УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ[1]

© 2008 А.В. Скороход[2]

В статье рассматривается задача типа Геллерстедта, в постановке которой условие сопряжения на линии изменения типа состоит в склеивании производной по нормали из области эллиптичности с производной дробного порядка из области гиперболичности. Методом экстремума доказана единственность решения данной задачи, а существование сведено к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

1. Постановка задачи и полученные результаты

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L(u) \equiv \begin{cases} y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y > 0,\, m > 0, \\ u_{xy} - \dfrac{q}{x-y}\left(u_x - u_y\right) = 0, \quad y < 0,\, x < 0, \\ u_{xy} + \dfrac{q}{x+y}\left(u_x + u_y\right) = 0, \quad y < 0,\, x > 0,\, q = \dfrac{m}{2(m+2)} \end{cases} \tag{1.1}$$

в области D, ограниченной при $y > 0$ кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, и отрезками прямых $x = -1$, $y = x$, $x = 1$, $y = -x$ при $y < 0$.

Обозначим: $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_-{}^1 = D \cap \{x < 0,\, y < 0\}$, $D_-^2 = D \cap \{x > 0,\, y < 0\}$, $D_- = D_-{}^1 \cup D_-^2$, $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$ — параметрическое уравнение кривой Γ, s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B против часовой стрелки, l — длина кривой Γ.

Для уравнения (1.1) в области D поставим следующую задачу типа Геллерстедта со специальными условиями сопряжения.

Задача Геллерстедта. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D_+) \cap C^1(D_-), \quad u_{xy} \in C(D_-)\,; \tag{1.2}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{1.3}$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \varphi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l; \tag{1.4}$$

$$u(-1, y) = \psi_1(y), \quad y \in [-1, 0]\,; \tag{1.5}$$

[1] Представлена доктором физико-математических наук, профессором К.Б. Сабитовым.

[2] Скороход Анна Владимировна (scorohodav@yandex.ru), кафедра математического анализа Института математики, физики и информатики Самарского государственного педагогического университета, 443090, Россия, г. Самара, ул. Антонова-Овсеенко, 26.

$$u(1, y) = \psi_2(y), \quad y \in [-1, 0]; \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} u_y(x, +0) &= -\nu_-{}^1(x), \quad x \in (-1, 0), \\ u_y(x, +0) &= \nu_-{}^2(x), \quad x \in (0, 1); \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \nu_-{}^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_x^0 (t-x)^{-\lambda} u_1(t, 0)\, dt + \\ + \int\limits_x^0 (t-x)^{-\lambda} u_2(x, t)\, dt, \quad 0 < \lambda < 1,\ x \in (-1, 0), \end{aligned} \tag{1.8}$$

при этом $u_1(x, y)$ — решение задачи Гурса для уравнения (1.1) в области $D_-{}^1$ с данными: $u_1(x, 0) = \tau_1(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $\tau_1(-1) = 0$, $u_1(-1, y) = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$; $u_2(x, y)$ — решение задачи Гурса для уравнения (1.1) в области $D_-{}^1$с данными: $u_2(x, 0) = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $u_2(-1, y) = \psi_1(y)$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $\psi_1(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \nu_-^2(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{-r} u_1(t, 0)\, dt + \\ + \int\limits_0^x (x-t)^{-r} u_2(x, -t)\, dt, \quad 0 < r < 1,\ x \in (0, 1), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $u_1(x, y)$ — решение задачи Гурса для уравнения (1.1) в области D_-^2 с граничными условиями: $u_1(x, 0) = \tau_2(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\tau_2(1) = 0$, $u_1(1, y) = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$; $u_2(x, y)$ — решение задачи Гурса для уравнения (1.1) в области D_-^2с граничными условиями: $u_1(x, 0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $u_2(1, y) = \psi_2(y)$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$, $\psi_2(0) = 0$, причем $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\varphi(s)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\psi_1(0) = \varphi(l)$, $\psi_2(0) = \varphi(0)$.

Задача Геллерстедта для уравнений смешанного типа с классическими условиями сопряжения изучалась в работах [1–13].

