УДК 517.99

СИСТЕМА ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПЕРВОГО РОДА[1]

© 2008 А.А. Андреев, С.В. Лексина[2]

В работе получены необходимые условия на функции, определяющие начальные и финальные условия, при которых удается решить задачу управления для объектов, процесс колебания которых описывается системой волновых уравнений с граничными условиями первого рода.

1. Предварительные сведения и вводные замечания

Проблемы управления колебательными процессами имеют сравнительно небольшую историю своего развития. Впервые теоретическая постановка задачи об управлении колебаниями в достаточно четкой математической форме, как отмечено в [1], была рассмотрена А.Г. Бутковским [2] в 60 годах XX столетия. В работе Ж.-Л. Лионса [3] была исследована проблема существования граничных управлений в терминах обобщенного класса L_2 решения волнового уравнения.

Волновое уравнение, равно как и системы волновых уравнений, служат математической моделью многих физических процессов, необходимость управлять которыми возникает, как правило, одновременно с изучением этих явлений. Возможности управления обуславливаются наличием точных аналитических решений обратных волновых задач (задач управления).

В последние годы проблеме управления были посвящены исследования В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их последователей [4–12]. В.А. Ильиным в [4–7] доказаны необходимые и достаточные условия на функции, определяющие начальные и финальные условия, при которых удается решить задачу управления колебательным процессом в классе обобщенных решений $\widehat{W}_2^2(Q_{l,T})$ волнового уравнения для $T < \dfrac{l}{\lambda}$ и $T > \dfrac{l}{\lambda}$. Случай $T = \dfrac{l}{\lambda}$ был рассмотрен В.А. Ильиным и В.В. Тихомировым в [11].

В работах [1,12] Л.Н. Знаменской сформулированы и решены задачи управления упругими колебаниями в классе обобщенных решений из L_2, с краевыми условиями первого, второго, третьего родов и со смешанными краевыми условиями, получены необходимые условия существования решений рассмотренных задач, найдены управляющие функции в явном аналитическом виде.

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Андреев Александр Анатольевич (andre@ssu.samara.ru), Лексина Светлана Валентиновна (lesveta@rambler.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Интересные результаты, связанные с этой тематикой, были получены А.В. Боровских в [13,14] для уравнения неоднородной струны

$$p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}[q(x)\frac{\partial u}{\partial x}].$$

Сформулированы условия, позволяющие решить задачу управления, и выписаны граничные управления в явном виде.

В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым в [15] получены новые результаты при решении задачи граничного управления на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0.$$

В работах [16,17] А.И. Егорова и Л.Н. Знаменской решается задача гашения колебаний в системе, состоящей из двух объектов. Колебания одного объекта описываются волновым уравнением с граничными условиями первого рода. Колебания другого объекта описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, содержащими управляющую функцию.

Подробную библиографию, посвященную задаче граничного управления, можно найти в обзоре А.И. Егорова и Л.Н. Знаменской [18], монографии [1].

Целью представленной работы является распространение результатов В.А. Ильина [5,6], полученных для волнового уравнения, на случай объектов, процесс колебания которых описывается системой волновых уравнений, а именно получение решения задачи управления с граничными условиями первого рода. Первые обобщения задачи граничного управления для системы волновых уравнений были представлены в работе [19].

В данной статье рассмотрена система

$$u_{tt} - Au_{xx} = 0, \tag{1.1}$$

в области $Q_{l,T} = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, где A — постоянная, квадратная матрица второго порядка, $u(x,t) = (u_1(x,t)\ \ u_2(x,t))^T$ — вектор-функция.

Пусть

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u_t(x,0) = \psi_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.2}$$

$$u(x,T) = \varphi_2(x), \qquad u_t(x,T) = \psi_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.3}$$

где $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ — две произвольные вектор-функции из классов $C^2[0,l]$, $C^1[0,l]$ соответственно.

Пару вектор-функций $\{u(x,t), u_t(x,t)\}$, заданных на отрезке $[0,l]$ при фиксированном t, следуя [7], будем называть состоянием колебательной системы в момент времени t.

Естественно, возникает задача о существовании и о явном аналитическом представлении граничных управлений первого рода:

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad u(l,t) = \nu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad 0 \leqslant T \leqslant \frac{l}{\lambda}, \tag{1.4}$$

принадлежащих классу $C^2[0,T]$, обеспечивающих переход колебательного процесса из состояния $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ при $t = 0$ в состояние $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ при $t = T$.

В случае, когда собственные значения матрицы A равны и $\Lambda_A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$, результаты представленные в данной статье совпадают с результатами полученными В.А. Ильиным [7] и Л.Н. Знаменской [1].

Решение задачи управления существенно зависит от соотношения длины l и момента времени T. В данной работе рассмотрен случай, когда $0 < T < \dfrac{l}{\lambda}$, получены необходимые и достаточные условия существования и явный вид граничных управлений.

2. Основные результаты

Задача управления колебательным процессом в условиях первой краевой задачи.

Найти дважды непрерывно дифференцируемую в замкнутом прямоугольнике $Q_{l,T}$ вектор-функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую системе (1), начальным условиям (2) и финальным условиям (3). Решение сформулированной задачи ищется как решение краевой задачи с заданными начальными условиями (2) и с такими краевыми условиями, которые обеспечивают выполнение финальных условий (3).

