

К 70-ЛЕТИЮ Г.И. БЫКОВЦЕВА

© 2007 Г.П. Яровой,¹ Ю.Н. Радаев²

4 января 2008 г. исполняется 70 лет со дня рождения известного российского ученого, доктора физико-математических наук, профессора Геннадия Ивановича Быковцева. Ему принадлежат фундаментальные результаты во многих областях механики. Вклад Г.И. Быковцева состоит из более 100 научных работ³ по проблемам математической теории пластичности, механики композитных материалов, газовой динамики, теории кавитации, разработки новых измерительных устройств. Ряд результатов Г.И. Быковцева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела. Значительный вклад также внесен им в разработку и создание народнохозяйственных изделий спецназначения, за что он получил 14 авторских свидетельств. С его именем связаны становление и развитие научной школы механики идеальнопластических тел и конструкций в Воронеже, Самаре, Владивостоке. Им было подготовлено 40 кандидатов наук, 7 его учеников стали докторами наук. В настоящее время они продолжают работу в рамках его научной школы. Г.И. Быковцев относился к той редкой категории ученых, для которых занятие наукой было смыслом и образом жизни.

Геннадий Иванович Быковцев родился 4 января 1938 г. в городе Новом Осколе Белгородской области. Его отец, Быковцев Иван Петрович, 1898 г. рождения до и после революции был рабочим. Мать, Быковцева (Самарокова) Мария Никитична, 1906 г. рождения, всю свою жизнь посвятила семье. Его брат, Быковцев Сергей Иванович, 1925 г. рождения, работал учителем средней школы в г. Ташкенте, второй брат — Быковцев Алексей Иванович, 1928 г. рождения, погиб в 1969 г. во время аварии на буровой вышке.

До 1955 г. Г.И. Быковцев проживал в городе Новом Осколе, где в 1955 г. окончил Новооскольскую среднюю школу. После окончания школы он переезжает в г. Воронеж и поступает на математико-механический факультет Воронежского государственного университета им. Ленинского комсомола, который заканчивает в 1960 г., получив диплом по специальности механика. По распределению Г.И. Быковцев был оставлен в аспирантуре Воронежского госуниверситета, в которой он обучался лишь один год, так как в связи с необеспеченностью университета преподавательскими кадрами был в 1961 г. переведен на должность ассистента кафедры теории упругости и пластичности, а затем в 1963 г. — старшего преподавателя. В 1963 г. Г.И. Быковцев защитил кандидатскую диссертацию "Некоторые вопросы теории идеально-пластических анизотропных сред", получив ученую степень кандидата физико-математических наук. Защита состоялась 15 ноября 1963 г. в совете при Воронежском государственном университете. Председательствовал на защите ректор Воронежского университета. В 1964 г. Г.И. Быковцев работа-

¹Яровой Геннадий Петрович (rector@ssu.samara.ru), кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

²Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³Среди них две монографии: "Теория упрочняющегося пластического тела" (в соавторстве с Д.Д. Ивлевым, 1971 г.), "Теория пластичности" (в соавторстве с Д.Д. Ивлевым, 1998 г.).

ет в должности доцента кафедры теории упругости и пластичности. В 1965 г. в возрасте 27 лет он был избран заведующим кафедрой теоретической механики Воронежского госуниверситета, после чего ему предоставляется исключительная для кандидата наук возможность открыть собственную аспирантуру. В 1966 г. его утверждают в ученом звании доцента. В 1969 г. Геннадий Иванович защищает в совете при МГУ докторскую диссертацию "Исследование свойств уравнений статики и динамики пластически деформируемых сред". 28 ноября 1969 г. Г.И. Быковцеву присуждается ученая степень доктора физико-математических наук. В этом же году по инициативе и при активном участии Г.И. Быковцева в Воронежском университете создается факультет прикладной математики и механики. 22 апреля 1970 г. он был утвержден в ученом звании профессора по кафедре теоретической механики. В 1971 г. Г.И. Быковцев вступает в КПСС. Благодаря усилиям Г.И. Быковцева, в Воронежском университете был создан факультет прикладной математики и механики, и он становится его первым деканом (с 1969 по 1971 гг. он работает в должности декана факультета прикладной математики и механики). С 1970 по май 1973 гг. он заведует кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования, будучи также профессором этой кафедры, и является научным руководителем Вычислительного центра ВГУ. В марте 1973 г. проф. Г.И. Быковцев был включен в проблемный совет университета по внедрению в научные исследования и учебный процесс электронной вычислительной техники. Сохранившиеся в архивах протоколы заседаний ученого совета Воронежского госуниверситета четко фиксируют ступени роста молодого ученого, его растущий авторитет и признание в научной среде.

