

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА¹

© 2008 О.А. Репин² Р.Н. Салихов³

В работе рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения гиперболического типа с краевыми условиями, содержащими операторы дробного интегро-дифференцирования. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$|y|^{2m} u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y = 0, \quad (1.1)$$

где $m > \frac{1}{2}$, и α — заданные действительные постоянные.

Пусть D — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y , ограниченная характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1.1) и отрезком $\bar{J} \equiv AB = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$.

Введем следующие обозначения:

$$\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left(\frac{x}{m_0} \right)^{\frac{m_0}{2}} \right) \text{ и } \Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, -\left(\frac{1-x}{m_0} \right)^{\frac{m_0}{2}} \right) — \text{ точки пересечения харак-}$$

теристик уравнения (1.1), выходящих из точки $x \in J$ с характеристиками AC и BC соответственно; $m_0 = \frac{4}{2m+1}$; $I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta}$ и $I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta}$ — операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса, введенные в [1] и имеющие при действительных $\alpha (\alpha > 0)$, $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta, \alpha; 1-\frac{t}{x}) \varphi(t) dt, \quad (1.2)$$

$$(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta, \alpha; \frac{t-x}{1-x}) \varphi(t) dt; \quad (1.3)$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С. Пулькиной.

²Репин Олег Александрович (matstat@mail.ru), кафедра математической статистики Самарского государственного экономического университета, 443090, Россия, г. Самара, ул. Советской Армии, 141.

³Салихов Рустам Назипович (salrus@mail.ru), кафедра прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета, 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

$E_{0+}^{\alpha,\beta}$ — оператор Эрдейи-Кобера, который действует на функцию $f(x)$ по формуле [2]

$$(E_{0+}^{\alpha,\beta}f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta f(t) dt; \quad (1.4)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера; $F(a, b, c; x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса; $H^\lambda[a, b]$, $(0 < \lambda \leq 1)$ есть класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера порядка λ на отрезке $[a, b]$, $H^* = H^*(a, b)$ — класс гельдеровских функций с интегрируемыми особенностями на концах отрезка.

Также нам потребуются следующие леммы [3]:

Лемма 1.1. Пусть $0 < -\alpha < \lambda < 1$, $\eta > \beta - 1$ и $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$. Тогда

$$x^\beta (I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} \varphi)(x), (1-x)^\beta (I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} \varphi)(x) \in H^{\lambda+\alpha}[0, 1].$$

Лемма 1.2. Пусть $0 < -\alpha < \lambda < 1$, $\beta < \min\{0, \eta + 1\}$ и $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$. Тогда

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} \varphi)(x), (I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} \varphi)(x) \in H^{\min\{\lambda+\alpha, -\beta\}}[0, 1].$$

При $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$ регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1.1) в области D , удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \lim_{y \rightarrow 0} (-y)^\alpha u_y(x, y) &= \nu(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

где $\tau(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $\nu(x) \in C^1(J)$, дается формулой [4]

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 \tau \left[x + (1-2t)(-y)^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-1} dt - \\ &\quad - \frac{m_0 \Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma^2(1-\beta)} (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu \left[x + (1-2t)(-y)^{\frac{2}{m_0}} \frac{m_0}{2} \right] t^{-\beta} (1-t)^{-\beta} dt, \end{aligned}$$

где

$$\beta = \frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}, \quad m_0 = \frac{4}{2m+1}.$$

В области D поставим и изучим следующую задачу:

Задача 1.1. Найти в области D решение $u(x, y) \in C(D)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$(E_{0+}^{1-2\beta, 2\beta-1} a_1(t) \nu(t))(x) + \tau(x) = \varphi_1(x), \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} A(x)(I_{0+}^{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1} u[\Theta_0])(x) + B(x)(I_{1-}^{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2} u[\Theta_1])(x) + \\ + C(x)(I_{1-}^{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3} \nu(t))(x) = \varphi_2(x), \end{aligned}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $a_1(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции; α_1 , β_1 , γ_1 , α_2 , β_2 , γ_2 , α_3 , β_3 , γ_3 , — заданные числа; $\beta = \frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$, $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$.