Задача 1.1. Найти вектор-функции $\mu(t), \nu(t) \in C^2[0,T]$ такие, чтобы для решения $u(x,t)$ первой краевой задачи с заданными начальными условиями $[\varphi_1, \psi_1]$ в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия с заданными условиями $[\varphi_2, \psi_2]$.

Пусть $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda^2$ — собственные значения матрицы A, $\Lambda_A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ — диагональный вид матрицы A, $S = (\bar{l}_1 \ \bar{l}_2)^T$ — матрица перехода при диагонализации матрицы A.

Теорема Пусть $0 < T < \dfrac{l}{\lambda}$, функции $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1,2$, удовлетворяют следующим условиям :

1) $\varphi_i(x) \in C^2[0,l]$, $\psi_i(x) \in C^1[0,l]$, $i = 1,2$;

2) $\varphi_i(0) = \varphi_i(l) = 0$, $\psi_i(0) = \psi_i(l) = 0$, $i = 1,2$;

3) справедливы тождества

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\langle \bar{l}_1, \varphi_1'(x)\rangle - \dfrac{1}{2\lambda}\langle \bar{l}_1, \psi_1(x)\rangle + \dfrac{1}{4\lambda^2}\langle \bar{l}_2, \varphi_1'(x)\rangle + \\ \qquad\qquad + \dfrac{x}{4\lambda^2}(\langle \bar{l}_2, \varphi_1''(x)\rangle - \dfrac{1}{\lambda}\langle \bar{l}_2, \psi_1'(x)\rangle) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l - \lambda T; \\ \dfrac{1}{2}\langle \bar{l}_2, \varphi_1'(x)\rangle - \dfrac{1}{2\lambda}\langle \bar{l}_2, \psi_1(x)\rangle = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l - \lambda T; \\ -\dfrac{1}{2}\langle \bar{l}_1, \varphi_1'(x)\rangle - \dfrac{1}{2\lambda}\langle \bar{l}_1, \psi_1(x)\rangle - \dfrac{1}{4\lambda^2}\langle \bar{l}_2, \varphi_1'(x)\rangle + \\ \qquad\qquad + \dfrac{x-l}{4\lambda^2}(\langle \bar{l}_2, \varphi_1''(x)\rangle + \dfrac{1}{\lambda}\langle \bar{l}_2, \psi_1'(x)\rangle) = 0, \quad \lambda T \leqslant x \leqslant l\,; \\ \dfrac{1}{2}\langle \bar{l}_2, \varphi_1'(x)\rangle + \dfrac{1}{2\lambda}\langle \bar{l}_2, \psi_1(x)\rangle = 0, \quad \lambda T \leqslant x \leqslant l\,; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \langle\bar{l}_1,\varphi_2'(x)\rangle+\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_1,\psi_2(x)\rangle+\dfrac{1}{2\lambda^2}\langle\bar{l}_2,\varphi_2'(x)\rangle+ \\ \qquad +\dfrac{x}{2\lambda^2}\{\langle\bar{l}_2,\varphi_2''(x)\rangle+\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\psi_2'(x)\rangle\}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l-\lambda T; \\ \langle\bar{l}_1,\varphi_2'(x)\rangle-\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_1,\psi_2(x)\rangle+\dfrac{1}{2\lambda^2}\langle\bar{l}_2,\varphi_2'(x)\rangle+ \\ \qquad +\dfrac{x-l}{2\lambda^2}\{\langle\bar{l}_2,\varphi_2''(x)\rangle-\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\psi_2'(x)\rangle\}=0,\quad \lambda T\leqslant x\leqslant l; \\ \langle\bar{l}_2,\varphi_2'(x)\rangle+\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\psi_2(x)\rangle,\quad 0\leqslant x\leqslant l-\lambda T; \\ \langle\bar{l}_2,\varphi_2'(x)\rangle-\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\psi_2(x)\rangle,\quad \lambda T\leqslant x\leqslant l, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\langle\bar{l}_i,\varphi_i\rangle$ — операция, задающая скалярное произведение, тогда граничные управления представимы:

$$\mu(t)=S\widetilde{\mu}(t), \tag{2.3}$$

$$\nu(t)=S\widetilde{\nu}(t), \tag{2.4}$$

где $\widetilde{\mu}(t)$, $\widetilde{\nu}(t)$ задаются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \widetilde{\mu}_1(t)=\dfrac{1}{2}\langle\bar{l}_1,\varphi_1(\lambda t)+\varphi_2(\lambda T-\lambda t)\rangle+\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_0^{\lambda t}\langle\bar{l}_1,\psi_1(z)\rangle dz+ \\ \quad +\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{\lambda T-\lambda t}^{0}\langle\bar{l}_1,\psi_2(z)\rangle dz-\dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int\limits_0^{\lambda t}\langle\bar{l}_2,\psi_1(z)\rangle dz- \\ \qquad -\dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int\limits_{\lambda T-\lambda t}^{0}\langle\bar{l}_2,\psi_2(z)\rangle dz+\dfrac{t}{4}\{\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\varphi_1'(\lambda t)\rangle+\dfrac{1}{\lambda^2}\langle\bar{l}_2,\psi_1'(\lambda t)\rangle\}- \\ \qquad\quad -\dfrac{\lambda t-\lambda T}{4\lambda}\{\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\varphi_2'(\lambda T-\lambda t)\rangle-\dfrac{1}{\lambda^2}\langle\bar{l}_2,\psi_2(\lambda T-\lambda t)\rangle\}, \\ \widetilde{\nu}_1(t)=\dfrac{1}{2}\langle\bar{l}_1,\varphi_1(l-\lambda t)+\varphi_2(l+\lambda t-\lambda T)\rangle- \\ \quad -\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{l-\lambda t}^{l}\langle\bar{l}_1,\psi_1(z)\rangle dz-\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{l+\lambda t-\lambda T}^{l}\langle\bar{l}_1,\psi_2(z)\rangle dz- \\ \qquad -\dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int\limits_{l-\lambda t}^{l}\langle\bar{l}_2,\psi_1(z)\rangle dz-\dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int\limits_{l+\lambda t-\lambda T}^{l}\langle\bar{l}_2,\psi_2(z)\rangle dz+ \\ \qquad\quad +\dfrac{t}{4}\{-\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\varphi_1'(l-\lambda t)\rangle-\dfrac{1}{\lambda^2}\langle\bar{l}_2,\psi_1'(l-\lambda t)\rangle\}- \\ \qquad\qquad -\dfrac{\lambda t-\lambda T}{4\lambda}\{-\dfrac{1}{\lambda}\langle\bar{l}_2,\varphi_2'(l+\lambda t-\lambda T)\rangle-\dfrac{1}{\lambda^2}\langle\bar{l}_2,\psi_2(l+\lambda t-\lambda T)\rangle\}, \\ \widetilde{\mu}_2(t)=\dfrac{1}{2}\langle\bar{l}_2,\varphi_1(\lambda t)+\varphi_2(\lambda T-\lambda t)\rangle+ \\ \qquad +\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_0^{\lambda t}\langle\bar{l}_2,\psi_1(z)\rangle dz+\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{\lambda T-\lambda t}^{0}\langle\bar{l}_2,\psi_2(z)\rangle dz, \\ \widetilde{\nu}_2(t)=\dfrac{1}{2}\langle\bar{l}_2,\varphi_1(l-\lambda t)+\varphi_2(l+\lambda t-\lambda T)\rangle- \\ \qquad -\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{l-\lambda t}^{l}\langle\bar{l}_2,\psi_1(z)\rangle dz-\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{l+\lambda t-\lambda T}^{l}\langle\bar{l}_2,\psi_2(z)\rangle dz. \end{cases} \tag{2.5}$$

Для нахождения управляющих функций $\mu(t)$, $\nu(t)$ задачи 1.1, рассмотрим две дополнительные задачи:

задачу о гашении колебаний;

задачу о переводе первоначально покоящейся системы в заданное состояние.

Задача 1.2. Найти вектор-функции $\mu(t)$, $\nu(t) \in C^2[0,T]$ такие, чтобы для решения $u(x,t)$ первой краевой задачи с заданными начальными условиями $[\varphi_1, \psi_1]$ в момент времени $t = T$ выполнялись нулевые финальные условия $u(x,T) = 0$, $u_t(x,T) = 0$.

Задача 1.3. Найти вектор-функции $\mu(t)$, $\nu(t) \in C^2[0,T]$ такие, чтобы для решения $u(x,t)$ первой краевой задачи с нулевыми начальными условиями в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия с заданными функциями $[\varphi_2, \psi_2]$.

Доказательство.

С помощью преобразования $w = S^{-1}u$ система (1) запишется:

$$\left\{ \begin{aligned} w_{1tt} - \lambda^2 w_{1xx} &= w_{2xx}, \\ w_{2tt} - \lambda^2 w_{2xx} &= 0. \end{aligned} \right. \tag{2.6}$$

Условия (2)–(4) в данных обозначениях примут вид

$$\left\{ \begin{aligned} & w(x,0) = S\varphi_1(x) = \widetilde{\varphi}_1(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{11}(x) \\ \widetilde{\varphi}_{21}(x) \end{pmatrix}, \\ & w_t(x,0) = S\psi_1(x) = \widetilde{\psi}_1(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_{11}(x) \\ \widetilde{\psi}_{21}(x) \end{pmatrix}; \end{aligned} \right. \tag{2.7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & w(x,T) = S\varphi_2(x) = \widetilde{\varphi}_2(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{12}(x) \\ \widetilde{\varphi}_{22}(x) \end{pmatrix}, \\ & w_t(x,T) = S\psi_2(x) = \widetilde{\psi}_2(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_{12}(x) \\ \widetilde{\psi}_{22}(x) \end{pmatrix}; \end{aligned} \right. \tag{2.8}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & w(0,t) = S\mu(t) = \widetilde{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}_1(t) \\ \widetilde{\mu}_2(t) \end{pmatrix}, \\ & w(l,t) = S\nu(t) = \widetilde{\nu}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\nu}_1(t) \\ \widetilde{\nu}_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

Рассмотрим решение первой краевой задачи с начальными условиями для системы (2.10):

