

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОДНОМЕРНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ¹

© 2007 В.В. Зайцев, С.С. Телегин²

Результаты численного решения задачи на собственные значения стационарного оператора Фоккера–Планка используются для расчета одномоментной плотности вероятности, среднего значения и дисперсии периодически нестационарного броуновского движения в потенциальных полях произвольной формы. Приведен пример расчета для бистабильного потенциала.

1. Модель броуновского движения в потенциальных силовых полях при наличии случайных возмущений скорости используется при описании многих физических явлений [1]. В последнее время интерес к периодически нестационарному броуновскому движению в значительной мере связан с исследованиями по стохастическому резонансу [2]. Математической моделью движения является непрерывный марковский процесс, вероятностные характеристики которого описываются уравнением Фоккера–Планка (УФП). Для расчета вероятностных характеристик процесса необходимо знать нестационарные решения УФП, но эта задача аналитически решается в исключительно редких случаях. Поэтому наиболее детальное исследование броуновского движения для произвольного вида потенциалов силового поля удастся провести лишь численными методами. В настоящем сообщении статистические характеристики движения броуновских частиц потенциальных ямах с периодически меняющимся профилем вычисляются с использованием собственных функций в матричном представлении стационарного оператора Фоккера–Планка [3].

2. Рассматривается одномерное броуновское движение, описываемое уравнением Ланжевена вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d\varphi(x)}{dx} - s(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ — потенциал силового поля с нулевым уровнем в точке $x = 0$, $s(t) = a \cos(\omega_0 t)$ — гармоническое воздействие на броуновские частицы, $\xi(t)$ — дельта-коррелированный случайный процесс с нулевым средним и интенсивностью D : $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau)$.

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Г.П. Яровым.

²Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Телегин Сергей Сергеевич, кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Уравнению Ланжевена (1) соответствует УФП для плотности вероятности $W(x, t)$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \hat{L}_0(x)W(x, t) + a \cos(\omega_0 t) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \quad (2)$$

с дифференциальным оператором

$$\hat{L}_0(x)W = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi'(x)W) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (3)$$

При этом для собственных чисел и собственных функций стационарного оператора Фоккера–Планка (3) в области $-\infty < x < \infty$, а также в конечной области с отражающими границами, справедливо следующее [4, 5]. Наименьшее по модулю собственное число $\lambda_0 = 0$, а все остальные собственные числа λ_n имеют отрицательные значения. Собственная функция $Y_0(x)$ представляет собой стационарную плотность вероятности: $Y_0(x) \equiv W_{st}(x)$. Функции $Y_n(x)$ и $Y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны с весом $Y_0^{-1}(x)$. В дальнейшем будем считать их ортонормированными, т.е. норма Nor_n равна единице:

$$Nor_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} Y_0^{-1}(x) Y_n^2(x) dx = 1.$$

Решение уравнения (2) представим в виде разложения по собственным функциям $Y_n(x)$:

$$W(x, t) = Y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) Y_n(x). \quad (4)$$

Для зависящих от времени коэффициентов разложения удастся получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_n(t)}{dt} = \lambda_n w_n(t) + a \cos(\omega_0 t) \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,m} w_m(t) + a \gamma_{n,0} \cos(\omega_0 t), \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5)$$

с зависящими от интенсивности шума параметрами

$$\gamma_{n,m} = \gamma_{n,m}(D) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_0^{-1}(x) Y_n(x) Y'_m(x) dx.$$

При этом начальные условия для системы уравнений (5) определяются по начальной плотности вероятности $W_0(x)$ соотношениями

$$w_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_0^{-1}(x) Y_n(x) W_0(x) dx.$$

Отметим, что в аналитических исследованиях по стохастическому резонансу широко используется теория линейного отклика (ТЛО) [2]. В рамках этой теории в системе уравнений (5) следует считать отличными от нуля лишь коэффициенты $\gamma_{n,0}$. Установившееся решение ТЛО

$$w_n(t) = \frac{a}{2} \frac{\gamma_{n,0}}{j\omega_0 - \lambda_n} \exp(j\omega_0 t) + k.c.$$

целесообразно использовать в качестве начального приближения при поиске установившегося решения системы (5) численными методами.