2. Существование и единственность

На основании решения задачи Коши (1.5) и формул (1.2)–(1.4) найдем значения $u(x, y)$ в точках $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$:

$$u[\Theta_0] = K_0(E_{0+}^{\beta, \beta-1} \tau(t))(x) - K_1(E_{0+}^{1-\beta, \beta-1} t^{1-2\beta} \nu(t))(x), \quad (2.1)$$

$$u[\Theta_1] = K_0(I_{1-}^{\beta, 0, \beta-1} \tau(t))(x) - K_1(I_{1-}^{1-\beta, 2\beta-1, \beta-1} \nu(t))(x), \quad (2.2)$$

где

$$K_0 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}, \quad K_1 = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} m_0^{2\beta}.$$

Подставим выражения (2.1), (2.2) в краевое условие (1.6)

$$\begin{aligned} & A(x)(I_{0+}^{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}(K_0 E_{0+}^{\beta, \beta-1} \tau(t) - K_1 E_{0+}^{1-\beta, \beta-1} t^{1-2\beta} \nu(t)))(x) + \\ & + B(x)(I_{1-}^{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}(K_0 I_{1-}^{\beta, 0, \beta-1} \tau(t) - K_1 I_{1-}^{1-\beta, 2\beta-1, \beta-1} \nu(t)))(x) + \\ & + C(x)(I_{1-}^{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3} \nu(t))(x) = \varphi_2(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Примем $\gamma_1 = -\alpha_1 - 1 + \beta$, $\gamma_2 = -\alpha_2 - 1 + \beta$, тогда, выражая $\tau(x)$ из краевого условия (1.5) и используя известные свойства операторов дробного интегро-дифференцирования [2], из выражения (2.3) получим

$$\begin{aligned} & -A(x)(I_{0+}^{\alpha_1+1-\beta, \beta_1, \beta-1-\alpha_1}(K_0 a_1(t) \nu(t) + K_1 t^{1-2\beta} \nu(t)))(x) - \\ & -B(x)K_0(I_{1-}^{\alpha_2+\beta, \beta_2, \beta-1-\alpha_2} I_{0+}^{1-2\beta, 0, 2\beta-1} a_1(t) \nu(t)))(x) - \\ & -B(x)K_1(I_{1-}^{\alpha_2+1-\beta, \beta_2+2\beta-1, -\alpha_2+\beta-1} \nu(t))(x) + \\ & + C(x)(I_{1-}^{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3} \nu(t))(x) = g(x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} g(x) = & \varphi_2(x) - A(x)K_0(I_{0+}^{\alpha_1+\beta, \beta_1, \beta-1-\alpha_1} \varphi_1(t))(x) - \\ & -B(x)K_0(I_{1-}^{\alpha_2+\beta, \beta_2, \beta-1-\alpha_2} \varphi_1(t))(x). \end{aligned}$$

Решение данной задачи будем искать для двух случаев:

- 1) $\forall x \in J_- A(x) \neq 0$, $B(x) = 0$, $C(x) = A(x)$, $\gamma_1 = -\alpha_1 - 1 + \beta$, $\alpha_3 = \alpha_1 + 1 - \beta$, $\gamma_3 = -\alpha_1 - 1 + \beta$;
- 2) $\forall x \in J_- A(x) = 0$, $B(x) \neq 0$, $C(x) = 0$, $\gamma_2 = -\alpha_2 - 1 + \beta$.

В первом случае выражение (2.4) примет вид

$$\begin{aligned} & -(I_{0+}^{\alpha_1+1-\beta, \beta_1, \beta-1-\alpha_1}(K_0 a_1(t) \nu(t) + K_1 t^{1-2\beta} \nu(t)))(x) + \\ & + (I_{1-}^{\alpha_1+1-\beta, \beta_3, -\alpha_1-1+\beta} \nu(t))(x) = \frac{g(x)}{A(x)}. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha_1 + 1 - \beta > 0$, тогда на выражение (2.5) подействуем оператором $I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0}$

$$\begin{aligned} & (K_0 a_1(x) + K_1 x^{1-2\beta}) \nu(x) - (I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} I_{1-}^{\alpha_1+1-\beta, \beta_3, -\alpha_1-1+\beta} \nu(t))(x) = \\ & = -(I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} \frac{g(t)}{A(t)})(x). \end{aligned}$$

