УДК 517.956.25

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2008 З.С. Демина[1]

В работе рассматриваются обобщенные решения квазилинейного уравнения, определенные в кольцевой области. Приведена теорема, содержащая оценку протяженности поверхности, являющейся графиком решения рассматриваемого уравнения.

1. Основные определения и обозначения

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Символом $\mathrm{Lip}_0(\Omega)$ обозначим множество функций класса $\mathrm{Lip}(\Omega)$ с компактными носителями. Будем говорить, что функция $u(x)$ класса $\mathrm{Lip}(\Omega)$ является обобщенным решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a(|\nabla u|^2) \delta^{ij} u_{x_j} \right) = 0, \tag{1}$$

где $a(s)$ — абсолютно непрерывная функция, определенная на интервале $0 \leqslant s < S$, если для любой неотрицательной функции $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_0(\Omega)$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a(|\nabla u|^2) \delta^{ij} u_{x_j} \right) dx = 0.$$

Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, $\chi = (x, t)$ — точка в $\mathbf{R}^{n+1}$ и $F \subset \mathbf{R}^{n+1}$ — график обобщенного решения $u(x) : \Omega \setminus \overline{\Omega}_0 \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ уравнения (1), где множество Ω — ограничено и $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. При этом $u\big|_{\partial\Omega_0} = t_0$, $u\big|_{\partial\Omega} = T$, $t_0 < T$.

Обозначим $S_r = \{x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0 : |x - x_0| = r\}$, где x_0 — некоторая внутренняя точка Ω_0. Пусть $r_0 = \max\limits_{x \in \partial\Omega_0} |x - x_0|, R = \max\limits_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|$ — радиусы областей Ω_0 и Ω относительно x_0 соответственно. Обозначим также $\Sigma(t) = \{x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0 : u(x) = t\}$, $\tau(F)$ — множество точек t, для которых сечения $\Sigma(t)$ не пусты. В дальнейшем изложении $\Pi(t)$ — гиперплоскость, проходящая через точку t ортогонально оси Ot. Далее будем рассматривать также функцию $m(r) = \min\limits_{S_r} u(x)$.

[1]Демина Зоя Сергеевна (zsdemina@yandex.ru), кафедра математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

2. Предварительные результаты

Заметим, что применяя методику, изложенную в [2], можно показать, что при выполнении условий $a(s) > 0$, $a'(s) \leqslant 0$, $-2sa'(s) < a(s)$ или $a(s) > 0$, $a'(s) \geqslant 0$ для уравнения (1) в ограниченной области справедливы сильный принцип максимума и теорема единственности.

Лемма 1. Пусть функция $u(x)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области $\Omega \setminus \overline{\Omega}_0$ и пусть выполнены условия:

(i) $a(s)$ — абсолютно непрерывная функция переменной s;

(ii) всюду на $[0, S)$ выполнено $a(s) > 0$, $a'(s) \leqslant 0$, $-2sa'(s) < a(s)$ или $a(s) > 0$, $a'(s) \geqslant 0$.

Тогда существует обратная к $m(r)$, выпуклая вниз функция $r(t)$, определенная на интервале $\tau(F)$.

Доказательство. Так как в области $\Omega\setminus\overline{\Omega}_0$ выполнен сильный принцип максимума, то функция $m(r)$ не может достигать локального минимума во внутренней точке интервала $[r_0, R]$ и r_0 ($m(r_0) = t_0$) — точка минимума функции $m(r)$. Покажем, что $m(r)$ монотонно возрастает. Предположим противоположное

– либо в некоторой внутренней точке интервала $[r_0, R]$ функция $m(r)$ достигает локального минимума, что противоречит сильному принципу максимума;

– либо в некоторой внутренней точке интервала $[r_0, R]$ функция $m(r)$ достигает своего максимального значения, большего или равного T, что невозможно в силу справедливости сильного принципа максимума для обобщенного решения;

– либо на некотором интервале $[r_1, r_2] \subset [r_0, R]$, функция $m(r)$ принимает постоянное значение, большее, чем t_0 и меньшее, чем T. Тогда, рассматривая интервал $[r_1, R]$ приходим к рассмотренному ранее случаю.