$$\left\{ \begin{aligned} w_1(x,t) = {} & \frac{\widetilde{\Phi}_{11}(x+\lambda t) + \widetilde{\Phi}_{11}(x-\lambda t)}{2} + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{x-\lambda t}^{x+\lambda t} \widetilde{\Psi}_{11}(s)ds + \\ & + \frac{t}{2\lambda}\left(\frac{\widetilde{\Phi}'_{21}(x+\lambda t) - \widetilde{\Phi}'_{21}(x-\lambda t)}{2} + \frac{\widetilde{\Psi}_{21}(x+\lambda t) + \widetilde{\Psi}'_{21}(x-\lambda t)}{2\lambda} \right) + \\ & + \underline{\widetilde{\mu}}_1\left(\frac{\lambda t - x}{\lambda}\right) + \underline{\widetilde{\nu}}_1\left(\frac{x+\lambda t - l}{\lambda}\right) + \\ & + \frac{x}{2\lambda^3}\underline{\widetilde{\mu}}'_2\left(\frac{\lambda t - x}{\lambda}\right) - \frac{x-l}{2\lambda^3}\underline{\widetilde{\nu}}'_2\left(\frac{x+\lambda t - l}{\lambda}\right) - \frac{1}{4\lambda^3}\int\limits_{x-\lambda t}^{x+\lambda t} \widetilde{\Psi}_{21}(s)ds, \\ w_2(x,t) = {} & \frac{\widetilde{\Phi}_{21}(x+\lambda t) + \widetilde{\Phi}_{21}(x-\lambda t)}{2} + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_{x-\lambda t}^{x+\lambda t} \widetilde{\Psi}_{21}(s)ds + \\ & + \underline{\widetilde{\mu}}_2\left(\frac{\lambda t - x}{\lambda}\right) + \underline{\widetilde{\nu}}_2\left(\frac{x+\lambda t - l}{\lambda}\right). \end{aligned} \right. \tag{2.10}$$

и с финальными условиями:

$$
\begin{cases}
w_1(x,t) = \dfrac{\widetilde{\Phi}_{12}(x+\lambda t-\lambda T)+\widetilde{\Phi}_{12}(x-\lambda t+\lambda T)}{2}+\\
+\dfrac{t-T}{2\lambda}\left(\dfrac{\widetilde{\Phi}'_{22}(x+\lambda t-\lambda T)-\widetilde{\Phi}'_{22}(x-\lambda t+\lambda T)}{2}+\right.\\
\left.+\dfrac{\widetilde{\Psi}_{22}(x+\lambda t-\lambda T)+\widetilde{\Psi}_{22}(x-\lambda t+\lambda T}{2\lambda}\right)+\\
+\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{x-\lambda t+\lambda T}^{x+\lambda t-\lambda T}\widetilde{\Psi}_{12}(s)ds+\underline{\widetilde{\mu}}_1\left(\dfrac{\lambda t+x}{\lambda}\right)+\underline{\widetilde{\nu}}_1\left(\dfrac{l-x+\lambda t}{\lambda}\right)-\\
-\dfrac{x}{2\lambda^3}\underline{\widetilde{\mu}}'_2\left(\dfrac{\lambda t+x}{\lambda}\right)+\dfrac{x-l}{2\lambda^3}\underline{\widetilde{\nu}}'_2\left(\dfrac{l-x+\lambda t}{\lambda}\right)-\dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int\limits_{x-\lambda t+\lambda T}^{x+\lambda t-\lambda T}\widetilde{\Psi}_{22}(s)ds,\\
\\
w_2(x,t) = \dfrac{\widetilde{\Phi}_{22}(x+\lambda t-\lambda T)+\widetilde{\Phi}_{22}(x-\lambda t+\lambda T)}{2}+\\
+\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{x-\lambda t+\lambda T}^{x+\lambda t-\lambda T}\widetilde{\Psi}_{22}(s)ds++\widetilde{\overline{\mu}}_2\left(\dfrac{\lambda t+x}{\lambda}\right)+\widetilde{\overline{\nu}}_2\left(\dfrac{l-x+\lambda t}{\lambda}\right).
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

В равенствах (2.14), (2.15) функции $\widetilde{\Phi}_{ij}$, $\widetilde{\Psi}_{ij}$ — нечетные продолжения функций $\widetilde{\varphi}_{ij},\widetilde{\psi}_{ij}$ относительно точек $x=0$, $x=l$, $i,j=1,2$. Функции $\underline{\widetilde{\mu}}_i$, $\underline{\widetilde{\nu}}_i$, $i=1,2$ удовлетворяют условиям $\underline{\widetilde{\mu}}_i(t)=\widetilde{\mu}_i(t)$ на отрезке $[0,T]$, $\underline{\widetilde{\mu}}_i(0)=0$, $\underline{\widetilde{\mu}}_i(t)\equiv 0$ при $t<0$, аналогичным условиям удовлетворяет и функция $\underline{\widetilde{\nu}}_i$. Функции $\widetilde{\overline{\mu}}_i$, $\widetilde{\overline{\nu}}_i$, $i=1,2$ удовлетворяют условиям $\widetilde{\overline{\mu}}_i(t)=\widetilde{\mu}_i(t)$ на отрезке $[0,T]$, $\widetilde{\overline{\mu}}_i(T)=0$, $\widetilde{\overline{\mu}}_i(t)\equiv 0$ при $t>T$, аналогичным условиям удовлетворяет и функция $\widetilde{\overline{\nu}}_i$

Рассмотрим задачу о гашении колебаний.

Воспользуемся нулевыми финальными условиями: $w_i(x,T)=0$, $w_{it}(x,T)=0$.