В работе [5] получена формула

$$\begin{aligned} I_{0+}^{a, b, 0} I_{1-}^{-a, c, a} \nu = & \frac{\sin \pi(a+1)}{\pi} x^b \int_0^1 u^{-a} (1-u)^{a-c} (u-x)^{-1} \nu(u) du - \\ & - \cos \pi(a+1) x^{-a-b} (1-x)^{a-c} \nu(x). \end{aligned}$$

Используя (2.5) и полагая $a = -\alpha_1 - 1 + \beta$, $b = -\beta_1$, $c = \beta_3$, перепишем (2.5) в виде интегрального уравнения с ядром Коши

$$\begin{aligned} & (K_0 a_1(x) + K_1 x^{1-2\beta} + \cos \pi(\beta - \alpha_1) x^{\alpha_1+1-\beta+\beta_1} (1-x)^{-\alpha_1-1+\beta-\beta_3}) \nu(x) - \\ & - \frac{\sin \pi(\beta - \alpha_1)}{\pi} x^{-\beta_1} \int_0^1 \frac{u^{\alpha_1+1-\beta} (1-u)^{-\alpha_1-1+\beta-\beta_3} \nu(u) du}{u-x} = \\ & = -(I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} \frac{g(t)}{A(t)})(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Умножим выражение (2.5) на x^{β_1} , $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} & (K_0 a_1(x) x^{\beta_1} + K_1 x^{1-2\beta+\beta_1} + \cos \pi(\beta - \alpha_1) x^{\alpha_1+1-\beta+2\beta_1} (1-x)^{-\alpha_1-1+\beta-\beta_3}) v(x) - \\ & - \frac{\sin \pi(\beta - \alpha_1)}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{\alpha_1+1-\beta} (1-u)^{-\alpha_1-1+\beta-\beta_3} v(u) du}{u-x} = \\ & = -x^{\beta_1} (I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} \frac{g(t)}{A(t)})(x). \end{aligned}$$

Выполнив замену $\omega(u) = u^{\alpha_1+1-\beta} (1-u)^{-\alpha_1-1+\beta-\beta_3} v(u)$, получим характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$c_1(x) \omega(x) + \frac{c_2}{\pi} \int_0^1 \frac{\omega(u) du}{u-x} = c_3(x), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(x) &= K_0 a_1(x) x^{-\alpha_1-1+\beta+\beta_1} (1-x)^{\alpha_1+1-\beta+\beta_3} + \\ &+ K_1 x^{-\alpha_1-\beta+\beta_1} (1-x)^{\alpha_1+1-\beta+\beta_3} + \cos \pi(\beta - \alpha_1) x^{2\beta_1}, \\ c_2 &= -\sin \pi(\beta - \alpha_1), \\ c_3(x) &= -x^{\beta_1} I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} \frac{g(t)}{A(t)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы свели задачу (в смысле разрешимости) к характеристическому сингулярному интегральному уравнению (2.6). Будем предполагать, что выполняется условие

$$c_1^2(x) + c_2^2 \neq 0. \quad (2.7)$$

Пусть $a_1(x) \in H^{\lambda_1}$, $\beta_1 > \alpha_1 + 1 - \beta$, $\beta_3 > -\alpha_1 - 1 + \beta$, тогда в силу того, что $0 < \beta < 1/2$ и $\alpha_1 + 1 - \beta > 0$, имеем $c_1(x) \in H^{\min\{\lambda_1, -\alpha_1-1+\beta+\beta_1, \alpha_1+1-\beta+\beta_3, 2\beta_1\}}$.

Рассмотрим правую часть интегрального уравнения (2.6) $c_3(x)$, которая в данном случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} c_3(x) &= -x^{\beta_1} (I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} \frac{\varphi_2(t)}{A(t)})(x) + \\ &+ K_0 x^{\beta_1} (I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} I_{0+}^{\alpha_1+\beta, \beta_1, \beta-1-\alpha_1} \varphi_1(t))(x). \end{aligned}$$

Пусть $A(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $0 < \alpha_1 + 1 - \beta < \lambda_2 < 1$, тогда в силу предположения $\beta_1 > \alpha_1 + 1 - \beta > 0$, согласно лемме 1.2, имеем

$$(I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} \frac{\varphi_2(t)}{A(t)})(x) \in H^{\min\{\lambda_2-\alpha_1-1+\beta, \beta_1\}}[0, 1].$$

