

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА РАВНОБЕДРЕННОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

© 2008 Г.А. Закирова¹ А.И. Седов²

В работе приведены достаточные условия, налагаемые на последовательность комплексных чисел, для которых существует возмущенный оператор Лапласа, порожденный задачей Дирихле на равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Введение

В работе рассматривается следующая обратная задача спектрального анализа: дана последовательность комплексных чисел $\{\xi_l\}_{l=1}^{\infty}$, мало отличающаяся от спектра $\sigma(T)$ оператора T . Требуется доказать существование оператора P такого, что спектр $\sigma(T + P)$ "совпадает" с последовательностью ξ_l .

Обратная задача в данной постановке рассматривалась многими авторами. Однако для операторов с частными производными имеется не так много результатов. Так, в работе [1] был рассмотрен оператор Лапласа T с простым спектром и предложен резольвентный метод, которым было доказано существование и единственность оператора $T+P$. В дальнейшем метод применялся для различных операторов с простым спектром [2–5].

В представленной работе мы применили резольвентный метод для решения обратной задачи для случая оператора T с кратным спектром.

1. Постановка задачи

Пусть $K = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq \pi\}$, $D = \left\{(x, y) : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. В пространстве $L_2(K)$ рассмотрим дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор T_0 , порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial K} = 0.$$

¹Закирова Галия Амрулловна (zakirova81@mail.ru), кафедра математического анализа Магнитогорского государственного университета, 455038, Россия, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 114.

²Седов Андрей Иванович (sedov@masu.ru), кафедра математических методов в экономике Магнитогорского государственного университета, 455038, Россия, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 114.

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta > 1$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Известно [6], что собственным числам $\lambda_{mn} = (m^2 + n^2)^\beta$ оператора T соответствуют собственные функции $v_{mn} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin mx \sin ny - \sin nx \sin my)$, $m > n > 0$, образующие ортонормированный базис в $L_2(K)$. Иногда для удобства упорядоченные по возрастанию собственные числа λ_{mn} и связанные с ними спектральные объекты будем нумеровать одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность v_t собственного числа λ_t , т.е. $\lambda_t = \lambda_t^s = \lambda_t^j$, $s, j = \overline{1, v_t}$.

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L_2(K)$. Обозначим через μ_t собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности.

2. Предварительные сведения

Введем следующие обозначения:

- 1) $r_t = \frac{1}{2} \min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}$, $r_1 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$, $r_0 = \inf_t r_t$;
- 2) $s = \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} r_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} \max_{\lambda \in \gamma_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 + \frac{1}{2^{2k+1}} r_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} \max_{\lambda \in \gamma_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right)$;
- 3) $0 < r < \min\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}s}; r_0\right\}$;
- 4) $R_0(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора T ;
- 5) $\phi_{mn} = \frac{2}{\pi}(\cos mx \cos ny + \cos nx \cos my)$, $m, n = 0, 1, \dots$;
- 6) $\gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_t - \lambda| = r_0\}$;
- 7) $\Omega_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_t - \lambda| \geq r_0\}$, $\Omega = \bigcap_{t=1}^{\infty} \Omega_t$;
- 8) $\|\cdot\|_2$ — норма Гильберта–Шмидта.

Лемма 3.1. Пусть $\|P\| < r_0/2$, тогда оператор $T + P$ — дискретен и его собственные числа μ_t имеют такую же кратность, что и λ_t , причем

- (i) если $R_0(\lambda)$ — оператор Гильберта–Шмидта, то и $R(\lambda)$ — оператор Гильберта–Шмидта,
- (ii) если $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, то $\mu_t^s \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, $s = \overline{1, v_t}$.

Доказательство.

Рассмотрим очевидное операторное тождество, справедливое при всех $\lambda \in \Omega$:

$$T + P - \lambda E = [E + PR_0(\lambda)](T - \lambda E).$$

Так как $\|R_0(\lambda)\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}$, то $\|PR_0(\lambda)\| < \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{r_0} \leq \frac{1}{2}$. Значит, существует линейный ограниченный в L_2 оператор

$$[E + PR_0(\lambda)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [PR_0(\lambda)]^k,$$

причем ряд сходится по норме равномерно по $\lambda \in \Omega$ и $\|(E + PR_0(\lambda))^{-1}\| \leq 2$.