Выразим функции, задающие граничные управления $\underline{\widetilde{\mu}}'_i(t)$, $\underline{\widetilde{\nu}}'_i(t)$, $i=1,2$:

$$
\begin{cases}
\underline{\widetilde{\mu}}'_1\left(\dfrac{\lambda T-x}{\lambda}\right)=\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}'_{11}(x-\lambda T)-\dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{11}(x-\lambda T)+\\
+\dfrac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}'_{21}(x-\lambda T)+\dfrac{x-\lambda T}{4\lambda}\left(\widetilde{\Phi}''_{21}(x-\lambda T)-\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}'_{21}(x-\lambda T)\right),\\
\underline{\widetilde{\nu}}'_1\left(\dfrac{x+\lambda T-l}{\lambda}\right)=-\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}'_{11}(x+\lambda T)-\dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{11}(x+\lambda T)-\\
-\dfrac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}'_{21}(x+\lambda T)-\dfrac{x+\lambda T-l}{4\lambda}\left(\widetilde{\Phi}''_{21}(x+\lambda T)+\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}'_{21}(x+\lambda T)\right),\\
\\
\underline{\widetilde{\mu}}'_2(\dfrac{\lambda T-x}{\lambda})=\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}'_{21}(x-\lambda T)-\dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{21}(x-\lambda T),\\
\\
\underline{\widetilde{\nu}}'_1\left(\dfrac{x+\lambda T-l}{\lambda}\right)=-\tfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}'_{21}(x+\lambda T)-\dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{21}(x+\lambda T).
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

Так как $\underline{\widetilde{\mu}}_i(t) \equiv 0$, $\underline{\widetilde{\nu}}_i(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$, имеем:

$\dfrac{\lambda T - x}{\lambda} \leqslant 0$, следовательно, $x \in [\lambda T; l]$;

$T + \dfrac{x - l}{\lambda} \leqslant 0$, следовательно, $x \in [0; l - \lambda T]$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\widetilde{\Phi}'_{11}(x-\lambda T) - \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\Psi}_{11}(x-\lambda T) + \frac{1}{4\lambda^2}\widetilde{\Phi}'_{21}(x-\lambda T) + \\ \quad + \frac{x-\lambda T}{4\lambda^2}\left(\widetilde{\Phi}''_{21}(x-\lambda T) - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}'_{21}(x-\lambda T)\right) = 0, \qquad \lambda T \leqslant x \leqslant l, \\ \frac{1}{2}\widetilde{\Phi}'_{21}(x-\lambda T) - \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\Psi}_{21}(x-\lambda T) = 0, \qquad \lambda T \leqslant x \leqslant l, \\ -\frac{1}{2}\widetilde{\Phi}'_{11}(x+\lambda T) - \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\Psi}_{11}(x+\lambda T) - \frac{1}{4\lambda^2}\widetilde{\Phi}'_{21}(x+\lambda T) - \\ \quad - \frac{x+\lambda T - l}{4\lambda^2}\left(\widetilde{\Phi}''_{21}(x+\lambda T) + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}'_{21}(x+\lambda T)\right) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l - \lambda T, \\ \frac{1}{2}\widetilde{\Phi}'_{21}(x+\lambda T) + \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\Psi}_{21}(x+\lambda T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l - \lambda T. \end{cases} \tag{2.13}$$

В системе (2.17) воспользуемся свойствами продолжения функций $\widetilde{\Phi}_{i1}$, $\widetilde{\Psi}_{i1}$, $i = 1, 2$ на отрезки $[-l; 0]$, $[l; 2l]$, учитывая, что $x - \lambda T \in [0; l]$, $x + \lambda T \in [\lambda T; l]$, и выполним замену $x - \lambda T \to x \in [0; l - \lambda T]$, $x + \lambda T \to x \in [\lambda T; l]$, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}'_{11}(x) - \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\psi}_{11}(x) + \frac{1}{4\lambda^2}\widetilde{\varphi}'_{21}(x) + \\ \qquad + \frac{x}{4\lambda^2}\left(\widetilde{\varphi}''_{21}(x) - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}'_{21}(x)\right) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l - \lambda T, \\ \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}'_{21}(x) - \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\psi}_{21}(x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l - \lambda T, \\ -\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}'_{11}(x) - \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\psi}_{11}(x) - \frac{1}{4\lambda^2}\widetilde{\varphi}'_{21}(x) + \\ \qquad + \frac{x-l}{4\lambda^2}\left(\widetilde{\varphi}''_{21}(x) + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}'_{21}(x)\right) = 0, \qquad \lambda T \leqslant x \leqslant l, \\ \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}'_{21}(x) + \frac{1}{2\lambda}\widetilde{\psi}_{21}(x) = 0, \qquad \lambda T \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{2.14}$$

Система (2.18) задает необходимые условия существования граничных управлений $\underline{\widetilde{\mu}}_i, \underline{\widetilde{\nu}}_i$, $i = 1, 2$ в условиях задачи 1.2.

Получим явный вид граничных управлений $\underline{\widetilde{\mu}}_i, \underline{\widetilde{\nu}}_i$, $i = 1, 2$, для этого в системе

(2.16) выполним замены $z = \dfrac{\lambda T - x}{\lambda}$, $z = T + \dfrac{x-l}{\lambda}$:

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\mu}}_1'(z) = \dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{11}'(-\lambda z) - \dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{11}(-\lambda z) + \dfrac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}_{21}'(-\lambda z) - \\ \qquad - \dfrac{\lambda z}{4\lambda}\left(\widetilde{\Phi}_{21}''(-\lambda z) - \dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}_{21}'(-\lambda z)\right), \\ \underline{\widetilde{\nu}}_1'(z) = -\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{11}'(\lambda z + l) - \dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{11}(\lambda z + l) - \dfrac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}_{21}'(\lambda z + l) - \\ \qquad - \dfrac{\lambda z}{4\lambda}\left(\widetilde{\Phi}_{21}''(\lambda z + l) + \dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}_{21}'(\lambda z + l)\right), \\ \underline{\widetilde{\mu}}_2'(z) = \dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{21}'(-\lambda z) - \dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{21}(-\lambda z), \\ \underline{\widetilde{\nu}}_2'(z) = -\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{21}'(\lambda z + l) - \dfrac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{21}(\lambda z + l). \end{cases} \tag{2.15}$$