Пусть также $(I_{0+}^{\alpha_1+\beta, \beta_1, \beta-1-\alpha_1} \varphi_1(t))(x) \in H^{\lambda_3}[0, 1]$, $0 < \alpha_1 + 1 - \beta < \lambda_3 < 1$, тогда, согласно лемме 1.2, имеем

$$(I_{0+}^{-\alpha_1-1+\beta, -\beta_1, 0} I_{0+}^{\alpha_1+\beta, \beta_1, \beta-1-\alpha_1} \varphi_1(t))(x) \in H^{\min\{\lambda_3-\alpha_1-1+\beta, \beta_1\}}[0, 1].$$

Таким образом, $c_3(x) \in H^{\min\{\lambda_2-\alpha_1-1+\beta, \lambda_3-\alpha_1-1+\beta, \beta_1\}}$.

Найдем далее

$$G(x) = \frac{c_1(x) - ic_2}{c_1(x) + ic_2} = e^{i\theta(x)}, \theta(x) = \arg G(x);$$

$$G(0) = -1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}.$$

Выберем $\arg G(0) = \pi$, тогда $\arg G(1) = 2\pi(\beta - \alpha_1)$, где $0 < \beta - \alpha_1 < 1$.

Решение уравнения будем искать в классе функций $H^*[0, 1] \cap C[0, 1]$, тогда индекс уравнения

$$\chi = \left[\frac{\theta(1)}{2\pi} \right] = [\beta - \alpha_1] .$$

В силу условия $0 < \beta - \alpha_1 < 1$ индекс уравнения $\chi = 0$. Следуя [2], найдем $\mu_0 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \beta - \alpha_1 - 1$,

$$Z_0(x) = \exp \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{\theta(t)dt}{t-x} + \pi \ln(x) - 2\pi(\beta - \alpha_1) \ln(1-x) \right] .$$

Согласно [2, теорема 30.2] уравнение (2.6) разрешимо единственным образом в классе $H^*[0, 1] \cap C[0, 1]$ и его общее решение дается формулой

$$\omega(x) = \frac{c_1(x)c_3(x)}{c_1^2(x) + c_2^2} - \frac{c_2 Z_0(x)}{\pi(c_1^2(x) + c_2^2)} \int_0^1 \left(\frac{x}{t} \right)^{\mu_0} \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{\mu_1} \frac{c_3(t)dt}{Z_0(t)(t-x)} .$$

Аналогичным образом рассмотрим второй случай. Выражение (2.4) в данном случае примет вид

$$\begin{aligned} & -K_0(I_{1-}^{\alpha_2+\beta, \beta_2, \beta-1-\alpha_2} I_{0+}^{1-2\beta, 0, 2\beta-1} a_1(t)v(t))(x) - \\ & -K_1(I_{1-}^{\alpha_2+1-\beta, \beta_2+2\beta-1, -\alpha_2+\beta-1} v(t))(x) = \frac{g(x)}{B(x)} . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть $\alpha_2 + \beta > 0$, тогда на выражение (2.8) подействуем оператором $I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1}$

$$\begin{aligned} & K_0(I_{0+}^{1-2\beta, 0, 2\beta-1} a_1(t)v(t))(x) - K_1(I_{1-}^{1-2\beta, 2\beta-1, 2\beta-1} v(t))(x) = \\ & = (I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} \frac{g(t)}{B(t)})(x) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

На выражение (2.9) подействуем оператором $I_{0+}^{2\beta-1, 0, 0}$

$$\begin{aligned} & K_0 a_1(x)v(x) - K_1(I_{0+}^{2\beta-1, 0, 0} I_{1-}^{1-2\beta, 2\beta-1, 2\beta-1} v(t))(x) = \\ & = (I_{0+}^{2\beta-1, 0, 0} I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} \frac{g(t)}{B(t)})(x) . \end{aligned}$$

Используя, как и в первом случае, формулу (2.5), получим

$$\begin{aligned} & (K_0 a_1(x) + K_1 \cos 2\pi\beta x^{1-2\beta})v(x) - K_1 \frac{\sin 2\pi\beta}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{1-2\beta}}{u-x} v(u)du = \\ & = (I_{0+}^{2\beta-1, 0, 0} I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} \frac{g(t)}{B(t)})(x) . \end{aligned}$$

