0, \quad y \in [-1, 0].$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Если $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, $\psi(y) \in C[-1, 0] \cap C^1(-1, 0)$, $\tau(1) = \psi(0) = 0$, $\tau'(x), \psi'(y) \in L_1[0, 1]$, то существует единственное решение задачи (9)–(12), и оно определяется формулой (13).

Теперь на основании формулы (13) вычислим (8). Для этого найдем

$$\begin{aligned} R(t, 0; x, 0) &= t^{-2q} x^q t^q F(-q, -q, 1; \sigma) = t^{-q} x^q, \\ u_1(t, 0) &= - \int_t^1 R(s, 0; t, 0) \left[\tau'(s) - \frac{q}{s} \tau(s) \right] ds = - \int_t^1 s^{-q} t^q \left[\tau'(s) - \frac{q}{s} \tau(s) \right] ds = \\ &= -t^q \int_t^1 [s^{-q} \tau'(s) - q s^{-q-1} \tau(s)] ds = -t^q \int_t^1 [\tau(s) s^{-q}]' ds = \tau(t), \\ u_2(x, -t) &= \int_{-t}^0 R(1, s; x, -t) \left[\psi'(s) - \frac{q}{1+s} \psi(s) \right] ds = \\ &= \int_{-t}^0 (1-t)^q (1+s)^{-q} (s+x)^q \tilde{\psi}(s) F(-q, -q; 1, \sigma) ds, \end{aligned}$$

где $\tilde{\psi}(s) = [(1+s)^{-q} \psi(s)]'$. Подставив эти выражения в равенство (8), получим

$$v_-(x) = \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{-r_1} \tau(t) dt + \Psi(x), \quad (14)$$

$$\Psi(x) = - \int_x^1 (t-x)^{-r_2} (1-t)^q dt \int_{-t}^0 \frac{(s+x)^q}{1+s} F(-q, -q; 1, \sigma) \tilde{\psi}(s) ds. \quad (15)$$

Лемма 1. Пусть $u(x, y) \in C(\overline{D_-})$ и является в D_- решением уравнения (1) и $u(1, y) = 0$, $-1 \leq y \leq 0$. Тогда, если функция $\tau(x) = u(x, 0)$ из класса $C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения на сегменте $[0, 1]$ в точке $\xi \in (0, 1)$, то $v_-(\xi) > 0 (< 0)$.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда функцию $u(x, y)$ в D_- можно определить как решение задачи Гурса (9)–(12). Из формул (13) и (14) с учетом того, что $u(1, y) = \psi(y) \equiv 0$, имеем

$$v_-(x) = \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{-r_1} \tau(t) dt = - \int_x^1 \tau'(t)(t-x)^{-r_1} dt.$$

Пусть $x = \xi$, тогда

$$\begin{aligned} v_-(\xi) &= - \int_{\xi}^1 \tau'(t)(t-\xi)^{-r_1} dt = - \int_{\xi}^1 (\tau(t) - \tau(\xi))'(t-\xi)^{-r_1} dt = \\ &= -r_1 \int_{\xi}^1 [\tau(t) - \tau(\xi)](t-\xi)^{-r_1-1} dt = \tau(\xi)(1-\xi)^{-r_1} + r_1 \int_{\xi}^1 \frac{\tau(\xi) - \tau(t)}{(t-\xi)^{r_1+1}} dt > 0. \end{aligned}$$

3. Единственность решения

Лемма 2 (принцип экстремума). Пусть $u(x, y) \in C(\overline{D_+}) \cap C^2(D_+)$, $Lu \equiv 0$ в области D_+ , $u(1, y) = 0$, $-1 \leq y \leq 0$. Тогда если $\max_{\overline{D_+}} u(x, y) = u(Q) > 0$ ($\min_{\overline{D_-}} u(x, y) = u(Q) < 0$), то этот максимум (минимум) достигается на кривой $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max_{\overline{D_+}} u(x, y) = u(Q) > 0$, $Q \in \overline{D_+}$. Поскольку функция $u(x, y)$ в области D_+ является решением уравнения эллиптического типа, то в силу внутреннего принципа экстремума для эллиптических уравнений точка $Q \in D_+$, то есть $Q \in \partial D_+ = \overline{\Gamma} \cup AB$. Пусть $Q \in AB$, то есть $Q = (\xi, 0)$, $0 < \xi < 1$. Тогда в силу леммы 1 $v_-(\xi) > 0$, но, с другой стороны, на основании граничного принципа экстремума для эллиптических уравнений [6. С. 31] $v_-(\xi) = v_+(\xi) < 0$. Получено противоречие, следовательно, точка $Q \in \overline{\Gamma}$.