Воспользуемся свойствами продолжения функций $\widetilde{\Phi}_{i1}$, $\widetilde{\Psi}_{i1}$, $i = 1, 2$ на отрезки $[-l; 0]$, $[l; 2l]$, проинтегрируем равенства системы (2.19) по z в пределах от 0 до t. Используя условия согласования начальных и граничных условий, получаем управляющие функции в условиях задачи о гашении колебаний:

$$\begin{cases} \underline{\widetilde{\mu}}_1(t) = \dfrac{\widetilde{\varphi}_{11}(\lambda t)}{2} + \dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_0^{\lambda t}\widetilde{\psi}_{11}(z)dz - \dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int_0^{\lambda t}\widetilde{\psi}_{21}\psi_{21}(z)dz + \\ \qquad + \dfrac{t}{4}\left\{\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}_{21}'(\lambda t) + \dfrac{1}{\lambda^2}\widetilde{\psi}_{21}(\lambda t)\right\}, \\ \underline{\widetilde{\nu}}_1(t) = \dfrac{\widetilde{\varphi}_{11}(l - \lambda t)}{2} + \dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_{l-\lambda t}^{l}\widetilde{\psi}_{11}(z)dz + \dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int_{l-\lambda}^{l}\widetilde{\psi}_{21}\psi_{21}(z)dz + \\ \qquad + \dfrac{t}{4}\left\{\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}_{21}'(l - \lambda t) + \dfrac{1}{\lambda^2}\widetilde{\psi}_{21}(l - \lambda t)\right\}, \\ \underline{\widetilde{\mu}}_2(t) = \dfrac{\widetilde{\varphi}_{21}(\lambda t)}{2} + \dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_0^{\lambda t}\widetilde{\psi}_{21}(z)dz, \\ \underline{\widetilde{\nu}}_2(t) = \dfrac{\widetilde{\varphi}_{21}(l - \lambda t)}{2} + \dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_{l-\lambda t}^{l}\widetilde{\psi}_{21}(z)dz. \end{cases} \tag{2.16}$$

Рассмотрим задачу о переводе покоящейся системы в заданное состояние.

Воспользуемся нулевыми начальными условиями: $w_i(x, 0) = 0$, $w_{it}(x, 0) = 0$. Выразим функции, задающие граничные упраления $\widetilde{\widetilde{\mu}}_i$, $\widetilde{\widetilde{\nu}}_i$ $i=1,2$:

$$\begin{cases} \widetilde{\widetilde{\mu}}_1'(\frac{x}{\lambda}) = -\frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{12}'(x-\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{12}(x-\lambda T) - \frac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}_{22}'(x-\lambda T) - \\ \qquad -\frac{x-\lambda T}{4\lambda}\left\{\widetilde{\Phi}_{22}''(x-\lambda T) + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}_{22}'(x-\lambda T)\right\}, \\ \widetilde{\widetilde{\nu}}_1'(\frac{l-x}{\lambda}) = \frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{12}'(x+\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{12}(x+\lambda T) + \frac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}_{22}'(x+\lambda T) + \\ \qquad +\frac{x-l+\lambda T}{4\lambda}\left\{\widetilde{\Phi}_{22}''(x+\lambda T) - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}_{22}'(x+\lambda T)\right\}, \\ \widetilde{\widetilde{\mu}}_2'(\frac{x}{\lambda}) = -\frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{22}'(x-\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{22}(x-\lambda T), \\ \widetilde{\widetilde{\nu}}_2'(\frac{l-x}{\lambda}) = \frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{22}'(x+\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{22}(x+\lambda T). \end{cases} \tag{2.17}$$

Так как $\widetilde{\widetilde{\mu}}_i(t) \equiv 0$, $\widetilde{\widetilde{\nu}}_i(t) \equiv 0$, $i=1,2$, для $t \geqslant T$, следовательно,

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{12}'(x-\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{12}(x-\lambda T) - \frac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}_{22}'(x-\lambda T) - \\ \qquad -\frac{x-\lambda T}{4\lambda}\left\{\widetilde{\Phi}_{22}''(x-\lambda T) + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}_{22}'(x-\lambda T)\right\} = 0, \;\; \lambda T \leqslant x \leqslant l, \\ \frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{12}'(x+\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{12}(x+\lambda T) + \frac{1}{4\lambda}\widetilde{\Phi}_{22}'(x+\lambda T) + \\ \qquad +\frac{x-l+\lambda T}{4\lambda}\left\{\widetilde{\Phi}_{22}''(x+\lambda T) - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Psi}_{22}'(x+\lambda T)\right\} = 0, \;\; 0 \leqslant x \leqslant l-\lambda T, \\ -\frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{22}'(x-\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{22}(x-\lambda T), \;\; \lambda T \leqslant x \leqslant l, \\ \frac{\lambda}{2}\widetilde{\Phi}_{22}'(x+\lambda T) - \frac{1}{2}\widetilde{\Psi}_{22}(x+\lambda T), \;\; 0 \leqslant x \leqslant l-\lambda T. \end{cases} \tag{2.18}$$