В данной статье методом экстремума доказана единственность решения задачи (1.2)–(1.7), а существование сведено к однозначной разрешимости интегрального уравнения Фредгольма II рода.

2. Задачи Гурса для уравнения (1)

Предварительно построим в явном виде решение задачи Гурса для уравнения (1) в областях $D_-{}^1$ и D_-^2 и на их основании установим принцип локального экстремума.

Задача Гурса. Найти в области $D_-{}^1$ функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C\left(\overline{D_-{}^1}\right) \cap C^1\left(D_-{}^1\right), \quad u_{xy} \in C\left(D_-{}^1\right); \tag{2.1}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in D_-{}^1; \tag{2.2}$$

$$u(-1, y) = \psi_1(y), \quad y \in [-1, 0]; \tag{2.3}$$

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad x \in [-1, 0], \tag{2.4}$$

где $\tau_1(x)$, $\psi_1(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Решение задачи (2.1)–(2.4) проводится методом Римана. При этом функция Римана определяется равенством [10. С. 38]:

$$R(x,\, y;\, x_0,\, y_0) = (y-x)^{2q}\,(y-x_0)^{-q}\,(y_0-x)^{-q}\,F(q,\, q;\, 1;\, \sigma_1)\,,$$

где $\sigma_1 = \dfrac{(x-x_0)\,(y_0-y)}{(x_0-y)\,(x-y_0)}$.

Теорема 1. *Если* $\psi_1(y) \in C[-1,0] \cap C^1(-1,0)$, $\tau_1(x) \in C[-1,0] \cap C^1(-1,0)$, $\psi_1(0) = \tau_1(0) = 0$, *то единственное решение задачи* (2.1)–(2.4) *определяется формулой*:

$$\begin{gathered} u(x,\, y) = -\int\limits_{-1}^{x} R(t,\, 0;\, x,\, y)\left[\tau_1'(t) + \frac{q}{t}\,\tau_1(t)\right]dt - \\ -\int\limits_{y}^{0} R(-1,\, t;\, x,\, y)\left[\psi_1'(t) + \frac{q}{1+t}\,\psi_1(t)\right]dt = u_1(x,y) + u_2(x,y). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ из (2.5) поставим в (1.8) и, меняя пределы интегрирования во втором слагаемом, получим

$$\nu_-{}^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{0} u_1(t,\, 0)\,(t-x)^{-\lambda}\,dt + \Psi_1(x), \tag{2.6}$$

где $\Psi_1(x)$ имеет вид

$$\begin{gathered} \Psi_1(x) = \frac{\Gamma(2-\lambda)\,\Gamma(2-2q-\lambda)}{\Gamma^2(2-q-\lambda)}\int\limits_{x}^{0} (s-x)^{1-q-\lambda}\,(1+s)^q \times \\ \times F\left(1-q,\, q;\, 2-q-\lambda;\, \frac{s-x}{1-s}\right)\left[\psi_1'(s) + \frac{q}{1+s}\,\psi_1(s)\right]ds. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Лемма 1. *Пусть* $u(x,y) \in C\left(\overline{D_-{}^1}\right)$ является *решением уравнения* (1.1) *в области* $D_-{}^1$ и $u(-1,y) \equiv 0$. *Тогда если* $u(x,0) = \tau_1(x)$, $\tau_1(x) \in C[-1,0] \cap C^1(-1,0)$, *достигает на сегменте* $[-1,0]$ *наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* $\xi \in (-1,0)$, *то* $\nu_-{}^1(\xi) < 0$ $(\nu_-{}^1(\xi) > 0)$.

