УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

© 2008 Н.В. Бейлина[2]

В работе рассматривается задача для псевдогиперболического уравнения с интегральными условиями. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

Введение

В последнее время появилось значительное количество работ, посвященных исследованию нелокальных задач. Подобные задачи возникают при математическом моделировании процессов различной природы, например, влагопереноса, теплопроводности, при изучении задач математической биологии, задач управления и других. Одним из классов таких задач являются нелокальные задачи с интегральными условиями. Эти условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Ранее задачи с интегральными условиями на плоскости и в пространстве для параболических уравнений исследованы в [1, 5], для гиперболических в [2, 6, 8, 10].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c(x,t)u(x,t) - \alpha u_{xxt}(x,t) = f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $Q = (0,l)\times(0,T)$ и поставим для него задачу: найти в Q решение уравнения (1.1) с условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.2}$$

$$u_x(0,t) - \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0, \tag{1.3}$$

$$u_x(l,t) - \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0. \tag{1.4}$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С. Пулькиной.

[2]Бейлина Наталья Викторовна (natalie@samdiff.ru), кафедра математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Функции $K_1(x)$, $K_2(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы в $[0,l]$; $c(x,t)$, $f(x,t)$ заданы в $\overline{Q}$, $\alpha > 0$ — число.

Введем пространство $V = \{u(x,t) : u(x,t) \in W_2^2(Q), u_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)\}$.

Теорема. Если $K_i(x) \in C^2[0,l]$, $c(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $0 \leqslant c_0 \leqslant c(x,t) \leqslant c_1$, $\max\limits_{\overline{Q}} |c_t(x,t)| \leqslant c_2$, $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $\varphi(x) \in W_2^2(0,l)$, $\psi(x) \in W_2^1(0,l)$, $\int\limits_0^l K_i^2(x)dx < \dfrac{1}{2l^2}$, то существует единственное решение задачи (1.1)–(1.4), принадлежащее пространству V.

2. Доказательство

Определим оператор

$$Bu \equiv u(x,t) - \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi K_2(\xi')u(\xi',t)d\xi'd\xi + \int\limits_x^l \int\limits_\xi^l K_1(\xi')u(\xi',t)d\xi'd\xi.$$

Обозначим $Bu = v$, $\Phi(x,t,u) = BLu - LBu$. Заметим, что если $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), то функция $v(x,t)$ удовлетворяет условию

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти в Q решение уравнения

$$Lv + \Phi(x,t,u) = g(x,t), \tag{2.1}$$

удовлетворяющее условиям:

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \tag{2.2}$$

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \tag{2.3}$$

где $g(x,t)$ принадлежит тому же классу, что и функция $f(x,t)$.

Доказательство существования решения вспомогательной задачи проведем методом продолжения по параметру.

Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство задач:

$$Lv + \lambda\Phi(x,t,u) = g(x,t) \tag{2.4}$$

с условиями (2.2) и (2.3).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых задача (2.4), (2.2), (2.3) разрешима в пространстве V для любых функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$, удовлетворяющих условиям теоремы.

Множество Λ не пусто, поскольку в работе [3] доказано, что при $\lambda = 0$ существует единственное решения задачи (2.4), (2.2), (2.3), принадлежащее пространству V.

Докажем, что множество Λ открыто и замкнуто. Для этого получим априорную оценку.

Умножим уравнение (2.4) на функцию $v_t(x,t)$ и результат проинтегрируем по $Q_\tau = (0,l)\times(0,\tau)$, где $\tau \in (0,t)$, $t \leqslant T$. После элементарных преобразований получим следующее равенство:

$$\int\limits_0^l \left[v_t^2(x,\tau) + v_x^2(x,\tau) + c(x,\tau)v^2(x,\tau)\right]dx + 2\alpha \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l v_{xt}^2(x,t)dxdt+$$

$$+2\lambda\int_0^\tau\int_0^l \Phi(x,t,u)v_t(x,t)dxdt = 2\int_0^\tau\int_0^l g(x,t)v_t(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^l \Big(c(x,0)v_0^2(x) + v_0'^2(x) + c_t(x,t)v_1^2(x)\Big)dx.$$