Так как $m(r)$ — монотонна, то существует обратная к ней монотонная функция $r(t)$, определенная на интервале $\tau(F)$. Покажем, что $r(t)$ выпукла вниз на $\tau(F)$. Предположим обратное, тогда существуют точки a, ξ, b из промежутка $\tau(F)$ такие, что $a < \xi < b$ и

$$r(\xi) > \frac{\xi - a}{b - a}(r(b) - r(a)) + r(a) \equiv f(\xi).$$

Рассмотрим коническую поверхность $C \subset \mathbf{R}^{n+1}$, полученную вращением графика линейной функции $f(t)$ вокруг оси Ot. Пусть $\tilde{\chi} \in \Sigma(\xi)$ — точка на поверхности F, расстояние от которой до оси Ot равно $r(\xi)$. Точка $\tilde{\chi}$ расположена вне конуса C и существует гиперплоскость W, заданная функцией $w(x)$, отделяющая точку $\tilde{\chi}$ от C. Так как $f(a) = r(a)$ и $f(b) = r(b)$, то "шапочка" Δ, срезанная с поверхности F гиперплоскостью W и содержащая точку $\tilde{\chi}$, заключена между гиперплоскостями $\Pi(a)$ и $\Pi(b)$. Ее граница $\partial\Delta$ лежит на гиперплоскости W и компактна. Положим $\Omega' = \{x \in \Omega \setminus \overline{\Omega}_0 : (x, u(x)) \in \Delta\}$, при этом $w(x) < u(x)\big|_{\Omega'}$ и $u = w\big|_{\partial\Omega'}$.

Функция $w(x)$ является линейной, следовательно удовлетворяет в области Ω' уравнению (1). По теореме единственности: $u \equiv w\big|_{\Omega'}$. Приходим к противоречию. Таким образом, $r(t)$ выпукла вниз на $\tau(F)$.

Лемма 2. Пусть функция $u(x)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области $\Omega\setminus\overline{\Omega}_0$ и пусть выполнены условия (i)–(ii) леммы 1, тогда $r(t)$ есть функция класса $W^2_{1,loc}$ на $\tau(F)$, удовлетворяющая почти всюду на данном интервале дифференциальному неравенству

$$r'(t)r''(t)\left(r'^2(t)+2\frac{a'\left(\frac{1}{r'^2(t)}\right)}{a\left(\frac{1}{r'^2(t)}\right)}\right)\geqslant(n-1)\frac{r'^5(t)}{r(t)}. \tag{2}$$

Доказательство. Так как по лемме 1 график функции $r(t)$ является выпуклым вниз на $\tau(F)$, то $r(t)$ принадлежит классу $W^2_{1,loc}$ на $\tau(F)$ [3].

Рассмотрим радиально симметричную функцию $v(x)=m(|x-x_0|)\leqslant u(x)$. Для любого радиуса r существует такая точка $x^*\in S_r$, что $m(r)=v(x^*)=u(x^*)$. Следовательно [1],

$$\nabla v(x^*)=\nabla u(x^*),\qquad \triangle v(x^*)\leqslant\triangle u(x^*). \tag{3}$$

Так как $|\nabla u(x^*)|^2=m_r'^2=\dfrac{1}{r_t'^2}$, то при $a'\leqslant 0$, $a>0$ выполнено $r'^2>-\dfrac{2a'}{a}$, а при $a'\geqslant 0$, $a>0$, соответственно, $r'^2\geqslant 0$.

Рассмотрим случай $a'\leqslant 0$, $a>0$, $r'>\sqrt{-\dfrac{2a'}{a}}$. С учетом (3), имеем:

$$Qm(r)=Qv\Big|_{x=x^*}\leqslant\nabla a(|\nabla u|^2)\nabla u+a(|\nabla u|^2)\triangle u\Big|_{x=x^*}=0. \tag{4}$$

Откуда, в силу существования у функции $r(t)$ в точке t непрерывных первой и второй производных, получаем неравенство (2).

Случай $a'\geqslant 0$, $a>0$, $r'\geqslant 0$ аналогичен рассмотренному выше.

3. Основной результат

Теорема 1. Пусть функция $u(x)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области $\Omega\setminus\overline{\Omega}_0$, выполнены условия (i)–(ii) леммы 1 и условие
(iii) $\lim\limits_{s\to S}\sqrt{s}a(s)=\lambda>0$, где S — точная верхняя грань множества допустимых значений переменной s, при которых выполнены условия (i)–(ii).