Доказательство. Непрерывное в замкнутой области $\overline{D_-{}^1}$ решение уравнения (1.1) можно представить в виде решения задачи Гурса (2.5). Отсюда вычислим выражение (1.8), которое имеет вид (2.6). Из (2.6) при условии $u(-1,y) \equiv 0$ имеем

$$\nu_-{}^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{0} u_1(t,\, 0)\,(t-x)^{-\lambda}\,dt = -\tau_1(0)\,(-x)^{-\lambda} + \int\limits_{x}^{0} \tau_1'(t)\,(t-x)^{-\lambda}\,dt.$$

Пусть $\max\limits_{[-1,0]} \tau_1(t) = \tau_1(\xi) > 0$, $\xi \in (-1,0)$. Тогда

$$\nu_-{}^1(\xi) = -\tau_1(\xi)\,(-\xi)^{-\lambda} + \lambda\int\limits_{\xi}^{0} [\tau_1(t) - \tau_1(\xi)]\,(t-\xi)^{-\lambda-1}\,dt.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

Задача Гурса. Найти в области D_-^2 функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\, y) \in C\left(\overline{D_-^2}\right) \cap C^1\left(D_-^2\right), \quad u_{xy} \in C\left(D_-^2\right); \tag{2.8}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,\, y) \in D^2_-; \tag{2.9}$$

$$u\,(1,\, y) = \psi_2\,(y)\,,\; y \in [-1,\, 0]\,; \tag{2.10}$$

$$u\,(x,\, 0) = \tau_2\,(x)\,,\; x \in [0,\, 1]\,, \tag{2.11}$$

где $\tau_2\,(x)$, $\psi_2\,(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Решение задачи (2.8)–(2.11) в области D^2_- проводится аналогично решению задачи (2.1)–(2.4). В этом случае функция Римана имеет вид

$$R\,(x,\, y;\, x_0,\, y_0) = (x+y)^{2q}\,(x_0+y)^{-q}\,(x+y_0)^{-q}\,F\,(q,\, q;\, 1;\, \sigma_2)\,,$$

где $\sigma_2 = \dfrac{(x-x_0)\,(y-y_0)}{(x_0+y)\,(x+y_0)}$.

Теорема 2. *Если* $\psi_2\,(y) \in C\,[-1,\, 0] \cap C^1\,(-1,\, 0)$, $\tau_2\,(x) \in C\,[0,\, 1] \cap C^1\,(0,\, 1)$, $\psi_2\,(0) = \tau_2\,(1) = 0$, *то единственное решение задачи* (2.8)–(2.11) *в области* D^2_- *определяется формулой*:

$$\begin{aligned} u\,(x,\, y) = &-\int\limits_x^1 R\,(t,\, 0;\, x,\, y)\left[\tau_2'\,(t) + \frac{q}{t}\,\tau_2\,(t)\right]dt - \\ &-\int\limits_y^0 R\,(1,\, t;\, x,\, y)\left[\psi_2'\,(t) + \frac{q}{1+t}\,\psi_2\,(t)\right]dt = u_1(x,\, y) + u_2(x,\, y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

В (1.9) поставим (2.12) и после аналогичных преобразований получим

$$\nu^2_-\,(x) = \int\limits_0^x \tau_2'\,(t)\,(x-t)^{-r}\,dt + \tau_2\,(0)\,x^{-r} + \Psi_2(x), \tag{2.13}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_2(x) = &-\frac{\Gamma\,(2-r)\,\Gamma\,(2-2q-r)}{\Gamma^2\,(2-q-r)}\int\limits_{-x}^0 (s+x)^{1-q-r}\,(1+s)^q \times \\ &\times F\left(1-q,\, q;\, 2-q-r;\, \frac{s+x}{1+s}\right)\left[\psi_2'\,(s) + \frac{q}{1+s}\,\psi_2\,(s)\right]ds. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Лемма 2. *Пусть* $u\,(x,\, y) \in C\left(\overline{D^2_-}\right)$ является *решением уравнения* (1.1) *в области* D^2_- и $u(1,\, y) \equiv 0$. *Тогда если* $u\,(x,\, 0) = \tau_2\,(x)$, $\tau_2\,(x) \in C\,[0,\, 1] \cap C^1\,(0,\, 1)$, *достигает на сегменте* $[0,\, 1]$ *наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке* $\xi \in (0,\, 1)$, *то* $\nu^2_-\,(\xi) > 0$ $(\nu^2_-\,(\xi) < 0)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

3. Единственность решения задачи Геллерстедта

Теорема 3 (Принцип экстремума). *Пусть функция* $u\,(x,\, y)$ *удовлетворяет условиям* (1.2), (1.3) *и* $u\,(-1,\, y) = u\,(1,\, y) \equiv 0$. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D_+}} u\,(x,\, y) = u\,(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D_+}} u\,(x,\, y) = u\,(Q) < 0)$, *то максимум (минимум)* $u\,(Q)$ *достигается на кривой* Γ.