Применив неравенство Юнга и учитывая условие $0 \leqslant c_0 \leqslant c(x,t) \leqslant c_1$, получим неравенство:

$$m_0\int_0^l \Big[v_t^2(x,\tau) + v_x^2(x,\tau) + v^2(x,\tau)\Big]dx + 2\alpha\int_0^\tau\int_0^l v_{xt}^2(x,t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau\int_0^l \Phi^2(x,t,u)dxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l c_t(x,t)v_t^2(x,t)dxdt+ \tag{2.5}$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l g^2(x,t)dxdt + M_0\int_0^l \Big(v_0^2(x) + v_0'^2(x) + v_1^2(x)\Big)dx,$$

где $m_0 = \min\{1, c_0\}$, $M_0 = \max\{1, c_1\}$.

Теперь умножим обе части уравнения (2.4) на функцию $-\alpha v_{xxt}(x,t)$ и результат проинтегрируем по Q_τ. После элементарных преобразований получим

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^l v_{xx}^2(x,\tau)dx + \alpha^2\int_0^\tau\int_0^l v_{xxt}^2(x,t)dxdt =$$

$$= \alpha\int_0^\tau\int_0^l v_{tt}(x,t)v_{xxt}(x,t)dxdt + \alpha\int_0^\tau\int_0^l c(x,t)v(x,t)v_{xxt}(x,t)dxdt-$$

$$-\alpha\int_0^\tau\int_0^l g(x,t)v_{xxt}(x,t)dxdt + \alpha\lambda\int_0^\tau\int_0^l \Phi v_{xxt}(x,t)dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_0^l v''^2_0(x)dx.$$

Применяя неравенство Юнга, получим

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^l v_{xx}^2(x,\tau)dx + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l v_{xxt}^2(x,t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\tau\int_0^l v_{tt}^2(x,t)dxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l c^2(x,t)v^2(x,t)dxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l \Phi^2 dxdt+ \tag{2.6}$$

$$+2\int_0^\tau\int_0^l g^2(x,t)dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_0^l v''^2_0(x)dx.$$

Для того, чтобы оценить первое слагаемое, стоящее в правой части (2.6), умножим (2.4) на $u_{tt}(x,t)$ и проинтегрируем по Q_τ. После преобразований и применения неравенства Юнга получим

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l v_{tt}^2(x,t)dxdt+\frac{\alpha}{2}\int_0^l v_{xt}^2(x,\tau)dx\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\tau\int_0^l v_{xx}^2(x,t)dxdt+2\int_0^\tau\int_0^l c^2(x,t)u^2(x,t)dxdt+2\int_0^\tau\int_0^l \Phi^2dxdt+ \tag{2.7}$$
$$+2\int_0^\tau\int_0^l g^2(x,t)dxdt+\frac{\alpha}{2}\int_0^l v_1'^2(x)dx.$$

С учетом (2.7) неравенство (2.6) примет вид

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^l v_{xx}^2(x,\tau)dx+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_0^l v_{xxt}^2(x,t)dxdt\leqslant$$
$$\leqslant 8\int_0^\tau\int_0^l v_{xx}^2(x,t)dxdt+10\int_0^\tau\int_0^l c^2(x,t)v(x,t)^2dxdt+10\int_0^\tau\int_0^l \Phi^2dxdt+ \tag{2.8}$$
$$+10\int_0^\tau\int_0^l g^2(x,t)dxdt+2\alpha\int_0^l v_1'^2(x)dx+\frac{\alpha}{2}\int_0^l v_0''^2(x)dx.$$

В правой части (2.5), (2.7), (2.8) неравенств присутствует слагаемое $\int_0^\tau\int_0^l \Phi^2dxdt$, где

$$\Phi(x,t,u)=L\left[\int_0^x\int_0^\xi K_2(\xi')u(\xi',t)d\xi'd\xi\right]-L\left[\int_x^l\int_\xi^l K_1(\xi')u(\xi',t)d\xi'd\xi\right].$$