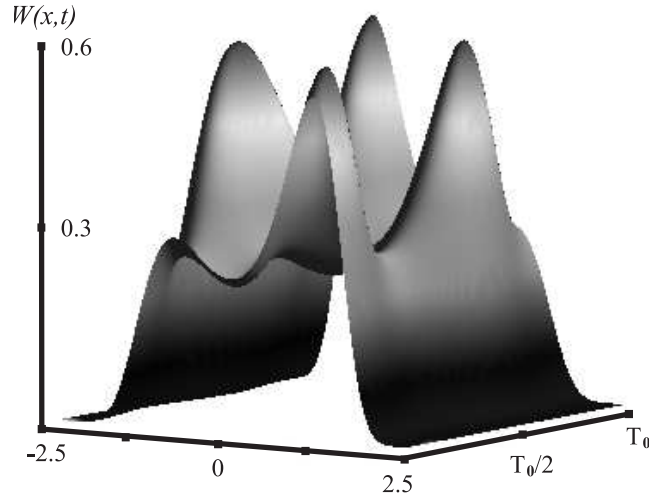


Рис. 1. Установившаяся плотность вероятности координат броуновских частиц

На рис. 1 показан график установившейся плотности вероятности координат броуновских частиц, находящихся в силовом поле с потенциалом

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \quad (6)$$

при внешнем воздействии с амплитудой $a = 0.5$ и частотой $\omega_0 = 1$. Интенсивность внутреннего шума в системе $D = 1$. Расчет проведен с учетом $N = 30$ слагаемых в разложении (4).

Следует отметить, что для полей с симметричным потенциалом система уравнений (5) распадается на две связанные подсистемы для функций с четными и нечетными индексами:

$$\frac{dw_{2n-1}(t)}{dt} = \lambda_{2n-1}w_{2n-1}(t) + a \cos(\omega_0 t) \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2n-1,2m}w_{2m}(t) + a\gamma_{2n-1,0} \cos(\omega_0 t),$$

$$\frac{dw_{2n}(t)}{dt} = \lambda_{2n}w_{2n}(t) + a \cos(\omega_0 t) \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2n,2m-1}w_{2m-1}(t); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В этом случае решение ТЛО можно уточнить следующим образом:

$$w_{2n-1}(t) = a \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma_{2n-1,0}}{j\omega_0 - \lambda_{2n-1}} \exp(j\omega_0 t) \right\},$$

$$w_{2n}(t) = \frac{a^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2n,2m-1} \gamma_{2m-1,0} \left(\frac{\lambda_{2m-1} \lambda_{2n}^{-1}}{\omega_0^2 + \lambda_{2m-1}^2} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp(j2\omega_0 t)}{(j\omega_0 - \lambda_{2m-1})(j2\omega_0 - \lambda_{2n})} \right\} \right).$$

Как видно, четные слагаемые в сумме (4) совершают колебания с удвоенной частотой.

3. Запись одномоментной плотности вероятности в форме (4) позволяет определить регулярный отклик системы на внешнее гармоническое воздействие в виде

$$\langle x(t) \rangle = \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n w_n(t),$$

где

$$\rho_n = \rho_n(D) = \int_{-\infty}^{\infty} x Y_n(x) dx.$$

Мощность (средняя) регулярного отклика определяется выражением

$$P = \overline{\langle x(t) \rangle^2} = \rho_0^2 + 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \overline{w_n(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rho_n \rho_m \overline{w_n(t) w_m(t)}. \quad (7)$$

Здесь чертой обозначено усреднение по периоду колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. В ТЛО это выражение принимает вид

$$P = \rho_0^2 + \frac{a^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_n \rho_m \gamma_{n,0} \gamma_{m,0}}{(\lambda_n - j\omega_0)(\lambda_m + j\omega_0)} \right\}.$$