Доказательство. При доказательстве данной теоремы воспользуемся методом, предложенным в работе [14]. Пусть $\max\limits_{\overline{D^+}} u\,(x,\, y) = u\,(Q)$, $Q \in \overline{D^+}$. В силу линейности и однородности уравнения (1.1) в области D^+, можно считать, что $u\,(Q) > 0$.

Поскольку в области D^+ функция $u(x, y)$ является решением эллиптического уравнения, то $Q \in \Gamma \cup AB$, если $u(x, y)$ не является тождественной постоянной.

Пусть $Q \in AB = AO \cup OB \cup O$, где $O(0, 0)$, то есть $Q = (x_0, 0)$, $-1 < x_0 < 1$. Если $Q \in AO$, то $-1 < x_0 < 0$. В этом случае, в силу леммы 1: $\nu_-^{1}(x_0) < 0$, а в силу леммы Бабенко [10. С. 44] $u_y(x_0, +0) < 0$, что противоречит условию сопряжения (1.7). Если $Q \in OB$, то в силу леммы 2 получаем противоречие.

Пусть $Q \equiv O$ — точка изолированного максимума, то есть $x_0 = 0$. Пусть $r \in (0, u(Q))$. Число r возьмем настолько близким к числу $u(Q)$, чтобы кривая γ, составленная из линий уровня $u(x, y) = r > 0$, целиком лежала в малой окрестности $U(Q, \delta)$, $0 < \delta < 1/2$, и для всех точек (x, y), принадлежащих области D_γ, ограниченной кривой γ и осью Ox, $u(x, y) \geqslant r$.

Обозначим через $A_\gamma(a, 0)$ и $B_\gamma(b, 0)$ точки пересечения кривой γ с осью Ox, где $-\delta < a < 0$, $0 < b < \delta$. В области D_γ введем функцию $\upsilon(x, y) = u(x, y) - r$, которая удовлетворяет условиям $\upsilon|_\gamma = 0$, $\upsilon(x, y) \geqslant 0$ на $\overline{D_\gamma}$, $y^m \upsilon_{xx} + \upsilon_{yy} \equiv 0$ в D_γ, и рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_\gamma} \upsilon\left(y^m \upsilon_{xx} + \upsilon_{yy}\right) dxdy = 0.$$

Отсюда интегрируя по частям, получим

$$\iint\limits_{D_\gamma} \left(y^m (\upsilon\upsilon_x)_x + \left(\upsilon\upsilon_y\right)_y\right) dxdy - \iint\limits_{D_\gamma} \left(y^m \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right) dxdy = 0. \qquad (3.1)$$

Применив к (3.1) формулу Грина, в силу граничного условия $f|_\gamma = 0$, будем иметь

$$\int\limits_{A_\gamma B_\gamma} \upsilon(x, 0)\, \upsilon_y(x, 0)\, dx + \iint\limits_{D_\gamma} \left(y^m \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right) dx\, dy = 0. \qquad (3.2)$$

В силу того, что $\upsilon_y(x, 0) = u_y(x, 0+0)$, согласно условию сопряжения (1.7), $\upsilon_y(x, 0) = -\nu_-^{1}(x)$, $-1 < x < 0$ и $\upsilon_y(x, 0) = \nu_-^{2}(x)$, $0 < x < 1$. В малой окрестности U функция $\upsilon(x, 0)$ при $x \to 0 - 0$ монотонно возрастает к значению $\upsilon(Q)$. Пусть $[-\delta, 0)$ — такой промежуток оси $y = 0$, где $\upsilon(x, 0)$ возрастает при $x \to 0 - 0$.