Оценим его. Для этого заметим, что если выполняется условие $\int_0^l K_i^2(x)dx<\dfrac{1}{2l^2}$, то существуют числа $\mu,\nu>0$ такие, что справедливо неравенство

$$\nu\int_0^l u^2(x,t)dx\leqslant\int_0^l v^2(x,t)dx\leqslant\mu\int_0^l u^2(x,t)dx. \tag{2.9}$$

Используя это неравенство и получив явное представление функции $\Phi(x,t,u)$, нетрудно доказать оценку

$$\|\Phi(x,t,u)\|_{L_2(Q)}\leqslant N_0\|v\|_V,$$

что вместе с неравенствами (2.5), (2.7), (2.8) дает

$$\|v(x,t)\|_V\leqslant N_1\Big(\|v_0(x)\|_{W_2^2(0,l)}+\|v_1(x)\|_{W_2^1(0,l)}+ \\ +\|g(x,t)\|_{L_2(Q)}+\|f(x,t)\|_{L_2(Q)}\Big). \tag{2.10}$$

Из (2.9) можно получить неравенство $\|u(x,t)\|_V\leqslant C_1\|v(x,t)\|_V$, откуда следует

$$\|u(x,t)\|_V\leqslant N_2\Big(\|v_0(x)\|_{W_2^2(0,l)}+\|v_1(x)\|_{W_2^1(0,l)}+ \\ +\|g(x,t)\|_{L_2(Q)}+\|f(x,t)\|_{L_2(Q)}\Big). \tag{2.11}$$

Оценки (2.10), (2.11) позволяют доказать, что множество Λ открыто и замкнуто.

Покажем, что множество Λ открытое. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$; покажем, что $\lambda = \lambda_0 + \hat{\lambda}$, при условии малости $|\hat{\lambda}|$ также принадлежит Λ.

Рассмотрим следующую задачу:

$$Lv + \lambda_0 \Phi(x,t,u) = g(x,t) - \hat{\lambda}\Phi(x,t,w), \quad w(x,t) \in V \tag{2.12}$$

с условиями (2.2) и (2.3).

Заметим, что в силу условий теоремы и вида функции $\Phi(x,t,u)$ $F(x,t) = g(x,t) - \hat{\lambda}\Phi(x,t,w) \in L_2(Q)$, $F_t \in L_2(Q)$. Тогда задача (2.12) (2.2) и (2.3) имеет решение $u(x,t) \in V$ (так как $\lambda_0 \in \Lambda$) для $\forall w(x,t) \in V$. Таким образом, определен оператор $Gw = v$, переводящий V в V. В силу оценки (2.10) этот оператор при малой величине $|\hat{\lambda}|$ сжимающий. Действительно, пусть $w_1, w_2 \in V$, v_1, v_2 — соответствующие им значения оператора G. Тогда для $\overline{w} = w_1 - w_2$, $\overline{v} = v_1 - v_2$, $\overline{u} = u_1 - u_2$ имеют место равенства:

$$L\overline{v} + \lambda_0 \Phi(x,t,\overline{u}) = -\hat{\lambda}\Phi(x,t,\overline{w}),$$

$$\overline{v}_x(0,t) = \overline{v}_x(l,t) = 0,$$

$$\overline{v}(x,0) = \overline{v}_t(x,0) = 0.$$

Из оценки (2.10) и оценки $\Phi(x,t,u)$ следует

$$\|\overline{u}\|_V \leqslant |\hat{\lambda}| C_N \|\overline{w}\|_V.$$

Если $|\hat{\lambda}|C_N < 1$, то G — сжимающий оператор. Неподвижная точка этого оператора $Gu_0 = u_0$ и будет решением задачи

$$L\,(Bu) + \lambda_0 \Phi(x,t,u_0) = g(x,t) - \hat{\lambda}\Phi(x,t,u_0),$$

$$Bu(x,0) = v_0(x),$$

$$(Bu)_t\,(x,0) = v_1(x),$$

$$(Bu)_x\,(0,t) = (Bu)_x\,(l,t) = 0.$$

Все это и означает, что $\lambda_0 + \hat{\lambda} \in \Lambda$.