Тогда всюду на Ω существует линейный ограниченный оператор

$$R(\lambda) = (T + P - \lambda E)^{-1} = R_0(\lambda)[E + PR_0(\lambda)]^{-1}.$$

Отсюда следует, что $R(\lambda)$ — оператор Гильберта–Шмидта, и для него справедливо разложение в сходящийся по норме ряд

$$R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_0(\lambda) [PR_0(\lambda)]^k, \quad \lambda \in \Omega.$$

Так как $R(\lambda)$ — компактный оператор в L_2 , то оператор $T + P$ дискретен. Норма разности проекторов Рисса при любом $t \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} [R(\lambda) - R_0(\lambda)] d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_t} \|R(\lambda)\| \cdot \|PR_0(\lambda)\| |d\lambda| < \frac{1}{2\pi} 2\pi r_t \frac{2}{r_0} \cdot \frac{1}{2} \leq 1,$$

поэтому все корневые подпространства оператора $T + P$ имеют такую же размерность, как и у оператора T .

Кроме того, если $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, то $\mu_t^s \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, $s = \overline{1, v_t}$.

Лемма доказана.

Теорема 3.1. Если $\beta > 1$, $\|P\| < \frac{r_t}{2}$, то имеет место спектральное тождество

$$\sum_{s=1}^{v_t} \mu_t^s = v_t \lambda_t + \sum_{s=1}^{v_t} (P v_t^s, v_t^s) + \alpha_t(p),$$

где

$$\alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} [R(\lambda) [PR_0(\lambda)]^2] d\lambda.$$

Доказательство. Поскольку $\beta > 1$, то $\sum_{m>n>0} \frac{1}{\lambda_{mn}} < \infty$, а значит, $R_0(\lambda)$ ядерный, $\lambda \in \Omega$. Рассмотрим операторное тождество

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)PR_0(\lambda) + R(\lambda)[PR_0(\lambda)]^2, \quad \lambda \in \Omega.$$

Возьмем след от обеих частей данного тождества, затем умножим его на $\frac{\lambda_t - \lambda}{2\pi i}$ и проинтегрируем по окружности γ_t . Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} R(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} R_0(\lambda) d\lambda - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} [R_0(\lambda)PR_0(\lambda)] d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} [R(\lambda)[PR_0(\lambda)]^2] d\lambda. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся теоремой В.Б. Лидского о равенстве матричного и спектрального следов ядерного оператора и ортонормированностью собственных функций операторов T и $T + P$. Получим при всех $\lambda \in \Omega$

$$\operatorname{Sp} R(\lambda) = \sum_{m>n>0} (R(\lambda) u_{mn}, u_{mn}) = \sum_{m>n>0} \frac{1}{\mu_{mn} - \lambda}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Sp} R_0(\lambda) = \sum_{m>n>0} (R_0(\lambda) v_{mn}, v_{mn}) = \sum_{m>n>0} \frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda}. \quad (2.2)$$

В силу сходимости рядов $\sum_{m>n>0} \frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda}$, $\sum_{m>n>0} \frac{1}{\mu_{mn} - \lambda}$ и ограниченности контура γ_t ряды в правых частях равенств (2.1), (2.2) сходятся равномерно по λ из γ_t ,

при любом $t \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} R(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \sum_{m>n>0}^{\infty} \frac{\lambda_t - \lambda}{\mu_{mn} - \lambda} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m>n>0}^{\infty} \int_{\gamma_t} \frac{\lambda_t - \lambda}{\mu_{mn} - \lambda} d\lambda = \sum_{s=1}^{v_t} (\mu_t^s - \lambda_t). \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} R_0(\lambda) d\lambda = 0.$$

Используя равенство $(R_0(\lambda)PR_0(\lambda)v_{mn}, v_{mn}) = \frac{(Pv_{mn}, v_{mn})}{(\lambda_{mn} - \lambda)^2}$, справедливое при всех $\lambda \in \Omega$, получаем

$$\operatorname{Sp}(R_0(\lambda)PR_0(\lambda))d\lambda = \sum_{m>n>0}^{\infty} \frac{(Pv_{mn}, v_{mn})}{(\lambda_{mn} - \lambda)^2}. \quad (2.3)$$

Так как $R_0(\lambda)$ — ядерный, ряд (2.3) сходится равномерно по $\lambda \in \Omega$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp}(R_0(\lambda)PR_0(\lambda))d\lambda &= \\ &= \sum_{m>n>0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{(\lambda_t - \lambda)(Pv_{mn}, v_{mn})}{(\lambda_{mn} - \lambda)^2} d\lambda = \sum_{s=1}^{v_t} (Pv_t^s, v_t^s). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Лемма 3.2. Если $\|P_j\| \leq r/2$, $0 < r \leq r_0$, $j = 1, 2$, то

$$|\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)| \leq \frac{3\sqrt{2}}{\pi} rr_t \|p_1 - p_2\|_{L_2(K)} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2. \quad (2.4)$$

Доказательство.