Покажем, что $\upsilon_y(x, 0) \geqslant 0$ при всех $x \in [-\delta, 0)$. Пусть ξ — произвольная точка из интервала $(-\delta, 0)$. Тогда на $[0, \xi]$ функция $\upsilon(x, 0)$ достигает максимума в точке $(\xi, 0)$. Следовательно, в силу утверждения леммы 1 $\upsilon_y(\xi, 0) = -\nu_-^{1}(\epsilon) > 0$. В силу произвольности точки ξ, получаем $\upsilon_y(x, 0) \geqslant 0$ при $a \leqslant x < 0$. Аналогично на основании леммы 2 доказывается, что $\upsilon_y(x, 0) \geqslant 0$ на промежутке $(0, b]$.

Таким образом, из равенства (3.2) получаем, что

$$\iint\limits_{D_\gamma} \left(y^m \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right) dxdy = 0.$$

Отсюда следует $\upsilon_x = \upsilon_y \equiv 0$ в D_γ. А это значит, что функция $\upsilon(x, y) \equiv \mathrm{const}$. В силу того, что $\upsilon|_\gamma = 0$, имеем $\upsilon(x, y) \equiv 0$. Тогда $u(x, y) \equiv r$ в $\overline{D_\gamma}$, чего быть не может, так как Q — точка изолированного положительного максимума. Следовательно, $Q \in \Gamma$.

Аналогично доказывается, что $\min\limits_{\overline{D^+}} u(x, y)$ достигается на Γ. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если существует решение задачи* (1.2)–(1.7), *то оно единственно.*

Доказательство следует из теоремы 3.

4. Существование решения задачи Геллерстедта

Доказательство существования решения задачи Геллерстедта для простоты вычислений будем проводить для случая, когда кривая Γ совпадает с нормальной кривой Γ_0: $x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1$, $y \geqslant 0$. В этом случае в качестве функции $u(x, y)$ в области D_+ возьмем решение задачи N для уравнения (1) с граничными условиями $u|_{\Gamma_0} = u(0, y)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $u_y(x, 0+0) = \nu(x)$, $-1 < x < 1$, которое определяется формулой (10.41) из [10. С. 194]. Полагая в этой формуле $y = 0$, найдем функциональное соотношение между функциями $u(x, 0+0) = \tau(x)$ и $u_y(x, 0+0) = \nu(x)$:

$$\tau(x) = -k \int_{-1}^{1} \nu(t) \left[|x-t|^{-2q} - (1-tx)^{-2q} \right] dt + \Phi(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.1}$$

где

$$\Phi(x) = 2k_2 q (1-q)^{-2q} \left(1-x^2\right) \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_1(t)\left(1-t^2\right)}{\left(1+x^2-2xt\right)^{1+q}} dt.$$

Учитывая $u(x, 0) = \tau_1(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $u(x, 0) = \tau_2(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, равенство (4.1) представим в следующем виде:

$$\begin{gathered}\tau_1(x) = k \left(\int_{-1}^{x} \nu(t)(x-t)^{-2q} dt + \int_{x}^{0} \nu(t)(t-x)^{-2q} dt + \right. \\ \left. + \int_{0}^{1} \nu(t)(t-x)^{-2q} dt - \int_{-1}^{0} \nu(t)(1-tx)^{-2q} dt - \int_{0}^{1} \nu(t)(1-tx)^{-2q} dt \right) + \\ + \Phi_1(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0,\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\tau_2(x) = k \left(\int_{-1}^{0} \nu(t)(x-t)^{-2q} dt + \int_{0}^{x} \nu(t)(x-t)^{-2q} dt + \right. \\ \left. + \int_{x}^{1} \nu(t)(t-x)^{-2q} dt - \int_{-1}^{0} \nu(t)(1-tx)^{-2q} dt - \int_{0}^{1} \nu(t)(1-tx)^{-2q} dt \right) + \\ + \Phi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\end{gathered} \tag{4.3}$$

где $k = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2q} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(2q)}$.