Используем свойства продолжения функций $\widetilde{\Phi}_{i2}$, $\widetilde{\Psi}_{i2}$, $i=1,2$ относительно точек $x=0$ и $x=l$ и выполним в системе (2.22) замены $x-\lambda T \to x \in [0;\; l-\lambda T]$ и $x+\lambda T \to x \in [\lambda T;\; l]$, получим:

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_{12}'(x) + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}_{12}(x) + \frac{1}{2\lambda^2}\widetilde{\varphi}_{22}'(x) + \\ \qquad + \frac{x}{2\lambda^2}\{\widetilde{\varphi}_{22}''(x) + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}_{22}'(x)\} = 0, \;\; 0 \leqslant x \leqslant l-\lambda T, \\ \widetilde{\varphi}_{12}'(x) - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}_{12}(x) + \frac{1}{2\lambda^2}\widetilde{\varphi}_{22}'(x) + \\ \qquad + \frac{x-l}{2\lambda^2}\{\widetilde{\varphi}_{22}''(x) - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}_{22}'(x)\} = 0, \qquad \lambda T \leqslant x \leqslant l, \\ \widetilde{\varphi}_{22}'(x) + \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}_{22}(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l-\lambda T, \\ \widetilde{\varphi}_{22}'(x) - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}_{22}(x), \qquad \lambda T \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{2.19}$$

Система (2.23) задает необходимые условия существования граничных управлений в условиях первой краевой задачи с финальными условиями.

В (2.21) сделаем замены $z = \dfrac{x}{\lambda}$ и $z = \dfrac{l-x}{\lambda}$ соответственно. Воспользуемся свойствами продолжения функций $\widetilde{\Phi}_{i2}$, $\widetilde{\Psi}_{i2}$, $i=1,2$ относительно точек $x=0$ и $x=l$, учитывая, что $\lambda(z-T)\in[-\lambda T;\ \ l-\lambda T]$ и $l-\lambda(z-T)\in[\lambda T;\ \ l+\lambda T]$:

$$\begin{cases}
\widetilde{\overline{\mu}}'_1(z)=-\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\varphi}'_{12}(\lambda T-\lambda z)+\dfrac{1}{2}\widetilde{\psi}_{12}\,(\lambda T-\lambda z)-\dfrac{1}{4\lambda}\widetilde{\varphi}'_{22}(\lambda T-\lambda z)-\\
\qquad-\dfrac{\lambda z-\lambda T}{4\lambda}\{-\widetilde{\varphi}''_{22}(\lambda T-\lambda z)+\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}'_{22}(\lambda T-\lambda z)\},\\
\widetilde{\overline{\nu}}'_1(z)=\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\varphi}'_{12}(l+\lambda z-\lambda T)+\dfrac{1}{2}\widetilde{\psi}_{12}(l+\lambda z-\lambda T)+\\
\qquad+\dfrac{1}{4\lambda}\widetilde{\varphi}'_{22}(l+\lambda z-\lambda T)+\dfrac{-\lambda z+\lambda T}{4\lambda}\{-\widetilde{\varphi}''_{22}(l+\lambda z-\lambda T)-\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\psi}'_{22}(l+\lambda z-\lambda T)\},\\
\widetilde{\overline{\mu}}'_2(z)=-\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\varphi}'_{22}(-\lambda z+\lambda T)+\dfrac{1}{2}\widetilde{\psi}_{22}(-\lambda z+\lambda T),\\
\widetilde{\overline{\nu}}'_2(z)=\dfrac{\lambda}{2}\widetilde{\varphi}'_{22}(l+\lambda z-\lambda T)+\dfrac{1}{2}\widetilde{\psi}_{22}(l+\lambda z-\lambda T).
\end{cases}\tag{2.20}$$

Проинтегрируем равенства системы (2.24) по z в пределах от t до T. Используя условия согласования финальных и граничных условий, получаем управляющие функции в условиях задачи о переводе покоящейся системы в заданное состояние:

$$\begin{cases}
\widetilde{\overline{\mu}}_1(t)=\dfrac{\widetilde{\varphi}_{12}(\lambda T-\lambda t)}{2}+\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{\lambda T-\lambda t}^{0}\widetilde{\psi}_{12}(z)dz-\dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int\limits_{\lambda T-\lambda t}^{0}\widetilde{\psi}_{22}(z)dz-\\
\qquad-\dfrac{\lambda t-\lambda T}{4\lambda}\left\{\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}'(\lambda T-\lambda t)-\dfrac{1}{\lambda^2}\widetilde{\psi}_{22}(\lambda T-\lambda t)\right\},\\
\widetilde{\overline{\nu}}_1(t)=\dfrac{\widetilde{\varphi}_{12}(l+\lambda t-\lambda T)}{2}-\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{l+\lambda t-\lambda T}^{l}\widetilde{\psi}_{12}(z)dz-\dfrac{1}{4\lambda^3}\displaystyle\int\limits_{l+\lambda t-\lambda T}^{l}\widetilde{\psi}_{22}(z)dz-\\
\qquad-\dfrac{\lambda t-\lambda T}{4\lambda}\left\{-\dfrac{1}{\lambda}\widetilde{\varphi}'(l+\lambda t-\lambda T)-\dfrac{1}{\lambda^2}\widetilde{\psi}_{22}(l+\lambda t-\lambda T)\right\},\\
\widetilde{\overline{\mu}}_2(t)=\dfrac{\widetilde{\varphi}_{22}(\lambda T-\lambda t)}{2}+\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{\lambda T-\lambda t}^{0}\widetilde{\psi}_{22}(z)dz,\\
\widetilde{\overline{\nu}}_2(t)=\dfrac{\widetilde{\varphi}_{22}(l+\lambda t-\lambda T)}{2}-\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int\limits_{l+\lambda t-\lambda T}^{l}\widetilde{\psi}_{22}(z)dz.
\end{cases}\tag{2.21}$$