Становление Г.И. Быковцева как ученого неразрывно связано с именем выдающегося российского ученого, профессора Дюиса Даниловича Ивлева⁴. Встречу с Дюисом Даниловичем Ивлевым на своем жизненном и творческом пути Геннадий Иванович всегда называл главным, определяющим событием в своей судьбе. В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев 29-летним доктором физико-математических наук, будучи уже известным ученым в области математической теории пластичности, по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева приезжает в г. Воронеж. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавил созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович Ивлев сумел в короткий срок организовать научную, учебную и методическую работу в области механики деформируемого твердого тела. Лекции и научные семинары проф. Д.Д. Ивлева оставляли незабываемое впечатление и поражали способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. В Воронежском государственном университете на математико-механическом факультете Д.Д. Ивлев работал вместе с профессорами М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, В.И. Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы. Созданная проф. Д.Д. Ивлевым воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые исследования были связаны с фундаментальными и прикладными проблемами механики сплошных сред. Под руководством профессора Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми,

⁴Научная биография Д.Д. Ивлева и обзор его научного творчества, включая библиографию его важнейших работ, имеются в статье: Радаев Ю.Н. К 75-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №5(39). 2005. С. 5-32.

Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР. Д.Д. Ивлев сразу же заметил талантливого юношу и с первых дней общения с ним сумел оценить его потенциал и всячески способствовал развитию его творческой активности. Тогда же началось сотрудничество Д.Д. Ивлева с одним из своих аспирантов — Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды — научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Г.И. Быковцев органично вписался в созданный Д.Д. Ивлевым научный коллектив и впоследствии сам оказал сильное влияние на развитие механики деформируемого твердого тела в ВГУ.

В тот же период проявляется организаторский талант молодого ученого Г.И. Быковцева. Он становится одним из главных помощников Д.Д. Ивлева в руководстве еженедельным Воронежским городским семинаром по механике, организует семинар для аспирантов и студентов старших курсов⁵. Он успевает налаживать связи с производством, заключает серию интересных хозяйственных договоров и становится их научным руководителем. Сам Геннадий Иванович основным своим достижением этого периода считал создание и оснащение Вычислительного центра Воронежского госуниверситета. Дело в том, что Г.И. Быковцев, обладая широким кругозором во многих смежных научных направлениях и технологиях, стремился не замыкаться в рамках какой-либо одной научной тематики. Он был одним из первых в Воронежском университете, кто сумел заглянуть в далекую перспективу, увидеть возрастающее влияние информатики и вычислительной техники на развитие науки и общества. Благодаря инициативам Г.И. Быковцева электронная вычислительная техника начала активно внедряться в научные исследования и учебный процесс. Наконец стоит также отметить, что при непосредственном организационном участии Геннадия Ивановича начинает работу Научно-исследовательский институт математики ВГУ.

Г.И. Быковцев отдает много сил Воронежскому университету: административная работа, связанная с руководством кафедрой и факультетом, руководство научной работой аспирантов и дипломников, собственные научные исследования, хозяйственная работа. При этом Геннадий Иванович был скромным человеком, а в некоторых вопросах и весьма наивным, он не искал покровителей среди вышестоящих руководителей, не налаживал личных связей с "нужными" людьми, ему иногда не доставало гибкости и дипломатичности в решении производственных вопросов. Этим воспользовались его недоброжелатели: под прикрытием парткома университета они развернули широкую кампанию по вытеснению Г.И. Быковцева из университета.

В мае 1973 г. ученый совет ВГУ освобождает Г.И. Быковцева от должности заведующего кафедрой с рекомендацией не использовать его на преподавательской работе, но по октябрь 1973 г. он остается профессором кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования. Воронежский гос. университет направляет в ВАК СССР ходатайство о лишении Г.И. Быковцева ученого звания профессора. В октябре 1973 г. он переводится в Куйбышевское конструкторское бюро автоматических систем на должность начальника отдела, где работает до 1978 г., заведывая параллельно начиная с сентября 1974 г. кафедрой теоретической механики и аэрогидромеханики в Куйбышевском (в настоящее время Самарском)

⁵В 1966 г. Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, и Г.И. Быковцев остается в Воронеже одним из краеугольных камней, положенных Д.Д. Ивлевым в основу Воронежской школы механики. Человеческие и научные связи Г.И. Быковцева с Д.Д. Ивлевым не прерывались никогда.

госуниверситете.⁶ Несмотря на такой крутой поворот в своей жизни, Геннадий Иванович не оставил без внимания своих воронежских аспирантов, регулярно приезжал в Воронеж для проведения консультаций и продолжал осуществлять научное руководство аспирантами, доведя всех до защиты диссертационных работ. Можно только догадываться, какую боль нанес разрыв с Воронежским университетом самому Геннадию Ивановичу. Но жизнь продолжалась, и те, кто не изменил своего доброго отношения к нему, продолжали поддерживать с ним контакты и научное сотрудничество. Уход Г.И. Быковцева из Воронежского университета не мог не отразиться на жизни созданного им факультета. Долгое время оставалась напряженной психологическая атмосфера на факультете прикладной математики и механики. Далеко не все согласились с решением руководства ВГУ, некоторые сотрудники вынуждены были уйти из университета. Без сомнения, акция, совершенная в 1973 г. в отношении Г.И. Быковцева, нанесла серьезный урон научному потенциалу ВГУ, да и всему научному сообществу⁷.