С учетом условий сопряжения (1.7) вместо $u_y(x, 0+0) = \nu(x)$ подставим значения $\nu_-^1(x)$ и $\nu_-^2(x)$ по формулам (2.6) и (2.13). Полученные выражения для $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ продифференцируем по x и обозначим за $\widetilde{\tau}_1'(x)$ продолжение функции $\tau_1{}'(x)$ на $(0, 1)$. Тогда, складывая и вычитая почленно найденные равенства, получим

$$\xi(x) = \int_{0}^{1} \xi(s) M(x, s) ds + P(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4.4}$$

$$\eta(x) = \int_{0}^{1} \eta(s) N(x, s) ds + Q(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4.5}$$

где

$$\xi(x) = \tau_2{}'(x) + \widetilde{\tau}_1'(x), \tag{4.6}$$

$$\eta(x) = \tau_2{}'(x) - \widetilde{\tau}_1'(x); \tag{4.7}$$

$$M(x, s) = \begin{cases} M_1(x, s) + K_1(x, s), & 0 \leqslant s \leqslant x, \\ M_2(x, s) + K_2(x, s), & x \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

$$N(x, s) = \begin{cases} N_1(x, s) + K_1(x, s), & 0 \leqslant s \leqslant x, \\ N_2(x, s) + K_2(x, s), & x \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Лемма 3. *Функция* $M_1(x, s)$ *непрерывна на множестве* $G^1 = \{(x, s : 0 \leqslant s \leqslant x < 1\}$, *кроме границ* $x = 1$, $s = x$ *и справедлива оценка*

$$|M_1(x, s)| \leqslant \frac{C_1}{(1 - xs)^{2q}(1 - s)^r} + \frac{C_2}{(1 - x)^{r+2q}} + \\ + \frac{C_3(1 - s)^{r+2q}}{(1 - x)^{2q}(x - s)^{r+2q}} + \frac{C_4}{(x - s)^{r+2q}}.$$

Лемма 4. *Функция* $K_1(x, s)$ *непрерывна на множестве* G^1, *кроме линий* $x = 1$, $s = x$, *где для нее справедлива оценка*

$$|K_1(x, s)| \leqslant \frac{C_1}{(1 - xs)^{2q}(x - s)^r} + \frac{C_2}{(1 - x^2)^{2q}(x - s)^r} + \\ + \frac{C_3}{(1 - x)^{2q}(1 - s)^r}.$$

Лемма 5. *Функция* $M_2(x, s)$ *непрерывна на множестве* $G^2 = \{(x, s) : 0 < x \leqslant s \leqslant 1\}$, *кроме границ* $s = x$, $s = 1$, *где справедлива оценка*

$$|M_2(x, s)| \leqslant \frac{C_1}{(s - x)^{r+2q}} + \frac{C_2}{(1 - x)^{2q}(1 - s)^r} + \frac{C_3}{(1 - xs)^{2q}(1 - s)^r}.$$

Лемма 6. *Функция* $K_2(x, s)$ *непрерывна на множестве* G^2, *кроме границы* $s = 1$, *где справедлива оценка*

$$|K_2(x, s)| \leqslant \frac{C_1}{(1 - xs)^{2q}(1 - s)^r} + \frac{C_2}{(1 - x)^{2q}(1 - s)^r}.$$

Лемма 7. *Функция* $P(x)$ *непрерывна на интервале* $(0, 1)$.

На основании утверждений лемм 3–7 делаем вывод, что уравнения (4.4) и (4.5) являются уравнениями Фредгольма второго рода с интегрируемым ядром и свободным членом, непрерывным на $[0, 1)$, а при $x \to 1$ имеющим особенность интегрируемого порядка. По теории данных уравнений [15. С. 428] из единственности решения задачи следует, что соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Следовательно, уравнения (4.4) и (4.5) имеют единственное решение, непрерывное в $[0, 1)$, а при $x \to 1$ имеющее особенность интегрируемого порядка.

Решения уравнений (4.4) и (4.5) могут быть записаны соответственно в виде

$$\xi(x) = \int_0^1 P(t) R_1(x, t)\, dt + P(x), \tag{4.8}$$

$$\eta(x) = \int_0^1 P(t) R_2(x, t)\, dt + P(x), \tag{4.9}$$

где $R_1(x, t)$ и $R_2(x, t)$ — резольвенты ядер $M(x, t)$ и $N(x, t)$соответственно.