Решение общей задачи управления в условиях первой краевой задачи для системы (2.10) имеет вид:

$$\begin{cases}
\widetilde{\mu}_i=\underline{\widetilde{\mu}}_i+\widetilde{\overline{\mu}}_i, & i=1,2,\\
\widetilde{\nu}_i=\underline{\widetilde{\nu}}_i+\widetilde{\overline{\nu}}_i, & i=1,2.
\end{cases}\tag{2.22}$$

Подставляя (2.20) и (2.25) в (2.26), получаем выражения (2.9), тогда граничные управления для исходной системы (1.1) имеют вид (2.7) и (2.8).

Представленная работа является продолжением исследований [18, 20, 21].

В заключении отметим, что система (1.1) описывает продольно-крутильное колебание длинной естественно закрученной нити [22, 23].

Литература

[1] Знаменская, Л.Н. Управление упругими колебаниями / Л.Н. Знаменская. – М.: ФИЗМАТЛТИТ, 2004. – 176 с.

[2] Бутковский, А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.

[3] Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

[4] Ильин, В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №11. – С. 1517–1534.

[5] Ильин, В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах / В.А. Ильин // Докл. РАН. – 1999. – Т. 369. – №5. – С. 592–596.

[6] Ильин, В.А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце / В.А. Ильин // Докл. РАН. – 1999. – Т. 369. – №6. – С. 732–735.

[7] Ильин, В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №12. – С. 1640–1659.

[8] Ильин, В.А. Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Докл. РАН. – 2003. – Т. 393. – №6. – С. 730–734.

[9] Никитин, А.А. Граничное управление упругой силой на одном конце струны / А.А. Никитин // Докл. РАН. – 2006. – Т. 406. – №4. – С. 458–461.

[10] Сабитова, Ю.К. О гладкости решения задачи граничного управления на двух концах для уравнения струны / Ю.К. Сабитова // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42. – №1. – С. 133–134.

[11] Ильин, В.А. Волновое уравнение с краевым управлением / В.А. Ильин, В.В. Тихомиров // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – №1. – С. 137–138.

[12] Знаменская, Л.Н. Управление колебаниями струны в классе обобщенных решений из L_2 / Л.Н. Знаменская // Дифференциальные уравнения. – Т. 38. – №5. – С. 666–672.

[13] Боровских, А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной I / А.В. Боровских // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43. – №1. – С. 64–89.

[14] Боровских, А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной II / А.В. Боровских // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43. – №5. – С. 640–649.

[15] Ильин, В.А. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Докл. РАН. – 2002. – Т. 387. – №5. – С. 600–603.

[16] Егоров, А.И. Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская // Вычисл. матем. и матем. физика. – 2005. – Т. 45. – №10. – С. 1766–1784.

[17] Егоров, А.И. Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум концам / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская // Вычисл. матем. и матем. физика. – 2006. – Т. 46. – №11. – С. 2032–2044.

[18] Егоров, А.И. Управление упругими колебаниями (обзор) / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская // Оптимизация, Управление, Интеллект (Труды международной конференции CDS'2000) Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск 2000. – Иркутск: Изд. Иркутского государственного университета, 2001. – С. 104–112.

[19] Андреев, А.А. О граничном управлении системы продольно-крутильных колебаний / А.А. Андреев, С.В. Лексина // СамДиф-2007: конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения", г. Самара, 29 января – 2 февраля 2007 г. – Самара: Издательство "Универс групп", 2007. – С. 156.

[20] Лексина, С.В. Аналог формулы Даламбера для системы волновых уравнений / С.В. Лексина // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (Новосибирск, 26.05-02.06.2007г.): Тез. докл. / Новосибирский гос. университет. – Новосибирск, 2007. – С. 216–216.

[21] Андреев, А.А. Смешанные задачи для системы волновых уравнений / А.А. Андреев, С.В. Лексина // Обзор прикладной и промышленной математики. – 2007. – Т. 14. – №5, С. 847–848.

[22] Горошко, О.А. К вопросу о продольно-крутильных колебаниях упругой естественно закрученной нити (каната) переменной длины с концевым грузом, движущимся по жестким направляющим: В кн.: Стальные канаты / О.А. Горошко, А.А. Чиж. – Киев: Техника, 1964. – Т. 1. – С. 56–64.

[23] Горошко, О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О.А. Горошко, Г.Н. Савин. – Киев: Наукова думка, 1971. – 225 с.

Поступила в редакцию 26/*II*/2008;
в окончательном варианте — 26/*II*/2008.

A SYSTEM OF WAVE EQUATIONS WITH A BOUNDARY CONTROL OF THE FIRST KIND[3]

© 2008 A.A. Andreev, S.V. Lexina[4]

In the paper the control problem for oscillations described by the system of wave equations with boundary condition of the first kind is considered. Necessary conditions for the functions determining initial and final conditions are obtained.

Paper received 26/*II*/2008;
Paper accepted 26/*II*/2008.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

[4]Andreev Aleksandr Anatolevich (andre@ssu.samara.ru), Lexina Svetlana Valentinovna (lesveta@rambler.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.