В 1978 г. Г.И. Быковцев полностью переходит на работу в Куйбышевский госуниверситет, заведая до 1987 г. кафедрой механики твердого деформируемого тела. В Куйбышевском госуниверситете Г.И. Быковцев создал научную школу по механике деформируемого твердого тела. Со свойственной ему самоотдачей он погрузился в организацию учебного и научно-исследовательского процесса. В тот период быстрыми темпами развивались кафедры механико-математического факультета, закупалось новое оборудование, вводились в эксплуатацию новые современные экспериментальные установки и, самое главное, наращивался кадровый потенциал, который и три десятилетия спустя обеспечивает высокое качество подготовки специалистов высшей квалификации по многим направлениям современной математики и механики. Он организует научный семинар высочайшего уровня по уравнениям в частных производных и смешанным проблемам физики и техники, из слушателей которого впоследствии сформировалось ядро научной школы Г.И. Быковцева в Самаре⁸. Он читает ряд лекционных курсов по уравнениям математической физики, математической теории пластичности, реологическим моделям сплошных сред, численным методам теории оптимального управления. Много работает над теорией пространственной задачи математической теории пластичности, развивает лучевой метод решения пространственных задач для квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных, разрабатывает механику упругопластических тел при конечных деформациях, начинает интересоваться теорией ползучести, механикой растущих деформируемых тел.

Научные исследования и преподавание математической теории пластичности в Самарском государственном университете напрямую связаны с именем Г.И. Быковцева⁹. Для него всегда было характерно сочетание собственно механи-

⁶Укажем еще на одну деталь: с февраля по сентябрь 1974 г. Г.И. Быковцев работает в должности старшего преподавателя кафедры теоретической механики и аэрогидромеханики.

⁷Недавно, насколько нам известно, ученый совет факультета ПММ Воронежского университета обратился в ученый совет университета с предложением о пересмотре упомянутого выше решения ученого совета от 1973 г., признании его ошибочным и отмене этого решения.

⁸Семинар начал свою работу в феврале 1974 г. В характеристиках того времени отмечалось, что Г.И. Быковцев "с февраля 1974 г. руководит общегородским научным семинаром по уравнениям математической физики и родственными проблемам механики сплошной среды, в котором участвуют преподаватели вузов, сотрудники промышленных предприятий, КБ и НИИ. Регулярная, интересно поставленная работа этого семинара привела к активизации научных исследований в области механики."

⁹В Самарском государственном университете на кафедре механики сплошных сред в течение трех десятилетий проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого

ческого содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения. Такой синтез требовал также особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как условия совместности на поверхностях разрывов Адамара—Томаса, общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования. Его лекционным курсам был присущ высочайший теоретический и методический уровень, они отличались глубиной содержания, оригинальностью подхода при освещении сложных вопросов, стройностью и строгостью изложения, стремлением выйти за рамки традиционных схем изложения, а также учесть современные тенденции развития науки.

Г.И. Быковцев был одним из тех, кто стоял у истоков становления Самарского госуниверситета как центра науки и образования Поволжского региона. Г.И. Быковцев был одним из инициаторов проведения школ-симпозиумов по механике твердого деформируемого тела в г. Куйбышеве в июле 1974 г. и 1975 г., собравших более ста участников каждая из различных городов и республик СССР, а также в подготовке издания научных трудов по материалам указанных школ. Как ученый Геннадий Иванович Быковцев отличался искрометным умением мгновенно понять, осмыслить, оценить, а потом уже принять или отвергнуть обсуждаемую научную идею или проект. Он умел радоваться научным успехам, и своим собственным, и своих учеников и коллег. Неудивительно, что именно за Геннадием Ивановичем шли люди. Он был в состоянии вести за собой научные коллективы, увлекая их своими научными идеями. Такой вот удивительной притягательной силой он обладал. Г.И. Быковцев стоял у истоков создания кандидатского диссертационного совета по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела при Куйбышевском госуниверситете. Этот совет проработал более двух десятков лет и был важным элементом в системе формирования научной школы в Самаре.

В 1987 г. Г.И. Быковцев принимает предложение переехать в г. Владивосток для работы в Дальневосточном отделении АН СССР, где до своей смерти в марте 1994 г. работает заместителем директора Института автоматики и процессов управления ДВО РАН (ИАПУ ДВО РАН). Решение о переезде для Г.И. Быковцева, по-видимому, было совсем не простым. Однако после всестороннего анализа сложившейся ситуации он принимает соответствующее решение¹⁰.

был задан Д.Д. Ивлевым в работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности конца 50-х годов и Г.И. Быковцевым в работах середины 60-х годов по механике упрочняющегося пластического тела. Результаты научных исследований и практика преподавания теории пластичности в Самарском государственном университете нашли отражение в недавно изданной книге: Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. 2-е изд. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.

¹⁰ Немаловажную роль здесь сыграло принятое ректоратом Куйбышевского госуниверситета и ученым советом механико-математического факультета решение о закрытии набора студентов по специальности "механика", несмотря на стабильное состояние этой специальности и имеющийся конкурс при наборе студентов. Сейчас трудно оценивать рациональные доводы в пользу такого решения. Особенно, если учитывать смутное время 90-х. Набор студентов по специальности "механика" был возобновлен в конце 80-х, затем в начале 90-х снова прекращен. Все это не могло не сказаться на развитии научно-исследовательской работы по всем тем направлениям механики, которые в 70-е годы сложились в Куйбышевском университете.

