УДК 517.95

# ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2008 М.Г. Волынская[1]

В этой работе доказана единственность классического решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося гиперболического уравнения в прямоугольной области. Нелокальное условие является интегральным. Доказательство проведено спектральным методом.

## Введение

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Такие задачи служат удобным способом описания условий на искомое решение в тех случаях, когда, например, невозможно непосредственное измерение каких-либо физических величин на границе, но известно их среднее значение внутри области. Последние несколько десятилетий появилось немало работ, в которых исследованы задачи с интегральными условиями, однако неклассические задачи для вырождающихся уравнений остаются, пожалуй, наименее изученными. Вырождающиеся гиперболические уравнения возникают при решении многих важных задач прикладного характера в газовой динамике, теории бесконечно малых колебаний поверхности вращения, безмоментной теории оболочек, что более подробно изложено, например, в [5, 6].

Некоторые нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений с интегральными условиями изучены Л.С. Пулькиной в [7,8]. Доказательство единственности в этих работах базируется на полученной априорной оценке.

Одним из эффективных методов исследования разрешимости нелокальных задач для уравнений смешанного типа является спектральный метод, разработанный Е.И. Моисеевым и изложенный им в монографии [2].

Метод доказательства единственности решения в предложенной работе существенно опирается на статью Е.И. Моисеева [1], в которой доказана разрешимость нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения.

[1]Волынская Мария Геннадьевна (volyn79@mail.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим вырождающееся гиперболическое уравнение:

$$y^m u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1.1}$$

и поставим для него в области $Q = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < a\}$ задачу с граничными условиями:

$$u(0, y) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \tag{1.3}$$

$$u(x, a) = \varphi(x), \tag{1.4}$$

и нелокальным интегральным условием:

$$\int_0^1 u(x, y)dx = 0. \tag{1.5}$$

Под решением задачи (1.1)–(1.5) будем понимать такую функцию $u(x, y) \in C^1(\bar{Q}) \cap$ $\cap C^2(Q)$, которая удовлетворяет в области $Q$ уравнению (1.1) и условиям (1.2)–(1.5).

Условие (1.5) является нелокальным интегральным условием первого рода, то есть не содержит значений искомого решения в точках границы. Сведем его к нелокальному условию другого вида.

**Лемма.** Если функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 \psi(x)dx = 0, \qquad \int_0^1 \varphi(x)dx = 0,$$

то условие (1.5) эквивалентно условию

$$u_x(1, y) = u_x(0, y). \tag{1.6}$$

**Доказательство.** Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1.1)–(1.5). Проинтегрируем уравнение (1.1), учитывая условие (1.5), мы получаем:

$$\int_0^1 u_{yy}(x, y)dx = y^m \int_0^1 u_{xx}(x, y)dx = u_x(1, y) - u_x(0, y) = 0. \tag{1.7}$$

Таким образом, если функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условию (1.5), то эта функция удовлетворяет и условию такого вида:

$$u_x(1, y) - u_x(0, y) = 0. \tag{1.8}$$

Пусть теперь функция $u(x, y)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.8). Проинтегрируем уравнение (1.1) по $x$, и, учитывая условие (1.8), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^1 u(x, y)dx = 0.$$

Тогда, в силу условий согласования, мы приходим к краевой задаче относительно неизвестной функции $v(y) = \int\limits_0^1 u(x,y)dx$:

$$\begin{cases} v_n''(y) = 0, \\ v_n(0) = 0, \\ v_n(a) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Так как задача (1.9) имеет только тривиальное решение, то $\int\limits_0^1 u(x,y)dx{=}0$. Таким образом, если функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условию (1.8), то эта функция удовлетворяет и условию (1.5).
Лемма доказана.

## 2. Основной результат

**Теорема.** Существует не более одного решения задачи (1.1)–(1.5).
**Доказательство.**
Как известно [1], системы функций

$$\{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad 1, \quad \{x\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty} \tag{2.1}$$

и

$$\{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}, \quad 2(1-x), \quad 4\{\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty} \tag{2.2}$$

являются биортонормированными. Кроме того, системы функций (2.1) и (2.2) замкнуты в пространстве $L_2(0,1)$, минимальны в нем и образуют базис Рисса [3].