Произведя замену $\omega(u) = u^{1-2\beta}v(u)$, придем к характеристическому сингулярному интегральному уравнению относительно функции $\omega(x)$

$$c_1(x)\omega(x) + \frac{c_2}{\pi} \int_0^1 \frac{\omega(u)du}{u-x} = c_3(x), \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(x) &= K_0 a_1(x)x^{2\beta-1} + K_1 \cos 2\pi\beta, \\ c_2 &= -K_1 \sin 2\pi\beta, \\ c_3(x) &= (I_{0+}^{2\beta-1, 0, 0} I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} \frac{g(t)}{B(t)})(x) . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, в этом случае мы также свели задачу (в смысле разрешимости) к характеристическому сингулярному интегральному уравнению (2.10). Будем предполагать, что выполняется условие

$$c_1^2(x) + c_2^2 \neq 0. \quad (2.12)$$

Пусть $a_1(x) = \lambda a_2(x)$, $a_2(x) \in H^{\lambda_1}$, тогда $c_1(x) \in H^{\min\{\lambda_1, 2\beta\}}$.

Рассмотрим правую часть интегрального уравнения (2.10) $c_3(x)$, которая во втором случае будет иметь вид

$$c_3(x) = (I_{0+}^{2\beta-1,0,0} I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} \frac{\varphi_2(t)}{B(t)})(x) - K_0(I_{0+}^{2\beta-1,0,0} I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} I_{1-}^{\alpha_2+\beta, \beta_2, \beta-1-\alpha_2} \varphi_1(t))(x).$$

В силу предположения $\alpha_2 + \beta > 0$, используя известные свойства операторов дробного интегро-дифференцирования, получим

$$c_3(x) = (I_{0+}^{2\beta-1,0,0} I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} \frac{\varphi_2(t)}{B(t)})(x) - K_1(I_{0+}^{2\beta-1,0,0} \varphi_1(t))(x).$$

Пусть $0 < \alpha_2 + \beta < \lambda_2 < 1$, $-\beta_2 < \min\{0, 2\beta\} = 0$, $B(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, тогда согласно лемме 1.2 имеем

$$(I_{1-}^{-\alpha_2-\beta, -\beta_2, 2\beta-1} \frac{\varphi_2(t)}{B(t)})(x) \in H^{\min\{\lambda_2 - \alpha_2 - \beta, \beta_2\}}[0, 1].$$

Пусть также $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_3}[0, 1]$, $0 < 1 - 2\beta < \lambda_3 < 1$, тогда с учетом неравенства $0 < \beta < 1/2$, используя лемму 1.1, получим $(I_{0+}^{2\beta-1,0,0} \varphi_1(t))(x) \in H^{\lambda_3+2\beta-1}[0, 1]$ и $c_3(x) \in H^{\min\{\lambda_2 - \alpha_2 + \beta - 1, \beta_2 + 2\beta - 1, \lambda_3 + 2\beta - 1\}}[0, 1]$.

Найдем далее

$$G(x) = \frac{c_1(x) - ic_2}{c_1(x) + ic_2} = e^{i\theta(x)}, \quad \theta(x) = \arg G(x);$$

$$G(0) = \frac{\cos 2\pi\beta + i \sin 2\pi\beta}{\cos 2\pi\beta - i \sin 2\pi\beta} = e^{i4\pi\beta}.$$

Выберем $\arg G(0) = 4\pi\beta$, где $0 < \beta < 1/2$, тогда

$$\arg G(1) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{K_1 \sin 2\pi\beta}{K_0 a_2(1) + K_1 \cos 2\pi\beta} \right).$$

Решение уравнения будем искать в классе функций $H^*[0, 1] \cap C[0, 1]$, тогда индекс уравнения

$$\chi = \left[\frac{\theta(1)}{2\pi} \right],$$

Пусть $a_2(1) > -\frac{K_1}{K_0} \cos 2\pi\beta$, тогда справедливо неравенство

$$\frac{K_1 \sin 2\pi\beta}{K_0 a_2(1) + K_1 \cos 2\pi\beta} > 0,$$

$0 < \arg G(1) < \pi$ и индекс уравнения $\chi = 0$. Следуя [2] найдем $\mu_0 = 1 - 2\beta$, $\mu_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{K_1 \sin 2\pi\beta}{K_0 a_2(1) + K_1 \cos 2\pi\beta} \right)$,

$$Z_0(x) = \exp \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{\theta(t) dt}{t-x} + 4\pi\beta \ln(x) - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{K_1 \sin 2\pi\beta}{K_0 a_2(1) + K_1 \cos 2\pi\beta} \right) \ln(1-x) \right].$$