На рис. 2 представлен график зависимости мощности (7) регулярного отклика от амплитуды внешнего воздействия на бистабильную систему с потенциалом (6). Частота воздействия $\omega_0 = 0.5$, интенсивность внутреннего шума в системе $D = 1$. Линией с точками обозначена зависимость $P = P(a)$ для динамической системы. В области слабых воздействий ($a < \sqrt{D}$) мощность регулярного отклика в стохастической системе выше, чем в динамической. Это проявление эффекта стохастического резонанса — шум индуцирует переходы между потенциальными ямами, увеличивая тем самым амплитуду регулярного отклика. С ростом амплитуды воздействия динамические переходы между потенциальными ямами резко увеличивают регулярный отклик. Теперь график зависимости $P = P(a)$ в стохастической системе проходит ниже, чем в динамической. При этом в стохастической системе шум оказывает демпфирующее воздействие на регулярный отклик.

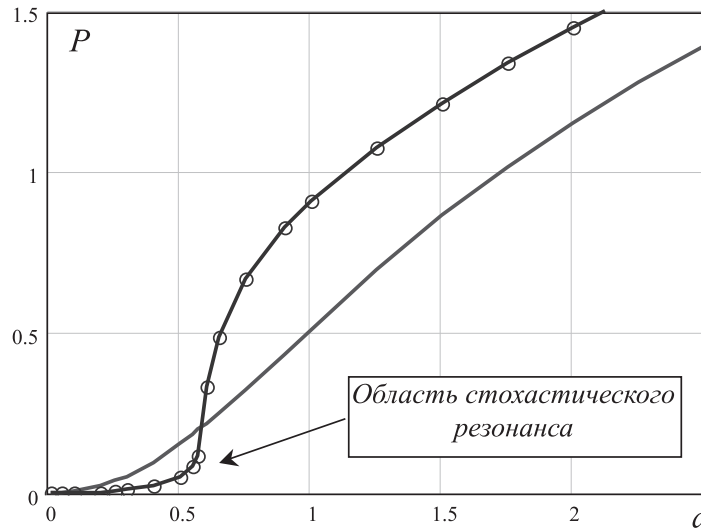


Рис. 2. Зависимость мощности регулярного отклика от амплитуды внешнего воздействия

Воздействие сигнала на выходной шум системы можно проанализировать, исследуя зависимость усредненной по периоду колебаний дисперсии шума от амплитуды a . Для нее имеет место выражение

$$\sigma_x^2 = \beta_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \overline{w_n(t)} - P, \quad (8)$$

где

$$\beta_n^2 = \beta_n^2(D) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 Y_n(x) dx.$$

На рис. 3 представлены графики зависимости $\sigma_x^2(a)$, рассчитанные по (8) с $N = 30$ слагаемыми в сумме при интенсивности внутреннего шума $D = 1$ для различных частот внешнего воздействия. Нижняя кривая на графике соответствует частоте $\omega_0 = 0.25$, верхняя — частоте $\omega_0 = 1$; точками обозначена кривая, соответствующая частоте $\omega_0 = 0.5$. Как видно из графиков, наблюдается довольно значительный эффект подавления шума детерминированным сигналом.

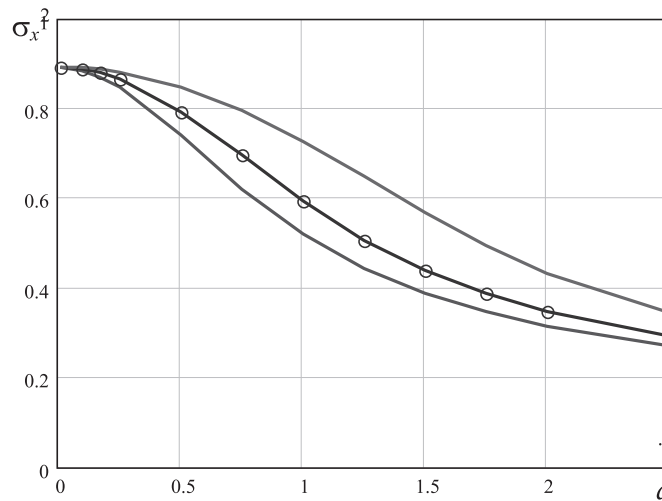


Рис. 3. Зависимость дисперсии выходного шума от амплитуды входного сигнала

4. Все предыдущие вычисления основаны на результатах решения задачи на собственные значения для стационарного оператора Фоккера–Планка:

$$\hat{L}_0(x)Y_n(x) = \lambda_n Y_n(x).$$

Для ее численного решения используется разностная аппроксимация оператора (3). При этом задача сводится к проблеме собственных значений

$$L y^{(n)} = \lambda_n y^{(n)} \quad (11)$$

матрицы $\mathbf{L}$ с элементами

$$L_{n,n-1} = \frac{1}{2h} \left(-\varphi'(x_{n-1}) + \frac{D}{h} \right), \quad L_{n,n} = -\frac{D}{h^2},$$

$$L_{n,n+1} = \frac{1}{2h} \left(\varphi'(x_{n+1}) + \frac{D}{h} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1;$$

$$\begin{aligned}
L_{0,0} &= \frac{2}{h} \left(\varphi'(x_0) \left(1 - \frac{h}{D} \varphi'(x_{-1}) \right) \right) - \frac{D}{h^2}, & L_{0,1} &= \frac{1}{2h} \left(\varphi'(x_1) - \varphi'(x_{-1}) - \frac{2D}{h} \right), \\
L_{N,N} &= -\frac{2}{h} \left(\varphi'(x_N) \left(1 + \frac{h}{D} \varphi'(x_{N+1}) \right) \right) - \frac{D}{h^2}, \\
L_{N,N-1} &= \frac{1}{2h} \left(\varphi'(x_{N+1}) - \varphi'(x_{N-1}) - \frac{2D}{h} \right)
\end{aligned}$$

Здесь h — шаг дискретизации; четыре последних равенства записаны для отражающих границ в точках $x_0 = -h/N_x$ и $x_N = h/N_x$ с использованием метода фиктивных областей. Для трехдиагональной матрица $\mathbf{L}$ существует значительное число эффективных вычислительных методов решения проблемы собственных значений и собственных векторов (см., например, [6]). Приведенные выше результаты получены с шагом дискретизации $h = 0.05$ при числе узловых точек $N_x = 100$ QR-методом.

Литература

- [1] Ван Кампен, Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии / Н.Г. Ван Кампен. — М.: Высшая школа, 1990. — 376 с.
- [2] Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В.С. Анищенко [и др.] // УФН. — 1999. — Т. 169. — В. 1. — С. 7–38.
- [3] Зайцев, В.В. Об одном способе вычисления корреляционных характеристик марковских случайных процессов / В.В. Зайцев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2006. — Т. 9. — №4. — С. 73–75.
- [4] Стратанович, Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р.Л. Стратанович. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
- [5] Гардинер, К.В. Стохастические методы в естественных науках / К.В. Гардинер. — М.: Мир, 1986. — 528 с.
- [6] Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М.: Мир, 1999. — 548 с.

Поступила в редакцию 13/XII/2006;
в окончательном варианте — 26/XII/2006.

NUMERICAL CALCULATION OF PERIODICALLY STATIONARY BROWNIAN MOTION³

© 2007 V.V. Zaitsev, S.S. Telegin⁴

The results of numerical solution for egenvecors of Fokker–Plank operator problem are used to calculate the probability density, mean value and dispersion of nonsteady brownian movement in free-form potential wells. An example of calculation for a bistable potential well is given.

Paper received 13/*XII*/2006.

Paper accepted 26/*XII*/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. G.P. Yarovoi.

⁴Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev@ssu.samara.ru), Telegin Sergei Sergeevich, Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiotechnical Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.