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (1.1)–(1.5). Рассмотрим системы функций:

$$u_n(y) = \int\limits_0^1 u(x,y)x\sin 2\pi nxdx, \quad n = 1,2...; \tag{2.3}$$

$$u_0(y) = \int\limits_0^1 u(x,y)dx; \tag{2.4}$$

$$v_n(y) = \int\limits_0^1 u(x,y)\cos 2\pi nxdx, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{2.5}$$

Дифференцируя $v_n(y)$ дважды и учитывая уравнение (1.1), получим:

$$v_n''(y) = \int\limits_0^1 u_{yy}(x,y)\cos 2\pi nxdx = y^m \int\limits_0^1 u_{xx}(x,y)\cos 2\pi nxdx.$$

Проинтегрировав дважды по частям последний интеграл и приняв во внимание условие (1.8), будем иметь:

$$y^m \int\limits_0^1 u_{xx}(x,y)\cos 2\pi nxdx = -(2\pi n)^2 y^m \int\limits_0^1 u(x,y)\cos 2\pi nxdx = -(2\pi n)^2 y^m v_n(y).$$

Таким образом, функция $v_n(y)$ удовлетворяет уравнению:

$$v_n''(y) + (2\pi n)^2 y^m v_n(y) = 0 \tag{2.6}$$

и краевым условиям:

$$v_n(0) = \int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nx dx, \tag{2.7}$$

$$v_n(a) = \int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi nx dx. \tag{2.8}$$

Общее решение уравнения (2.6) имеет вид [9. С. 401]:

$$v_n(y) = c_n\sqrt{y}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) + d_n\sqrt{y}J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right), \tag{2.9}$$

где $q = \dfrac{m+2}{2}$.

Применив условия (2.7) и (2.8), найдем из (2.9) постоянные $c_n$ и $d_n$. Для этого удобно использовать представление степенным рядом функций Бесселя [10. С. 240] и записать (2.9) виде:

$$v_n(y) = c_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)^{2k+\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\frac{1}{2q})} + d_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)^{2k-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1-\frac{1}{2q})}. \tag{2.10}$$

Применим условие (2.7) к последнему равенству и заметим, что при $y = 0$ в правой части (2.10) остается единственное ненулевое слагаемое.

Получаем, что

$$v_n(0) = d_n\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{-\frac{1}{2q}}\frac{1}{\Gamma\left(1-\dfrac{1}{2q}\right)} = \int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nx dx,$$

следовательно

$$d_n = \Gamma\left(\frac{2q-1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{\frac{1}{2q}}\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nx dx. \tag{2.11}$$

Далее, из условия (2.8) имеем

$$v_n(a) = c_n\sqrt{a}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right) + \frac{\Gamma\left(\dfrac{2q-1}{2q}\right)(2\pi n)^{\frac{1}{2q}}\sqrt{a}J_{\frac{-1}{2q}}\left(\dfrac{2\pi n a^q}{q}\right)}{q^{\frac{1}{2q}}}\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nx dx,$$

следовательно

$$\begin{aligned} c_n = &\frac{1}{\sqrt{a}J_{\frac{1}{2q}}\left(\dfrac{2\pi n a^q}{q}\right)}\int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi nx dx - \\ &-\frac{\Gamma\left(\frac{2q-1}{2q}\right)(2\pi n)^{\frac{1}{2q}}J_{\frac{-1}{2q}}\left(\dfrac{2\pi n a^q}{q}\right)}{(q)^{\frac{1}{2q}}J_{\frac{1}{2q}}\left(\dfrac{2\pi n a^q}{q}\right)}\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi nx dx.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Итак, решение задачи (2.6)–(2.8) существует, единственно и имеет вид:

$$v_n(y) = \left( \frac{1}{\sqrt{a} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right)} \int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi n x dx - \right.$$
$$- \frac{\Gamma\left(\frac{2q-1}{2q}\right)(2\pi n)^{\frac{1}{2q}} J_{\frac{-1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right)}{(2q)^{\frac{1}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right)} \int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi n x dx \Bigg) \sqrt{y} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) + \tag{2.13}$$
$$+ \frac{\Gamma(\frac{2q-1}{2q})(2\pi n)^{\frac{1}{2q}}}{(2q)^{\frac{1}{2q}}} \int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi n x dx \, \sqrt{y} J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right).$$