Полученные решения (4.8) и (4.9) подставим в систему из уравнений (4.6) и (4.7), из которой найдем

$$\tau_2{}'(x) = \frac{\xi(x) + \eta(x)}{2}.$$

Подставив в выражение (2.12) решение данного дифференциального уравнения относительно функции $\tau_2(x)$ с начальным условием $\tau_2(1) = 0$, получим решение задачи Геллерстедта в области D_-^2.

Аналогично решая задачу:

$$\tau_1{}'(x) = \frac{\xi(-x) - \eta(-x)}{2}, \; \tau_1(-1) = 0,$$

находим функцию $\tau_1(x)$ и, подставляя ее в формулу (2.5), построим решение задачи Геллерстедта в области $D_-{}^1$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 5. *Если* $\psi_1(y) \in C[-1, 0] \cap C^1(-1, 0)$, $\psi_2(y) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, $\Gamma \equiv \Gamma_0$, $u|_{\Gamma_0} \equiv 0$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y) \in L_1[-1, 0]$, $r+2q < 1$, $\lambda+2q < 1$, *то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.7).

Литература

[1] Gellerstedt, S. Sur un probleme aux limites pur une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte: Thes. doct. / S. Gellerstedt. – Uppsala, 1935. – 92 p.

[2] Gellerstedt, S. Quelgues problemes mixtes pour l'equation $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ / S. Gellerstedt // Ark. Mat. Astr. Fys. – 1938. – V. 26A. – No. 3. – P. 78–93.

[3] Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике / Ф.И. Франкль. – М.: Наука, 1973. – 702 с.

[4] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1981. – 125 с.

[5] Бицадзе, А.В. К проблеме уравнений смешанного типа: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.В. Бицадзе. – М., 1951.

[6] Волкодавов, В.Ф. К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта / В.Ф. Волкодавов, М.Е. Лернер // Дифференц. уравнения. Труды пединститутов РСФСР. – Рязань, 1975. – Вып. 6. – С. 55–56.

[7] Хе Кан Чер. О задаче Геллерстедта / Хе Кан Чер // Тр. семинара С.Л. Соболева. – Новосибирск, 1976. – №2. – С. 139–145.

[8] Хе Кан Чер. О единственности решения задачи Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа / Хе Кан Чер // Сибирск. матем. журн. – 1977. – Т. 18. – №6. – С. 1426–1429.

[9] Хе Кан Чер. О задаче Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа / Хе Кан Чер // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1976. – Т. 26. – С. 134–141.

[10] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

[11] Врагов, В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В.Н. Врагов. – Новосибирск, 1978.

[12] Моисеев, Е.И. Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – №7. – С. 1160–1172.

[13] Сабитов, К.Б. Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их примененния / К.Б. Сабитов, А.Н. Кучкарова // Сибирск. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – №5. – С. 1147–1161.

[14] Сабитов, К.Б. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения / К.Б. Сабитов, А.А. Карамова, Г.Г. Шарафутдинова // Известия вузов. Математика. – 1999. – №11. – С. 70–80.

[15] Сабитов, К.Б. Функциональные, дифференциальные, интегральные уравнения / К.Б. Сабитов. – М.: Высшая школа, 2005. – 671 с.

Поступила в редакцию 26/*II*/2008;
в окончательном варианте — 26/*II*/2008.

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE GELLERSTEDT PROBLEMS FOR EQUATION OF THE MIXED TYPE WITH THE SPECIAL CONDITIONS OF CONJUGATION[3]

© 2008 A.V. Scorokhod[4]

In this paper the Gellerstedt problem is solving. The condition of conjugation in the line of retype constitute of agglutination derivative on normal from the domain of ellipse with derivative of shot order from the hyperbolic domain. By the method of extremum the uniqueness is well-proven, and existence is taken over solve of the Fredholm integral equations of second type.

Paper received 26/*II*/2008.
Paper accepted 26/*II*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. K.B. Sabitov.

[4]Scorokhod Anna Vladimirovna (scorohodav@yandex.ru), Dept. of Higher Mathematics, Pedagogical State University, Samara, 443090, Russia.