Теорема 2. Если существует решение задачи (2)–(6), то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи (2)–(6), (то есть $\varphi(s) \equiv 0$, $\psi(y) \equiv 0$). Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в D_+ . Допустим, что $u(x, y)$ не равно тождественно нулю в D_+ . Тогда существует точка $(x_1, y_1) \in D_+$, такая что $u(x_1, y_1) \neq 0$. Пусть для определенности $u(x_1, y_1) > 0$, тогда $\max_{\overline{D_+}} u(x, y) = u(Q) > 0$, $Q \in \overline{D_+}$. По лемме 2 точка $Q \in \overline{\Gamma}$. Поскольку $u|_{\Gamma} \equiv 0$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_+}$. Отсюда следует, что $u(x, 0) = \tau(x) = 0$ на $[0, 1]$ и в силу единственности решения задачи Гурса $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_-}$.

4. Существование решения задачи (2)–(6)

Для доказательства существования решения задачи (2)–(6) для уравнения (1) в области D_+ рассмотрим задачу N с данными:

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad u_y(x, 0+0) = v_+(x), \quad 0 < x < 1,$$

где s — длина дуги кривой Γ , отсчитываемой от точки $(1, 0)$ против часовой стрелки, l — длина кривой Γ .

Для простоты вычислений рассмотрим случай, когда кривая Γ совпадает с так называемой нормальной кривой Γ_0 :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(2-m)^2} y^{2-m} = \frac{1}{4}.$$

В этом случае в работе [7. С. 269] решение этой задачи выписано в явном виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -k \int_0^1 v_+(t) \left[\left((t-x)^2 + \frac{4}{(2-m)^2} y^{2-m} \right)^q - \right. \\ & \left. - \left[(t+x-2xt)^2 + \frac{16(t-\frac{1}{2})^2 y^{2-m}}{(2-m)^2} \right]^q \right] dt - \\ & - \frac{km}{2} \left(\frac{1}{4} - R_0^2 \right) \int_0^1 \eta^{-1} \varphi(s) (r_1^2)^{q-1} F(-q, 1-q, -2q, 1-\sigma) \frac{d\xi}{ds} ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Из формулы (16) при $y \rightarrow 0+0$ найдем

$$\tau(x) = -k \int_0^1 v_+(t) \left[(t-x)^{2q} - (t+x-2xt)^{2q} \right] dt + \Phi(x), \quad (17)$$

где

$$\Phi(x) = -2kq(1+2q)^q x(1-x) \int_0^1 \varphi_1(t) \frac{[t(1-t)]^{-q-\frac{1}{2}}}{(x^2 + (1-2x)t)^{1-q}} dt, \quad (18)$$

$\varphi_1(t) = \varphi(s)$, s — длина дуги кривой Γ_0 . Поскольку в силу (6): $v_+(t) = v_-(t)$, то, подставив (14) в равенство (17), получим

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -k \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \int_t^1 (s-t)^{-r_1} \tau(s) ds + \psi(t) \right] \times \\ & \times \left[(t-x)^{2q} - (t+x-2xt)^{2q} \right] dt + \Phi(x) = \\ & = -k \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \int_t^1 (s-t)^{-r_1} \tau(s) ds \right) \left[(t-x)^{2q} - (t+x-2xt)^{2q} \right] dt + F(x), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} F(x) = & -k \int_0^1 \Psi(t) \left[|t-x|^{2q} - (t+x-2xt)^{2q} \right] dt + \Phi(x) = F_1(x) + \Phi(x), \\ F_1(x) = & -k \int_0^1 \Psi(t) \left[|t-x|^{2q} - (t+x-2xt)^{2q} \right] dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Равенство (19) представим в виде

$$\begin{aligned}
\tau(x) = & -k2q \int_0^x \left(\int_t^1 (s-t)^{-r_1} \tau(s) ds \right) (x-t)^{2q-1} dt + \\
& + k2q \int_x^1 \left(\int_t^1 (s-t)^{-r_1} \tau(s) ds \right) (t-x)^{2q-1} dt - \\
& - k2q(1-2x) \int_0^1 \left(\int_t^1 (s-t)^{-r_1} \tau(s) ds \right) (t+x-2xt)^{2q-1} dt + F(x) = \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + F(x).
\end{aligned} \tag{21}$$

В интеграле I_1 , меняя порядок интегрирования и вычисляя внутренние интегралы, будем иметь

$$\begin{aligned}
I_1 = & -k2q \int_0^x \tau(s) ds \int_0^s (s-t)^{-r_1} (x-t)^{2q-1} dt - \\
& - k2q \int_x^1 \tau(s) ds \int_0^x (s-t)^{-r_1} (x-t)^{2q-1} dt = \\
& = k2q \int_0^x \tau(s) s^{1-r_1} x^{2q-1} \frac{1}{1-r_1} F\left(1-2q, 1, 2-r_1; \frac{s}{x}\right) ds + \\
& + k2q \int_x^1 \tau(s) \frac{x^{2q} s^{-r_1}}{2q} F\left(r_1, 1, 1+2q; \frac{x}{s}\right) ds.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом в интегралах I_2 и I_3 , меняя порядки интегрирования и вычисляя внутренние интегралы, найдем