После приезда Г.И. Быковцева, В.П. Мясникова, Г.П. Черепанова, а вместе с ними целого ряда молодых ученых из европейской части России в 1987 г. на Дальний Восток в регионе начинает развиваться ряд новых фундаментальных и прикладных направлений механики. В короткие сроки ими был создан докторский диссертационный совет, послуживший основой для формирования Дальневосточной школы механики деформируемого твердого тела. Налажено взаимодействие научных коллективов Института океанологии АН СССР, Дальневосточного государственного университета и Института автоматики и процессов управления АН СССР. Быстрыми темпами развивалась экспериментальная база для фундаментальных научных исследований и наметившихся инженерно-технических разработок. Все это делалось в самые тяжелые годы распада СССР и экономических реформ начала 90-х. Под непосредственным руководством Г.И. Быковцева в ИАПУ ДВО РАН была создана экспериментальная лаборатория с лучшей на то время на Дальнем Востоке оптоэлектронной установкой, которая работала в комплексе с разрывной машиной и компьютером. На этой установке были получены голограммы процессов разрушения элементов металлоконструкций, проводилась обработка многочисленных экспериментальных данных и формулирование на такой основе общетеоретических выводов¹¹. Научные исследования Г.И. Быковцева этого периода группировались вокруг проблем теории пластичности (в особенности конечных упругопластических деформаций), механики жесткопластического разрушения, теории ползучести (построение кинетических уравнений), распространения волн в упругопластических телах.

Г.И. Быковцев был ученым с очень широким кругозором и интересовался многими направлениями современной механики сплошных сред. Однако наибольший вклад был внесен им в развитие математической теории пластичности. Мы остановимся подробнее на результатах, полученных Г.И. Быковцевым в области трехмерной задачи математической теории пластичности.

Теория идеальной пластичности, основанная на ассоциированном законе течения, преодолевая трудности начального периода развития, относящегося к 70-м годам XIX в., в 50-е годы XX в. сформировалась как важнейшее самостоятельное направление механики деформируемого твердого тела. Простота и логическая завершенность теории идеальнопластического тела, позволяющие причислить ее к

В 90-е годы Самарский госуниверситет проходил сложную стадию структурной перестройки в соответствии с принятой "Концепцией развития Самарского государственного университета как центра науки, образования и культуры Поволжского региона". В 2001 г. Самарский госуниверситет объявил о начале набора студентов по специальности "механика". Ректорат Самарского госуниверситета принял также комплекс мер для восстановления научного потенциала университета в этом направлении, воссоздания экспериментальной базы и вычислительного кластера, совершенствования и развития учебного процесса, подготовки специалистов высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа. Была, по существу, на новой основе организована кафедра механики сплошных сред, которая унаследовала традиции и научную школу Г.И. Быковцева. Эти меры позволили к настоящему времени в целом преодолеть разрушительное влияние на науку периода реформ 90-х и обеспечить преемственность развития научной школы Г.И. Быковцева в Самаре. Успешно и быстрыми темпами развиваются научные исследования по современным разделам механики деформируемого твердого тела: теории поля и вариационных симметрий, теории идеальной пластичности и упрочняющихся тел, групповому анализу дифференциальных уравнений механики сплошных сред, механике трещин и разрушения, механике поврежденности, связанной линейной термовязкоупругости.

¹¹К настоящему времени вся экспериментальная техника уже утрачена: магнитоимпульсная установка, оптический стол и разрывная машина были демонтированы. Можно лишь поражаться тому, как в те нелегкие для нашей страны, и особенно для высшей школы, годы Г.И. Быковцев по-прежнему был полон новых творческих замыслов.

классическим теориям, обеспечивают возможность ее применения к прикладным задачам механики. Основным объектом математического исследования в теории пластичности являются нелинейные гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных и краевые задачи для них, сформулированные для областей с неизвестными границами. Математическая теория пластичности имеет важные приложения во многих областях техники (оценка прочности и несущей способности конструкций, обработка металлов), в геофизике и геологии. Свое важнейшее применение математическая теория пластичности находит в нелинейной механике разрушения. Именно с помощью методов теории пластичности удастся провести анализ напряженно-деформированного состояния у вершины трещины с локализованной зоной пластического течения. Ясно, что анализ проблем разрушения только с позиций общих представлений механики сплошных сред и теории идеальной пластичности без привлечения дополнительных физических представлений не дает возможности объяснить все факты, относящиеся к явлению разрушения. Тем не менее анализ картины разрушения на основе систем скольжения и описания разрывов в твердых телах (имеются в виду разрывы касательной составляющей скорости, т.е. разрывы скольжения) в духе Адамара—Томаса уже давно доказал свою плодотворность.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (B. Saint-Venant, 1870 г.) на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска¹². Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения. Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе "О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре", представленной во Французскую академию наук в 1773 г.¹³ В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скалыванию по этой плоскости¹⁴.

Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье—Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния, и поэтому его теория нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного со-

¹²De Saint-Venant B. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état// Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1870, t. 70, pp. 473-480;

De Saint-Venant B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état// Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II, 1871, t. 16, pp. 308-316, 373-382.

¹³Coulomb C.A. Essay sur l'application des règles de maximes et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture// Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'académie Royale des Sciences, Année 1773. Paris, de l'imprimerie Royale, 1776.

¹⁴Очерк, посвященный исследованиям Кулона в области механики, имеется в книге: Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: Гостехтеоретиздат, 1957. С. 62-70.

стояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (M. Levy, 1871 г.). Статьи Сен-Венана и Леви¹⁵ появились одна за другой в *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона—Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций¹⁶. Теория Леви, поскольку она основана на "неассоциированном" законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга.

Длительное время уравнения пространственной задачи оставались неизученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви—Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболически. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений. Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптически (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви—Мизеса, действительные характеристики отсутствуют.¹⁷ Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования, развитые ранее для плоской

¹⁵Оригинальная работа: Levy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état// *Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences*, 1870, t. 71, pp. 1323-1325.

¹⁶В настоящее время закон течения, устанавливающий пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций, называют законом Леви—Мизеса.

¹⁷Как представляется, задача поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона—Треска, для огромного большинства пространственных состояний уравнения теории пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Не спасает положение учет упругих деформаций и различных гипотез упрочнения. Все равно для абсолютного большинства пространственных состояний соответствующие уравнения эллиптически. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время "неассоциированных" законов пластического течения.

задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние, и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов¹⁸. Фигуры скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся (с указанием на оригинальную работу Д.К. Чернова 1885 г.) в известной монографии: Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952. 556 с. (см. вклейку, с. 103). Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. Сейчас при исследовании пластического напряженного состояния широко пользуются представлениями о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия¹⁹.

Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А. Наар, Th. von Karman) выдвинули условие полной пластичности²⁰, которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска²¹, и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определимыми.

В 1923 г. Генки (Н. Hencky) предложил использовать условие полной пластичности Хаара—Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определимой системе уравнений равновесия, которая,

¹⁸Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Его биография и список научных трудов опубликованы в книге: Гумилевский Л.И. Чернов. (Научн. ред. проф. И.Я. Конфедератов.) М.: Молодая гвардия, 1975. 208 с.

¹⁹Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в монографиях: Надаи А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М., Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.; Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Изд-во Мир, 1969. 864 с.

²⁰Оригинальная работа: Naar A., Karman Th. Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien// Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. H. 2. S. 204–218.

²¹Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Кулона—Треска и соответствует ребру призмы Кулона—Треска. Ясно, что состояние полной пластичности может быть описано также в рамках условия пластичности Мизеса. Однако в этом случае ассоциированный с условием пластичности Мизеса закон течения приводит к неправильно определенной системе кинематических уравнений.

как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона—Треска исследовались Р. Шилдом (R.T. Shield, 1957) для ребер и граней призмы Кулона—Треска²².

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара—Кармана, доказав статическую определимость и гиперболичность основных уравнений²³. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла (R. Hill), полагавшего, что "такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара—Кармана для металлов физически нереальна, и она вводит ошибку неизвестной величины" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 321). Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви—Мизеса определить связанного с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара—Кармана и замене закона течения Леви—Мизеса на *обобщенный* ассоциированный с условием пластичности Кулона—Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским в 1946 г. (Ишлинский А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости// Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90-108; см. также: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62-83, где на с. 80 приводится полная система уравнений для пространственной задачи математической теории пластичности в рамках гипотезы полной пластичности Хаара—Кармана), который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций²⁴, следующие из *обобщенного* ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: "Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение

²²Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry// Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267-287.

²³Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля// Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201-224.

²⁴А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

2k. Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение.” Таким образом, А.Ю.Ишлинский отказался от ”неассоциированного” определяющего закона Леви и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска²⁵.

Результаты А.Ю.Ишлинского предвосхитили исследования Д.Д.Ивлева в области пространственной задачи математической теории пластичности²⁶, в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара—Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона—Треска) и *обобщенный* ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в *регулярных* точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter) в 1953 г.²⁷ Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

То обстоятельство, что на ребре призмы Кулона—Треска обобщенный ассоциированный закон течения не предписывает ориентацию вектора, представляющего в пространстве главных напряжений тензор приращений пластических деформаций, имеет принципиально важное значение: для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, пластическое течение имеет наибольшую свободу, и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда

²⁵По этому поводу см.: Радаев Ю.Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. №6(56). 2007. С. 102-114.

²⁶Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96; Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546-549.

²⁷Koiter W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. V. 11. №3. 1953. P. 350-354.

важнейших прикладных задач, привлекая схему полной пластичности Хаара—Кармана²⁸. Ясно, что напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определяемыми и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона—Треска, также гиперболически и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения.

В 1966 г. Г.И. Быковцев исследует кинематику пространственного идеально пластического течения на поверхностях максимальной скорости сдвига²⁹. Им было доказано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну³⁰. Следовательно, сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Поэтому результатом такого рода необратимого деформирования должны быть мозаичные узоры, составленные из отрезков линий микроскольжения, ориентированных в асимптотических направлениях.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности как идеального, так и упрочняющегося тела, как с учетом упругих деформаций, так и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений³¹. Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося

²⁸Эта гипотеза (по крайней мере в пространственном варианте) принадлежит Д.Д. Ивлеву. Применительно к осесимметричной задаче точно такая же мысль высказывалась в работе 1957 г. Шилдом, который ясно указал на то обстоятельство, что условие полной пластичности Хаара—Кармана, когда окружное главное напряжение равно одному из главных меридиональных напряжений, должно иметь большое значение для решения осесимметричных задач. Свою работу он рассматривал как одно из свидетельств в пользу этого условия.