Тогда $r_0>0$ и выполняется неравенство

$$\int_{r_0}^{R} b\left(\lambda\left(\frac{r_0}{r(\tau)}\right)^{n-1}\right)dr\geqslant T-t_0,$$

где $b(\alpha)$ — функция, обратная к $\alpha(s)=\sqrt{s}a(s)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $a'\leqslant 0$, $a>0$, $r'>\sqrt{-\dfrac{2a'}{a}}$.

Так как по лемме 1 функция $r(t)$ выпукла вниз, то ее производная $r'(t)$ возрастает. Кроме этого $r'(t)>\sqrt{-\dfrac{2a'}{a}}>0$, то есть возрастает и сама функция $r(t)$. Таким образом существует единственная точка t_0 — крайняя левая точка интервала $\tau(F)$ — в которой достигается наименьшее значение r_0. Изучим сначала ситуацию, в которой $r_0>0$.

По лемме 2 функция $r(t)$ удовлетворяет почти всюду неравенству (2), из которого получим

$$2\frac{r'(t)r''(t)}{r'^2(t)}-2\left(\ln\left(a\left(\frac{1}{r'^2(t)}\right)\right)\right)'_t\geqslant 2(n-1)\frac{r'(t)}{r(t)}>0. \tag{5}$$

Функция $\ln\left(r'^2(\tau)\right) + \ln\left(a^{-2}\left(\frac{1}{r'^2(\tau)}\right)\right)$ монотонна, следовательно, ее производная суммируема [4] и на основании соотношения (5), получаем

$$\frac{r'(\tau)}{a\left(\frac{1}{r'^2(\tau)}\right)} \geqslant \frac{r^{n-1}(\tau)r'_0}{r_0^{n-1}a\left(\frac{1}{r_0'^2}\right)} \qquad (\tau \geqslant t_0). \tag{6}$$

Заметим, что $[\sqrt{s}a(s)]'_s > 0$. То есть функция $\alpha(s) = \sqrt{s}a(s)$ монотонно возрастает и непрерывна, следовательно, существует обратная к ней монотонно возрастающая функция $b(\alpha)$.

С учетом (iii) из (6) получим

$$b\left(\lambda\left(\frac{r_0}{r(\tau)}\right)^{n-1}\right) \geqslant \frac{1}{r'(\tau)} \qquad (\tau \geqslant t_0). \tag{7}$$

Интегрируя (7) при $\tau = T$ получим

$$\int\limits_{r_0}^{R} b\left(\lambda\left(\frac{r_0}{r(\tau)}\right)^{n-1}\right) dr \geqslant T - t_0. \tag{8}$$

Покажем, что $r_0 \neq 0$. Предположим обратное. Тогда t_0 может являться только левой концевой точкой промежутка $\tau(F)$. Зафиксируем произвольно точку $\widetilde{t_0} > t_0$ и рассмотрим поверхность $\widetilde{F}$, отсекаемую от F гиперплоскостью $\Pi(\widetilde{t_0})$ и расположенную в $\mathbf{R}^{n+1}$, выше $\Pi(\widetilde{t_0})$. Наименьшее значение $\widetilde{r_0}$ достигается в точке $\widetilde{t_0}$. Воспользуемся неравенством (8) применительно к $\widetilde{F}$ и переходя в полученном соотношении к пределу при $\widetilde{t_0} \to t_0$, получаем $|T - t_0| \leqslant 0$, что невозможно.

Случай $a' \geqslant 0$, $a > 0$, $r' \geqslant 0$ аналогичен рассмотренному выше.

Литература

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 512 с.

[2] Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

[3] Гольдштейн, В.М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк. М.: Наука. 1983. 284 с.

[4] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.

Поступила в редакцию 19/*III*/2008;
в окончательном варианте — 19/*III*/2008.

ISOLATED SINGULARITIES OF SOLUTIONS OF QUASILINEAR EQUATIONS[2]

© 2008 Z.S. Demina[3]

A quasilinear equation with a solution defined at curvilinear ring is discussed. A theorem which contains an estimation for extension of the surface representing the solution of the equation is proved.

Paper received 19/*III*/2008.
Paper accepted 19/*III*/2008.

---

[2]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. NN.
[3]Demina Zoya Sergeevna (zsdemina@yandex.ru), Dept. of Mathematical Analysis and Theory of Functions , Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russia.