$$\begin{aligned}
I_2 = & 2kq \frac{\Gamma(2q)\Gamma(1-r_1)}{\Gamma(1+2q-r_1)} \int_x^1 \tau(s)(s-x)^{-r_1+2q} ds, \\
I_3 = & -\frac{2qk}{1-r_1}(1-2x) \int_0^1 s^{1-r_1} (x+s-2xs)^{2q-1} F\left(1-2q, 1-r_1; 2-r_1; \frac{(1-2x)s}{x+s-2xs}\right) \tau(s) ds = \\
& = -\frac{2qk}{1-r_1}(1-2x) \int_0^x s^{1-r_1} (x+s-2xs)^{2q-1} F\left(1-2q, 1-r_1; 2-r_1; \frac{(1-2x)s}{x+s-2xs}\right) \tau(s) ds - \\
& - \frac{2qk}{1-r_1}(1-2x) \int_x^1 s^{1-r_1} (x+s-2xs)^{2q-1} F\left(1-2q, 1-r_1; 2-r_1; \frac{(1-2x)s}{x+s-2xs}\right) \tau(s) ds.
\end{aligned}$$

Подставим значения интегралов I_1 , I_2 и I_3 в (21), получим

$$\tau(x) = \int_0^1 \tau(s) K(x, s) ds + F(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{22}$$

Лемма 3. Ядро $K(x, s)$ непрерывно в квадрате $[0, 1; 0, 1]$, кроме линий $x = 0$, $s = 0$ и $s = x$, где для него справедлива оценка

$$|K(x, s)| \leq \begin{cases} c_1[x^{2q-1} + (x+s-2xs)^{2q-1}] + c_2s^{-r_1}, & r_1 < 2q; \\ c_3(x^{2q-1} + s^{-r_1})|\ln|1 - \frac{x}{s}|| + c_4(x+s-2xs)^{2q-1}, & r_1 = 2q; \\ c_5(x^{r_1-1} + s^{-2q})|s-x|^{2q-r_1} + c_6(x+s-2xs)^{2q-1}, & r_1 > 2q. \end{cases}$$

Лемма 4. Если $\psi(y) \in C[-1, 0] \cap C^1(-1, 0)$, $\psi'(y) \in L_1[-1, 0]$, $\psi(0) = 0$, $\varphi_1(x) = [x(1-x)]^{(1/2+q)(1+\gamma)}\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\varphi}(x) \in C[0, 1]$, $\gamma > 0$, то функция $F(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, $F'(x) \in L_1[0, 1]$.

Доказательство. Если функция $\varphi_1(x)$ имеет указанное представление, то в силу результата [7. С. 276] следует, что функция $\Phi(x) \in C^1[0, 1] \cap C^\infty(0, 1)$ при $\gamma > 0$. Если функция $\psi(y)$ удовлетворяет условиям леммы, то из представления (15) следует, что $\Psi(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$. Тогда из равенства (20) вытекает, что $F_1(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, $F'_1(x) \in L[0, 1]$.

Итак, в силу лемм 3 и 4 уравнение (22) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью [8, с. 481]. В силу теоремы 2 о единственности решения задачи (2)–(6) и альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (22) однозначно разрешимо в классе функций $C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, при этом $\tau'(x) \in L[0, 1]$. Таким образом доказана следующая

Теорема 3. Если $\Gamma \equiv \Gamma_0$, функции $\psi(y)$ и $\varphi_1(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, то существует единственное решение задачи (2)–(6), которое в областях D_- и D_+ определяется соответственно формулами (13) и (16).

Литература

- [1] Волкодавов, В.Ф. Для уравнения смешанного типа задача Т с сопряжением специального вида. Неклассические уравнения математической физики / В.Ф. Волкодавов, О.Ю. Наумов. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2002. – С. 41–49.
- [2] Плотникова, Ю.А. Краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов со специальными условиями сопряжения / Ю.А. Плотникова // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Sterlitaмак: СГПА, 2005. – 14 с.
- [3] Барова, Е.А. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со специальными условиями сопряжения / Е.А. Барова // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань: КГУ, 2007. – 16 с.
- [4] Сабитов, К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Высшая школа, 2003. – 255 с.
- [5] Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов / В.Ф. Волкодавов [и др.]. – Куйбышев: КГПИ, 1982. – 55 с.
- [6] Бицадзе, А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
- [7] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
- [8] Сабитов, К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения / К.Б. Сабитов. – М.: Высшая школа, 2005. – 671 с.

Поступила в редакцию 26/II/2008;
в окончательном варианте — 26/II/2008.

**TRICOMI PROBLEM WITH NON-LOCAL CONDITION OF
CONJUGATION FOR EQUATION OF MIXED TYPE
WITH CHARACTERISTIC DEGENERACY³**

© 2008 I.P. Egorova⁴

In the paper boundary value a problem for equation of mixed type with special condition of conjugation is studied. The existence and uniqueness of the solvability are proved. Problems of this type for equation of mixed type were studied earlier in the works of V.F. Volkodavov, Y.A. Plotnikova, E.A. Barova.

Paper received 26/II/2008.

Paper accepted 26/II/2008.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. K.B. Sabitov.

⁴Egorova Irina Petrovna, Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443003, Russia.