²⁹См.: Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М. О поверхностях скольжения в трехмерных жесткопластических телах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. №6. С. 1260-1262; Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мяснянкин Ю.М. О кинематических соотношениях на поверхностях скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 623-631.

³⁰Известно, что поверхность отрицательной Гауссовой кривизны даже локально имеет довольно сложную форму: любая окрестность точки поверхности отрицательной Гауссовой кривизны имеет седлообразную форму и делится асимптотическими направлениями на четыре части, причем две из них являются вогнутыми и две выпуклыми.

³¹См.: Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.

упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т.е. эллиптические; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптические.

В 70-е годы Г.И. Быковцев продолжает развивать теорию пространственных уравнений идеальной пластичности, предложенных Д.Д. Ивлевым. С помощью геометрических условий совместности Адамара—Томаса им были исследованы общие свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряжений и скоростей при условии пластичности Кулона—Треска и состояниях, соответствующим ребру поверхности текучести. Найдены уравнения для интенсивностей слабых разрывов напряжений и скоростей деформаций. Выведены рекуррентные соотношения для лучевых разложений на характеристических поверхностях. Он предлагает новый оригинальный метод построения решений жесткопластических задач путем введения особых линий. Затем получает решения в окрестности особой линии, аналогичные разложениям в лучевые ряды. Все эти результаты позволили ему подробно изучить постановки основных краевых задач для пространственных состояний идеально пластических тел, решение которых должно было вскрыть особенности пространственного напряженно-деформированного состояния. Зная о формальной статической определимости пространственных задач для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, можно сначала ограничиться рассмотрением граничных условий для напряжений³². В отличие от плоской и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности, формулировка граничных условий и постановка краевых задач в пространственном случае не являются столь простыми даже в простейшем случае свободной граничной поверхности, которая во всех практически важных случаях оказывается характеристической. Остается неопределенной ориентация вектора, указывающего главное направление, соответствующее наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. В уравнениях осесимметричного и плоского деформированного состояния теряется специфика трехмерных уравнений: на свободной границе ориентация этого вектора становится вполне определенной, а его векторные линии перестают быть характеристическими. Заметим, что при формулировке граничных условий в напряжениях в пространственном случае все еще остается много неясных вопросов. Так, совсем недавно было установлено, что в случае свободной граничной поверхности векторное поле, указывающее главные направления, соответствующие наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению, является поверхностно безвихревым, и поэтому его векторные линии являются геодезическими.

Проблематика пространственной задачи математической теории пластичности красной нитью проходит через все научное творчество Г.И. Быковцева. В разные годы он периодически к ней возвращается. Классическое и достаточно полное изложение вопросов, относящихся к пространственной задаче теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, имеется в монографии Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с. (особенно гл. 5, с. 205-246), изданной уже после безвременной кончины Г.И. Быковцева.

³²Граничному условию в напряжениях, если для него выполняется естественное ограничение о невыходе за предел текучести, всегда можно удовлетворить, подбирая для этого напряжения, характеризующиеся условием "полной пластичности". Это обстоятельство является дополнительным свидетельством в пользу того, что многие основные пространственные краевые задачи могут быть поставлены и решены в рамках схемы "полной пластичности".

Кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета в настоящее время продолжает проводить активную научно-исследовательскую работу в направлении, определенном Д.Д. Ивлевым и Г.И. Быковцевым в их работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности. В публикациях сотрудников кафедры удалось дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке, делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. В последние годы удалось получить целый спектр новых результатов, касающихся трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести.

- Найдена замечательная инвариантная векторная форма уравнений равновесия, позволяющая исследовать геометрию поля главных направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению, и сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.
- Дана классификация решений трехмерных статических уравнений в зависимости от завихренности указанного поля главных направлений.
- Указаны инварианты, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений.
- Установлена возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.
- С помощью новых подходов проведен анализ плоской и осесимметричной задачи. Он выполнен с использованием аппарата производящих функций.
- Дан анализ трехмерных уравнений математической теории пластичности для напряжений и деформаций в триортогональных изостатических координатах. Явно указаны системы независимых уравнений совместности приращений деформаций в изостатических координатах. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трех независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности.
- Разработаны вопросы классификации и построения максимально простых нормальных форм системы дифференциальных уравнений в частных производных, которой должны удовлетворять функции, определяющие переход от декартовой системы координат к канонической изостатической криволинейной координатной системе. Эта система уравнений является существенно нелинейной. Поиск характеристик указанной системы осуществлен с помощью определения замены независимых переменных в уравнениях в частных производных трехмерной задачи теории идеальной пластичности (для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска) с целью приведения этих уравнений к максимально простой нормальной форме Коши. Точно сформулирован интуитивно понятный критерий *максимальной простоты* нормальной формы Коши и доказана возможность его конструктивного применения к исследуемым уравнениям.
- Исследованы автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности и получены новые автомодельные решения, обобщающие известные решения Шилда.

- Проведен групповой анализ уравнений осесимметричной и пространственной задачи, сформулированных в изостатической системе координат. Построены новые инвариантно-групповые решения, являющиеся следствием высокой степени симметричности пространственных уравнений.