Введем обозначение $R_j(\lambda) = (T + P_j - \lambda E)^{-1}$, $j = 1, 2$.

Оценим разность

$$\begin{aligned} |\alpha_t(p_1) - \alpha_t(p_2)| &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_t} (\lambda_t - \lambda) \operatorname{Sp} [R_1(\lambda)(P_1R_0(\lambda))^2 - R_2(\lambda)(P_2R_0(\lambda))^2] d\lambda \right| \leq \\ &\leq r_t \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_1(\lambda)(P_1R_0(\lambda))^2 - R_2(\lambda)(P_2R_0(\lambda))^2\|_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При $\lambda \in \gamma_t$ имеем

$$\begin{aligned} R_1(\lambda)[P_1R_0(\lambda)]^2 - R_2(\lambda)[P_2R_0(\lambda)]^2 &= [R_1(\lambda) - R_2(\lambda)][P_1R_0(\lambda)]^2 + \\ &+ R_2(\lambda)[P_1R_0(\lambda)(P_1 - P_2)R_0(\lambda) + (P_1 - P_2)R_0(\lambda)P_2R_0(\lambda)]. \end{aligned}$$

Используя тождество Гильберта, получим

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) - R_2(\lambda) &= R_1(\lambda)(P_2 - P_1)R_2(\lambda) = \\ &= R_1(\lambda)(P_2 - P_1)R_0(\lambda) + R_1(\lambda)(P_1 - P_2)R_2(\lambda)P_2R_0(\lambda). \end{aligned}$$

Учитывая неравенства $\|R_j(\lambda)\| \leq 2\|R_0(\lambda)\|$, $j = 1, 2$ и $\|AB\|_1 \leq \|A\|_2\|B\|_2$, а также очевидное равенство $\|P\| = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\|p\|_{L_2(K)}$, получим

$$\begin{aligned}
& \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_1(\lambda)[P_1 R_0(\lambda)]^2 - R_2(\lambda)[P_2 R_0(\lambda)]^2\|_1 \leq \\
& \leq \max_{\lambda \in \gamma_t} \left(\|R_1(\lambda)\| \cdot \|(P_1 - P_2)R_0(\lambda)\|_2 \|P_1 R_0(\lambda)\| \cdot \|P_1 R_0(\lambda)\|_2 + \right. \\
& \quad \left. + \|R_1(\lambda)\| \cdot \|(P_2 - P_1)R_0(\lambda)\|_2 \|P_2 R_0(\lambda)\| \cdot \|P_1 R_0(\lambda)\| \cdot \|P_1 R_0(\lambda)\|_2 + \right. \\
& \quad \left. + \|R_2(\lambda)\| \cdot \|P_1 R_0(\lambda)\|_2 \|(P_1 - P_2)R_0(\lambda)\|_2 + \right. \\
& \quad \left. + \|R_2(\lambda)\| \cdot \|(P_1 - P_2)R_0(\lambda)\|_2 \|P_2 R_0(\lambda)\|_2 \right) \leq \\
& \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{r^2}{2r_t^2} + \frac{r^3}{2r_t^3} + \frac{2r}{r_t} \right) \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \|p_1 - p_2\| \leq \\
& \leq \frac{3\sqrt{2}r}{\pi r_t} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \|p_1 - p_2\|_{L_2(K)}.
\end{aligned}$$

Так как $\frac{r}{r_t} < 1$, то, подставляя полученное в (2.5), имеем (2.4).

Лемма доказана.

Очевидно, что ряд

$$\begin{aligned}
& \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} r_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} \max_{\lambda \in \gamma_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2^{2k+1}} r_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} \max_{\lambda \in \gamma_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right)
\end{aligned}$$

сходится. Обозначим его сумму через s .