Далее получим краевую задачу для функции $u_n(y)$.
Так как в силу уравнения (1.1)

$$u_n''(y) = \int_0^1 u_{yy}(x,y) x \sin 2\pi n x dx = y^m \int_0^1 u_{xx}(x,y) x \sin 2\pi n x dx,$$

то

$$u_n''(y) = 4\pi n y^m v_n(y) - (2\pi n)^2 y^m u_n(y).$$

Учитывая (2.3), (1.3) и (1.4), получим следующую краевую задачу относительно $u_n(y)$:

$$u_n''(y) + (2\pi n)^2 y^m u_n(y) = 4\pi n y^m v_n(y), \tag{2.14}$$

$$u_n(0) = \int_0^1 \psi(x) x \sin 2\pi n x dx, \tag{2.15}$$

$$u_n(a) = \int_0^1 \varphi(x) x \sin 2\pi n x dx. \tag{2.16}$$

Так как представление функции $v_n(y)$ известно, можно записать (2.14) в виде:

$$u_n''(y) + (2\pi n)^2 y^m u_n(y) =$$
$$= 4\pi n y^m \left( c_n \sqrt{y} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) + d_n \sqrt{y} J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)\right),$$

или:

$$u_n''(y) + (2\pi n)^2 y^m u_n(y) =$$
$$= 4\pi n c_n y^{2q-\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) + 4\pi n d_n y^{2q-\frac{3}{2}} J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right), \tag{2.17}$$

так как $m = 2q - 2$ в силу обозначений, сделанных выше.

Исходя из вида правой части уравнения (2.17), будем искать частное решение этого уравнения в виде:

$$u_{n0}(y) = \overline{u}_n(y) + \overline{\overline{u}}_n(y),$$

где $\overline{u}_n(y)$ — частное решение уравнения:

$$u_n''(y) + (2\pi n)^2 y^m u_n(y) = 4\pi n c_n y^{2q-\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right), \tag{2.18}$$

$\overline{\overline{u}}_n(y)$ — частное решение уравнения:

$$u_n''(y) + (2\pi n)^2 y^m u_n(y) = 4\pi n d_n y^{2q-\frac{3}{2}} J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right). \tag{2.19}$$

Будем искать частное решение уравнения (2.18) в виде

$$\overline{u}_n(y) = A y^{q+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2q}-1}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right),$$

где $A$ — неизвестная константа.

Непосредственной подстановкой функции $\overline{u}_n(y)$ в уравнение (2.18) находим, что $A = \dfrac{-c_n}{q}$, где коэффициент $c_n$ определен по формуле (2.12).

Будем искать частное решение уравнения (2.19) в виде

$$\overline{\overline{u}}_n(y) = B y^{q+\frac{1}{2}} J_{1-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right),$$

где $B$ — неизвестная константа.

Непосредственной подстановкой функции $\overline{u}_n(y)$ в уравнение (2.19), находим, что $B = \dfrac{d_n}{q}$, где коэффициент $d_n$ определен по формуле (2.11).

Так как уже найдено общее решение уравнения (2.6), которое имеет вид (2.9), то аналогично запишем общее решение соответствующего (2.14) однородного уравнения:

$$\widetilde{u}_n(y) = a_n \sqrt{y} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) + b_n \sqrt{y} J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right). \tag{2.20}$$

Общее решение уравнения (2.14) имеет вид:

$$u_n(y) = \widetilde{u}_n(y) + u_{n0}(y),$$

т.е.:

$$\begin{gathered} u_n(y) = a_n \sqrt{y} J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) + b_n \sqrt{y} J_{\frac{-1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) - \\ -\frac{c_n}{q} y^{q+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2q}-1}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right) + \frac{d_n}{q} y^{q+\frac{1}{2}} J_{1-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Для нахождения неизвестных констант $a_n$ и $b_n$ вновь будем использовать представление степенным рядом функций Бесселя [10. С. 240) и запишем (2.21) в виде:

$$\begin{gathered} u_n(y) = a_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)^{2k+\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2q}\right)} + \\ + b_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2\pi n y^q}{2q}\right)^{2k-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+1-\frac{1}{2q}\right)} + u_{n0}(y). \end{gathered} \tag{2.22}$$

Применим условие (2.15) к последнему равенству и заметим, что при $y = 0$ в правой части (2.22) остается единственное ненулевое слагаемое.