Г.И. Быковцев прожил короткую, но яркую жизнь. Научный вклад Г.И. Быковцева в механику деформируемого твердого тела всегда будет служить непревзойденным образцом оригинального научного творчества. Память о талантливом ученом и педагоге, замечательном человеке Геннадии Ивановиче Быковцеве навсегда сохранится в сердцах тех, кто знал его и работал рядом с ним.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Г.И. БЫКОВЦЕВА³³

1960

- 1) О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1960. № 6. – С. 140–142.

1961

- 2) Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1961. № 1. – С. 173–174 (совместно с Д.Д. Ивлевым).
- 3) О распространении возмущений в среде с нелинейной связью напряжения деформации // Журнал прикл. мех. и технич. физики. – 1961. Вып. 4. – С. 102–108.
- 4) О кручении призматических стержней из анизотропного идеально-пластического материала // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1961. № 3. – С. 151–157.
- 5) О поле скоростей при вдавливании плоского штампа в пластическое полупространство // Прикл. матем. и механика. – 1961. – Т. 25. Вып. 3. – С. 552–553.

1962

- 6) О волочении полосы через криволинейную матрицу в условиях плоской деформации // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1962. – № 1. – С. 144–148.

1963

- 7) О плоской деформации анизотропных идеально-пластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1963. – № 2. – С. 66–74.

1964

- 8) О сжатии анизотропно упрочняющегося слоя шероховатыми плитами // ДАН СССР. – 1964. – Т. 157. № 1. – С. 66–68.
- 9) О предельном равновесии анизотропных пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1964. – № 6. – С. 69–77.
- 10) К теории осесимметричного состояния идеально-пластического материала // Журнал прикл. мех. и технич. физики. – 1964. Вып. 5. – С. 102–108 (совместно с Д.Д. Ивлевым и Т.Н. Мартыновой).
- 11) О функциях нагружения анизотропно упрочняющегося пластического материала // Прикл. матем. и механика. – 1964. – Т. 28. Вып. 4. – С. 794–797 (совместно с В.В. Дудукаленко и Д.Д. Ивлевым).

³³Подготовлен к печати Д.А. Семеновым. Работы располагаются в хронологическом порядке.

- 12) О вязко-пластическом течении круглых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1964. – № 6. – С. 68–76 (совместно с Т.Д. Семьикиной).
- 13) К теории волочения жестко-пластической полосы через криволинейные матрицы // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1964. – № 3. – С. 113–116 (совместно с Ю.М. Мяснянкиным).
- 14) О следствиях постулата Друккера для анизотропных идеально-пластических сред // Прикл. матем. и механика. – 1964. – Т. 28. Вып. 2. – С. 356–360.
- 15) О вязко-пластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // Журнал прикл. мех. и технич. физики. – 1964. Вып. 4. – С. 94–96 (совместно с А.Д. Чернышовым).

1965

- 16) О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. – 1965. – № 1. – С. 56–63 (совместно с Д.Д. Ивлевым и Т.Н. Мартыновой).

1966

- 17) О распространении волн в упруго-вязко-пластической среде // Инж. журн. МТТ. – 1966. Вып. 4. – С. 111–123 (совместно с Н.Д. Вервейко).
- 18) О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах // ДАН СССР. – 1966. – Т. 167. № 6. – С. 1260–1262 (совместно с Ю.М. Мяснянкиным).
- 19) Кинематические соотношения на поверхностях максимального сдвига // В кн.: Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука, 1966. – С. 52–55.
- 20) О распространении волн в упруго-пластических телах при кусочно-линейных условиях пластичности // Сб.: Материалы Всес. симпоз. по распростр. упруго-пластич. волн в сплошных средах. Баку: АН АзербССР, 1966. – С. 72–82 (совместно с Д.Д. Ивлевым и Т.Н. Мартыновой).

1967

- 21) О волнах ускорений в идеальных упруго-пластических телах // Инж. журн. МТТ. – 1967. Вып. 1. – С. 102–110 (совместно с Л.Д. Кретовой).
- 22) О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жестко-пластических телах // ДАН СССР. – 1967. – Т. 177. № 5. – С. 1039–1042 (совместно с Д.Д. Ивлевым и Ю.М. Мяснянкиным).
- 23) О распространении волн в трехмерных упруго-пластических телах при условии полной пластичности // Инж. журн. МТТ. – 1967. Вып. 3. – С. 13–20 (совместно с А.А. Калужиним и Л.Д. Кретовой).

1968

- 24) О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жестко-пластических телах // Прикл. матем. и механика. – 1968. – Т. 32. Вып. 3. – С. 472–477 (совместно с Д.Д. Ивлевым и Ю.М. Мяснянкиным).
- 25) О напряженном состоянии в полимеризующихся средах // Инж. журн. МТТ. – 1968. Вып. 5. – С. 91–93 (совместно с М.С. Чирко).
- 26) О кинематических соотношениях на поверхностях скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. – 1968. – Т. 32. Вып. 4. – С. 623–631 (совместно с Д.Д. Ивлевым и Ю.М. Мяснянкиным).

1969

- 27) Исследование пульсаций каверны в вихре // Труды Акустического института АН СССР. – 1969 (совместно с Г.И. Кузнецовым).