3. Основной результат

Теорема 4.1. Пусть $\beta > 2$, $r \in \left(0, \min \left\{r_0, \frac{1}{3\sqrt{2}s}\right\}\right)$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_{mn}\}$ выполняется неравенство:

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{\pi} \sum_{m>n>0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (\xi_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} - \lambda_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2^{2k+1}} (\xi_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} - \lambda_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}) \right| < \frac{r}{2} (1 - 3\sqrt{2}s),
\end{aligned}$$

то существует функция $p \in L_{\infty}(K)$ такая, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m^2+n^2=\lambda_t} \left(\mu_{mn} - \frac{1}{2} \mu_{m+n, m-n} \right) = \sum_{m^2+n^2=\lambda_t} \left(\xi_{mn} - \frac{1}{2} \xi_{m+n, m-n} \right), \quad (3.1)$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_{mn}\}$.

Доказательство.

В пространстве $L_{\infty}(D)$ рассмотрим уравнение

$$p = \alpha_0 - \alpha(p), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \sum_{m>n>0} (p, \varphi_{2m,2n}) \varphi_{2m,2n}; \\ \alpha_0 &= \pi \sum_{m>n>0} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \left[\xi_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} - \lambda_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\xi_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} - \lambda_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}) \right] \right\} \varphi_{2m,2n}; \\ \alpha(p) &= \pi \sum_{m>n>0} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \left(\alpha_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} - \frac{1}{2} \alpha_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} \right) \right\} \frac{\varphi_{2m,2n}}{v_{mn}}. \end{aligned}$$

Введем оператор $A : L_{\infty}(D) \rightarrow L_{\infty}(D)$, определяемый равенством

$$Ap = \alpha_0 - \alpha(p).$$

Так как при условиях теоремы выполняется неравенство

$$\|Ap\| \leq \|\alpha_0\| + \|\alpha(p)\| \leq \frac{r}{2}(1 - 3\sqrt{2}sr) + 3\sqrt{2}sr \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2},$$

то оператор A отображает замкнутый шар $U(0, \frac{r}{2})$ в себя.

Покажем, что оператор A сжимающий. Имеем

$$\begin{aligned} \|Ap_1 - Ap_2\|_{L_{\infty}(D)} &= \|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\|_{L_{\infty}(D)} \leq \\ &\leq \pi \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{2k}} [\alpha_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}(p_1) - \alpha_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}(p_2)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^{2k+1}} [\alpha_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}(p_1) - \alpha_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}(p_2)] \right| \times \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |\varphi_{2m,2n}| \leq \\ &\leq 3\sqrt{2}r \|p_1 - p_2\|_{L_{\infty}(K)} \sum_{m>n>0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} r_{2^k(m+n), 2^k(m-n)} \times \right. \\ &\quad \times \max_{\lambda \in \gamma_{2^k(m+n), 2^k(m-n)}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 + \frac{1}{2^{2k+1}} r_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n} \max_{\lambda \in \gamma_{2^{k+1}m, 2^{k+1}n}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \Big) = \\ &= 3\sqrt{2}rs \|p_1 - p_2\|_{L_{\infty}(D)}. \end{aligned}$$

По принципу С.Банаха уравнение (3.2) имеет единственное решение p . Из уравнения (3.2) видно, что p удовлетворяет свойству:

$$p(\pi - x, y) = p(\pi - y, x).$$

Расширим область определения функции p до K , доопределив ее по свойствам:

- (i) $p(x, y) = p(\pi - x, y)$ при $(x, y) \in D_1$, $D_1 = \{(x, y) : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x\}$;
- (ii) $p(x, y) = p(x, \pi - y)$ при $(x, y) \in D_2$, $D_2 = \{(x, y) : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \pi - x \leq y \leq \pi\}$.

Определим оператор P , действующий в $L_2(K)$, следующим образом:

$$Pv(x, y) = p(x, y)v(x, y),$$

где p — решение уравнения (3.2). В силу леммы 1 оператор $T + P$ дискретный, и его собственные числа μ_l также можно занумеровать двойным натуральным индексом, т.е. $\sigma(T + P) = \{\mu_{mn}\}$.

Покажем, что это решение p и есть искомый потенциал, т.е. для него выполняется (3.1).