Для доказательства замкнутости множества Λ возьмем последовательность $\{\lambda_n\}$ элементов множества Λ, сходящуюся к некоторому числу λ_0. Покажем, что $\lambda_0 \in \Lambda$. Каждому числу λ_n соответствует пара функций $u^n(x,t)$, $v^n(x,t)$, принадлежащих пространству V и удовлетворяющих уравнению

$$Lv^n + \lambda_n \Phi(x,t,u^n) = g(x,t) \tag{2.13}$$

и условиям

$$v^n(x,0) = v_0(x), \quad v^n_t(x,0) = v_1(x),$$

$$v^n_x(0,t) = v^n_x(l,t) = 0.$$

Из оценок (2.10) и (2.11) и теорем вложения следует, что существуют подпоследовательности u^{n_k}, v^{n_k}, слабо сходящиеся в $W_2^2(Q)$ соответственно к функциям $u(x,t)$ и $v(x,t)$ из пространства V и, кроме того, $u^{n_k}_{xxt}$ и $v^{n_k}_{xxt}$ слабо сходятся в $L_2(Q)$ соответственно к $u_{xxt}(x,t)$ и $v_{xxt}(x,t)$.

Переходя теперь к пределу в уравнении (2.13) получаем, что функция $v(x,t)$ — решение задачи (2.4), (2.2), (2.3) при $\lambda = \lambda_0$, следовательно, $\lambda_0 \in \Lambda$.

Итак, показано, что Λ одновременно не пусто, открыто и замкнуто, следовательно [9] совпадает с $[0,1]$, что и доказывает разрешимость задачи (2.4), (2.2), (2.3).

Остается показать, что решение вспомогательной (2.1)–(2.3) задачи позволяет найти и решение поставленной задачи (1.1)–(1.4). Так как $\Phi = BLu - LBu$, то $LBu + \Phi = BLu$. Положим $g(x,t) = Bf$. Так как $v = Bu$ — решение вспомогательной задачи, то $LBu + \Phi = g(x,t)$, следовательно, в силу выбора $g(x,t)$ имеем $BLu = Bf$ откуда $Lu = f$ то есть $u(x,t)$ — решение уравнения (1.1). Так как $Bu = v$, то условия (1.3), (1.4) выполняются. Выбор

$$v_0(x) = -\int_0^x \int_0^\xi K_2(\xi')\varphi(\xi')d\xi' d\xi + \int_x^l \int_\xi^l K_1(\xi')\varphi(\xi')d\xi' d\xi + \varphi(x),$$

$$v_1(x) = -\int_0^x \int_0^\xi K_2(\xi')\psi(\xi')d\xi' d\xi + \int_x^l \int_\xi^l K_1(\xi')\psi(\xi')d\xi' d\xi + \psi(x)$$

обеспечивает выполнение условий (1.2).

Единственность решения поставленной задачи (1.1)–(1.4) следует из оценки (2.11).

Литература

[1] Cannon, J.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – V. 21. – №2. – P. 155–160.

[2] Бейлин, С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения / С.А. Бейлин // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. – 2005. – С. 37–43.

[3] Бейлин, С.А. Вторая краевая задача для одного псевдогиперболического уравнения третьего порядка / С.А. Бейлин, Н.В. Бейлина // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – 2007. – Т. 36. – С. 29–31.

[4] Гординг, Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. – М.: Иностр. лит., 1961. – 120 с.

[5] Иванчов, Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Н.И. Иванчов // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – №4. – С. 547–564.

[6] Кожанов, А.И. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений / А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. – №9. – С. 1166–1179.

[7] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

[8] Пулькина, Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74. – В. 3. – С. 435–445.

[9] Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.:Наука, 1980. – 496 с.

[10] Чабакаури, Г.Д. Существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелинейным нелокальным граничным условием / Г.Д. Чабакаури // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – №1. – С. 77–81.

Поступила в редакцию 18/I/2008;
в окончательном варианте — 18/I/2008.

A NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR A THIRD-ORDER PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION[3]

© 2008 N.V. Beilina[4]

In this paper a problem with nonlocal integral conditions for a third-order pseudohyperbolic equation is studied. The existence and uniqueness of the solution is proved by the aid of an a-priory estimate.

Paper received 18/I/2008.
Paper accepted 18/I/2008.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

[4] Beilina Natalya Viktorovna (natalie@samdiff.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.