Получаем

$$u_n(0) = b_n\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{-\frac{1}{2q}}\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2q}\right)} = \int_0^1 \psi(x)x\sin 2\pi nx dx,$$

следовательно

$$b_n = \Gamma\left(\frac{2q-1}{2q}\right)\cdot\left(\frac{2\pi n}{q}\right)^{\frac{1}{2q}}\int_0^1 \psi(x)x\sin 2\pi nx dx. \tag{2.23}$$

Далее, из условия (2.16) получаем:

$$u_n(a) = a_n\sqrt{a}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right) + b_n\sqrt{a}J_{\frac{-1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right) + u_{n0}(a) =$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)x\sin 2\pi nx dx,$$

следовательно

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{a}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right)}\left[\int_0^1 x\varphi(x)\sin 2\pi nx dx + \frac{c_n}{q}a^{q+\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2q}-1}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{d_n}{q}a^{q+\frac{1}{2}}J_{1-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right) - b_n\sqrt{a}J_{\frac{-1}{2q}}\left(\frac{2\pi n a^q}{q}\right)\right]. \tag{2.24}$$

В силу отмеченных свойств систем функций (2.1) и (2.2) решение задачи (1.1)–(1.5), если оно существует, можно записать в виде биортогонального ряда:

$$u(x,y) = 4\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)(1-x)\cos 2\pi nx + 4\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\sin 2\pi nx + 2u_0(y)(1-x),$$

т.е.:

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sqrt{y}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)(1-x)\cos 2\pi nx + \\ & +4\sum_{n=1}^{\infty} d_n\sqrt{y}J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)(1-x)\cos 2\pi nx + \\ & +4\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{y}J_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)\sin 2\pi nx + \\ & +4\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sqrt{y}J_{-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)\sin 2\pi nx - \\ & -4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{q}y^{q+\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2q}-1}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)\sin 2\pi nx + \\ & +4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{q}y^{q+\frac{1}{2}}J_{1-\frac{1}{2q}}\left(\frac{2\pi n y^q}{q}\right)\sin 2\pi nx; \end{aligned} \tag{2.25}$$

где коэффециенты $c_n$, $d_n$, $a_n$ и $b_n$ находятся по формулам (2.12), (2.11), (2.24) и (2.23) соответственно.

Пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ — два различных решения задачи (1.1)–(1.5), тогда функция $u(x,y)$=$u_1(x,y) - u_2(x,y)$ будет решением поставленной задачи при $\psi(x)$=0 и $\varphi(x)$=0.

Из формулы (2.25) сразу следует единственность задачи (1.1)-(1.5), так как если $\psi(x) = 0$ и $\varphi(x) = 0$ на отрезке $[0, 1]$, то $u_n(y) = 0$ для $n = 1, 2\ldots$ и $v_n(y) = 0$ для $n = 0, 1, 2\ldots$ на отрезке $[0,\ a]$. Таким образом, в силу полноты системы (2.1) функция $u(x, y) = 0$ в области $Q$. Следовательно, единственность решения поставленной задачи доказана.

## Литература

[1] Моисеев, Е.И., О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи / Е.И. Моисеев. // Дифференц. уравнения. 1999. – Т. 35. – №8. – С. 1094–1100.

[2] Моисеев, Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И. Моисеев. – М.: Издательство Московского Университета, 1988. – 152 с.

[3] Ильин, В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М.В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов / В.А. Ильин // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227. – №4. – С. 796–798.

[5] Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

[6] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.В. Смирнов. – М.: Наука, 1970. – 156 с.

[7] Пулькина, Л.С. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51. – №3. – С. 91–96.

[8] Евдокимова, Н.Н. Нелокальная задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения / Н.Н. Евдокимова, Л.С. Пулькина // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 1999. – №2(12). – С. 67–70.

[9] Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

[10] Толстов, А.Н. Ряды Фурье / А.Н. Толстов. – М.: Наука, 1972. – 425 с

Поступила в редакцию 13/*IX*/2007;
в окончательном варианте — 13/*IX*/2007.

# THE UNIQUENESS OF SOLUTION OF A NONLOCAL PROBLEM FOR A DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

 M.G. Volynskaya[2]

The uniqueness of the solution to the nonlocal problem with integral condition for a degenerate hyperbolic equation is proved. The proof is based on a spectral approach.

Paper received 13/*IX*/2007.
Paper accepted 13/*IX*/2007.

[2]Volynskaya Mariya Gennadievna (volyn79@mail.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.