По теореме 1 имеем:

$$\sum_{m^2+n^2=\lambda_l} \mu_{mn} = \sum_{m^2+n^2=\lambda_l} \lambda_{mn} + \sum_{m^2+n^2=\lambda_l} (Pv_{mn}, v_{mn}) + \alpha_{mn}(p).$$

Преобразуем (Pv_{mn}, v_{mn}) .

$$\begin{aligned}
(Pv_{mn}, v_{mn})_{L_2(K)} &= \\
&= \frac{4}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) (\sin mx \sin ny - \sin nx \sin my)^2 dx dy = \\
&= \frac{4}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) (\sin^2 mx \sin^2 ny - \\
&- 2 \sin mx \sin ny \sin nx \sin my + \sin^2 nx \sin^2 my) dx dy = \\
&= \frac{4}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) \sin^2 mx \sin^2 ny dx dy - \\
&- \frac{8}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) \sin mx \sin ny \sin nx \sin my dx dy + \\
&+ \frac{4}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) \sin^2 nx \sin^2 my dx dy = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) (1 - \cos 2mx) (1 - \cos 2ny) dx dy - \\
&- \frac{8}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) (\sin mx \sin nx) (\sin my \sin ny) dx dy + \\
&+ \frac{1}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) (1 - \cos 2nx) (1 - \cos 2my) dx dy = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) \cos 2mx \cos 2ny dx dy - \\
&- \frac{2}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \times \\
&\times [\cos(m-n)y - \cos(m+n)y] dx dy + \\
&+ \frac{1}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) \cos 2nx \cos 2my dx dy = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) (\cos 2mx \cos 2ny + \cos 2nx \cos 2my) dx dy - \\
&- \frac{2}{\pi^2} \int \int_K p(x, y) [\cos(m-n)x \cos(m-n)y - \\
&- \cos(m-n)x \cos(m+n)y - \cos(m+n)x \cos(m-n)y + \\
&+ \cos(m+n)x \cos(m+n)y] dx dy = \\
&= \frac{1}{2\pi} (p, \phi_{2m, 2n})_{L_2(D)} + \frac{1}{\pi} (p, \phi_{m+n, m-n})_{L_2(D)},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$(p, \phi_{2m, 2n})_{L_2(D)} = 2\pi (Pv_{mn}, v_{mn})_{L_2(K)} - 2(p, \phi_{m+n, m-n})_{L_2(D)}.$$

Обозначим $a_{mn} = (Pv_{mn}, v_{mn})_{L_2(K)}$, $p_{mn} = (p, \phi_{mn})_{L_2(D)}$ и перепишем (3.3) в виде

$$a_{mn} = \frac{1}{2\pi} p_{2m, 2n} + \frac{1}{\pi} p_{m+n, m-n}. \tag{3.4}$$

Отсюда имеем два следующих равенства:

$$a_{m+n, m-n} = \frac{1}{2\pi} p_{2(m+n), 2(m-n)} + \frac{1}{\pi} p_{2m, 2n}$$

и

$$\frac{1}{2} a_{2m, 2n} = \frac{1}{4\pi} p_{4m, 4n} + \frac{1}{2\pi} p_{2(m+n), 2(m-n)}.$$

Используя их, получим ряд.

$$\begin{aligned}
p_{2m,2n} &= \pi a_{m+n,m-n} - \frac{\pi}{2} a_{2m,2n} + \frac{1}{4} p_{4m,4n} = \\
&= \pi a_{m+n,m-n} - \frac{\pi}{2} a_{2m,2n} + \frac{1}{4} p_{2(2m),2(2n)} = \\
&= \pi a_{m+n,m-n} - \frac{\pi}{2} a_{2m,2n} + \frac{1}{4} (\pi a_{2(m+n),2(m-n)} - \frac{\pi}{2} a_{4m,4n} + \frac{1}{4\pi} p_{8m,8n}) = \\
&= \pi a_{m+n,m-n} + \frac{\pi}{4} a_{2(m+n),2(m-n)} - \frac{\pi}{2} a_{2m,2n} - \frac{\pi}{8} a_{4m,4n} + \frac{1}{16} p_{2(4m),2(4n)} = \\
&= \pi a_{m+n,m-n} + \frac{\pi}{4} a_{2(m+n),2(m-n)} - \frac{\pi}{2} a_{2m,2n} - \frac{\pi}{8} a_{4m,4n} + \\
&\quad + \frac{1}{16} (\pi a_{4(m+n),4(m-n)} - \frac{\pi}{2} a_{8m,8n} + \frac{1}{4} p_{16m,16n}) = \dots \\
\dots &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (a_{2^k(m+n),2^k(m-n)} - \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} a_{2^{k+1}m,2^{k+1}n}) = \\
&= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (a_{2^k(m+n),2^k(m-n)} - \frac{1}{2} a_{2^{k+1}m,2^{k+1}n}) = \\
&= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (a_{2^k(m+n),2^k(m-n)} - \frac{1}{2} a_{2^{k+1}m,2^{k+1}n}).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(p, \phi_{2m,2n}) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} (a_{2^k(m+n),2^k(m-n)} - \frac{1}{2} a_{2^{k+1}m,2^{k+1}n}).$$