Согласно [2, теор. 30.2] уравнение (2.10) разрешимо единственным образом в классе $H^*[0, 1] \cap C[0, 1]$ и его общее решение дается формулой

$$\omega(x) = \frac{c_1(x)c_3(x)}{c_1^2(x) + c_2^2} - \frac{c_2 Z_0(x)}{\pi(c_1^2(x) + c_2^2)} \int_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{\mu_0} \left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\mu_1} \frac{c_3(t)dt}{Z_0(t)(t-x)}.$$

Таким образом, справедливы утверждения.

Теорема 2.1. Пусть $m > 1/2$ и выполнены условия

$1/2 - m < \alpha < 1$, $\forall x \in \bar{J}$ $A(x) \neq 0$, $B(x) = 0$, $C(x) = A(x)$, $\gamma_1 = -\alpha_1 - 1 + \beta$, $\alpha_3 = \alpha_1 + 1 - \beta$, $\gamma_3 = -\alpha_1 - 1 + \beta$, $a_1(x) \in H^{\lambda_1}$, $\beta_1 > \alpha_1 + 1 - \beta$, $\beta_3 > -\alpha_1 - 1 + \beta$, $A(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $0 < \alpha_1 + 1 - \beta < \lambda_2 < 1$, $0 < \alpha_1 + 1 - \beta < \lambda_3 < 1$, $(I_{0+}^{\alpha_1+\beta, \beta_1, \beta-1-\alpha_1} \varphi_1(t))(x) \in H^{\lambda_3}[0, 1]$ и выполняется условие (2.7), тогда задача 1 имеет единственное решение.

Теорема 2.2. Пусть $m \geq 1/2$ и выполнены условия

$1/2 - m < \alpha < 1$, $\forall x \in \bar{J}$ $A(x) = 0$, $B(x) \neq 0$, $C(x) = 0$, $\gamma_2 = -\alpha_2 - 1 + \beta$, $a_1(x) = x a_2(x)$, $a_2(1) > -\frac{K_1}{K_0} \cos 2\pi\beta$, $a_2(x) \in H^{\lambda_1}[0, 1]$, $\beta_2 > 0$, $0 < \alpha_2 + \beta < \lambda_2 < 1$, $0 < 1 - 2\beta < \lambda_3 < 1$, $B(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0, 1]$, $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_3}[0, 1]$ и выполняется условие (2.12), тогда задача 1 имеет единственное решение.

Литература

- [1] Saigo, M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions / M. Saigo // Math. Rep. Kyushu. Univ. – 1978. – Vol. 11. – №2. – P. 135–143.
- [2] Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск, 1987. – 688 с.
- [3] Saigo, M. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces / M. Saigo, A.A. Kilbas // Transform Methods and Special Functions, Sofia 94 (Proceeding of International Workshop). Sci. Cult. Tech. Publ. – Singapore, 1995. – P. 282–293.
- [4] Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- [5] Srivastava, N.M. Multiplication of fractional calculus operators and boundary value problem involving the Euler-Darboux equation / N.M. Srivastava, M. Saigo // J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – Vol. 121. – №2. – P. 325–369.

Поступила в редакцию 18/I/2008;
в окончательном варианте — 18/I/2008.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION

© 2008 O.A. Repin,⁴ R.N. Salikhov⁵

In the paper a nonlocal boundary value problem for a hyperbolic equation with fractional integral operators in boundary conditions is considered. Existence and uniqueness of a solution are proved.

Paper received 18/I/2008.

Paper accepted 18/I/2008.

⁴Repin Oleg Aleksandrovich (matstat@mail.ru), Dept. of Mathematical Statistics, Samara State Economic University, Samara, 443090, Russia.

⁵Salikhov Rustam Nazipovich (salrus@mail.ru), Dept. of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russia.