Из (3.3) имеем:

$$(Pv_{m+n,m-n}, v_{m+n,m-n}) = \frac{1}{2\pi} p_{2(m+n),2(m-n)} + \frac{1}{\pi} p_{2m,2n}$$

и

$$(Pv_{2m,2n}, v_{2m,2n}) = \frac{1}{2\pi} p_{4m,4n} + \frac{1}{\pi} p_{2(m+n),2(m-n)}.$$

Исключим слагаемое $p_{2(m+n),2(m-n)}$:

$$\begin{aligned}
(Pv_{m+n,m-n}, v_{m+n,m-n}) - \frac{1}{2} (Pv_{2m,2n}, v_{2m,2n}) &= \frac{1}{\pi} p_{2m,2n} - \frac{1}{4\pi} p_{4m,4n}, \\
(Pv_{m+n,m-n}, v_{m+n,m-n}) - \frac{1}{2} (Pv_{2m,2n}, v_{2m,2n}) &= \xi_{m+n,m-n} - \lambda_{m+n,m-n} - \\
&\quad - \frac{1}{2} (\xi_{2m,2n} - \lambda_{2m,2n}) - (\alpha_{m+n,m-n} - \frac{1}{2} \alpha_{2m,2n}), \\
\sum_{(m+n)^2 + (m-n)^2 = \lambda_l} (\mu_{m+n,m-n} - \xi_{m+n,m-n}) &= \frac{1}{2} \sum_{(m+n)^2 + (m-n)^2 = \lambda_l} (\mu_{2m,2n} - \xi_{2m,2n}), \\
\sum_{m^2 + n^2 = \lambda_l} (\mu_{mn} - \frac{1}{2} \mu_{m+n,m-n}) &= \sum_{m^2 + n^2 = \lambda_l} (\xi_{mn} - \frac{1}{2} \xi_{m+n,m-n}).
\end{aligned}$$

Замечание 3.1. Если под единственностью понимать класс операторов, удовлетворяющих свойству (3.1), то можно говорить о единственности решения.

Литература

- [1] Дубровский, В.В. К обратной задаче для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // ДУ. – 1990. – Т. 26. – №9. – С. 1563–1567.
- [2] Дубровский, В.В. Терема существования в обратной задаче спектрального анализа / В.В. Дубровский // ДУ. – 1997. – Т. 33. – №12. – С. 1702–1703.
- [3] Дубровский, В.В. Восстановление потенциала по собственным значениям разных задач / В.В. Дубровский // УМН. – 1996. – Т. 51. – №4(310). – С. 155–156.
- [4] Дубровский, В.В. Обратная задача для степени оператора Лапласа с потенциалом из L_2 / В.В. Дубровский, А.В. Нагорный // ДУ. – 1992. – Т. 28. – №9. – С. 1552–1561.
- [5] Седов, А.И. Обратная задача спектрального анализа для одного дифференциального оператора в частных производных с неядерной резольвентой / А.И. Седов, В.В. Дубровский // Электромагнитные волны & электронные системы. – 2005. – Т. 10. – №1–2. – С. 4–9.
- [6] Шестопал, А.Ф. Геометрия оператора Лапласа / А.Ф. Шестопал. – К.: Выща шк., 1991. – 159 с.

Поступила в редакцию 24/I/2008;
в окончательном варианте — 25/I/2008.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR IN THE ISOSCELES RECTANGULAR TRIANGLE

© 2008 G.A. Zakirova³ A.I. Sedov⁴

The paper is devoted to an inverse problem for the Laplace operator with the multiple spectrum. The sufficient conditions for the existence and uniqueness solution of this problem are obtained.

Paper received 24/I/2008.

Paper accepted 25/I/2008.

³Zakirova Galiya Amrullova (zakirova81@mail.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Magnitogorsk State University, Magnitogorsk, 455038, Russia.

⁴Sedov Andrey Ivanovich (sedov@masu.ru), Dept. of Mathematical Methods in Economics, Magnitogorsk State University.