1970

- 28) О динамическом деформировании пластин из нелинейного вязко-пластического материала // Тр. VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. – 1970. – С. 13–16 (совместно с Н.А. Автотеевко и Т.Д. Семькиной).
- 29) О движении со сверхзвуковой скоростью ступенчатой нагрузки по упруго-вязко-пластическому полупространству // Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та. – 1970. Вып. 2. – С. 59–70 (совместно с Н.Д. Вербейко, Н.М. Зиновьевым и С.А. Приваловым).
- 30) Отражение сдвиговой волны граничной плоскостью, свободной от напряжений // Материалы IV Всесоюзного симпозиума по распространению упругих и упруго-пластических волн, Кишинев. – 1970 (совместно с Н.Д. Вербейко).

1971

- 31) Об отражении плоско-поляризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упруго-пластической среде // Прикл. матем. и механика. – 1971. – Т. 35. Вып. 1. – С. 71–79 (совместно с В.А. Баскаковым).
- 32) Об уточнении теории предельного равновесия оболочек вращения // Прикл. мех. – 1971. – Т. 7. № 4. – С. 28–34 (совместно с Ю.П. Листровой и Г.А. Мурлиной).
- 33) Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с. (совместно с Д.Д. Ивлевым).
- 34) О деформировании конструкций из нелинейного вязко-пластического материала // Сб. научн. тр. Фак. прикл. мат. и мех. Воронеж. ун-та. – 1971. Вып. 1 – С. 13–20 (совместно с Н.А. Автотеевко, и Т.Д. Семькиной).
- 35) Расчет оболочек вращения с учетом уточненных гипотез Кирхгофа–Лява // Прикл. механика. – 1971. Вып. 4 (совместно с Ю.П. Листровой, и Г.А. Мурлиной).

- 36) О температурных напряжениях в стеклопластиках и армированных средах // Сб. научн. тр. Фак. прикл. мат. и мех. Воронеж. ун-та. – 1971. Вып. 1. – С. 1–12 (совместно с В.А. Александровым и Нго Тхань Фонг).

1972

- 37) О распространении ударных волн в упруго-пластических средах // Прикл. матем. и механика. – 1972. – Т. 36. Вып. 1. – С. 106–116 (совместно с Л.Д. Кротовой).
- 38) Волны ускорений в идеальном газе // Тр. НИИ мат. Воронеж. ун-та. – 1972. Вып. 6. – С. 37–41 (совместно с Л.А. Бабичевой).
- 39) Об одной модели теории армированных сред // Сб.: Мех. сплошн. среды и родств. пробл. анализа. М.: Наука, 1972. – С. 103–110 (совместно с Нго Тхань Фонг).

1973

- 40) Лучевой метод решения динамических задач в вязко-упруго-пластических материалах // Прикл. матем. и механика. – 1973. – Т. 37. Вып. 1. – С. 145–156 (совместно с Л.А. Бабичевой и Н.Д. Вервейко).
- 41) Применение метода характеристик к решению задачи о движении ступенчатой нагрузки // Сб.: Распространение упругих и упруго-пластических волн. Алма-Ата: Наука, 1973. – С. 82–94 (совместно с Н.Д. Вервейко и Н.М. Зиновьевым).

1975

- 42) О пульсации сферического пузырька в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1975. № 2. – С. 153–155 (совместно с Г.С. Разореновым).
- 43) О теоремах единственности в теории течения пластических сред // Сб., посвящ. 60-летию акад. Ю.Н. Работнова. М.: Наука, 1975.
- 44) О теоремах единственности в теории течения упрочняющихся упруго-пластических тел // Сб.: Мех. деформир. тел и констр. М.: Машиностроение, 1975. – С. 84–91.

1976

- 45) Об условиях совместности на поверхностях разрывов // Сб.: Мех. деформир. тверд. тела. Куйбышев, 1976. Вып. 2. – С. 21–26 (совместно с Н.П. Бестужевой и В.Н. Дуровой).
- 46) Распространение поверхностных волн и поверхностная неустойчивость в упругих телах // Сб. статей по прикладной математике и механике: Мех. деформир. сред. Куйбышев, 1976. – С. 77–88 (совместно с Н.П. Бестужевой и В.Н. Дуровой).

1977

- 47) Волны сильного разрыва на поверхности пластически деформирующегося тела // Сб.: Мех. деформир. тверд. тела. Куйбышев, 1977. – С. 65–69 (совместно с Н.П. Бестужевой и В.Н. Дуровой).
- 48) Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Сб.: Мех. деформир. сред. Куйбышев, 1977. Вып. 2. – С. 33–68 (совместно с И.А. Власовой).

1978

- 49) Лучевой метод решения уравнений газовой динамики // Прикл. мех. – 1978. – Т. 14. № 9. – С. 118–124 (совместно с В.Н. Дуровой).

1979

- 50) Плоская деформация идеальных жесткопластических тел с учетом изменения границ // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. № 2. – С. 71–78 (совместно с А.И. Хромовым).
- 51) Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жесткопластических сред // Сб.: Динамика сплош. среды. Новосибирск, 1979. Вып. 1. – С. 31–36 (совместно с И.А. Власовой).

1980

- 52) О построении теории течения упругопластических сред при конечных деформациях // ДАН УзССР. – 1980. № 4. – С. 18–21 (совместно с О.Л. Сыгуровой).

1981

- 53) Применение метода возмущений к теории кручения упругопластических стержней // Прикл. матем. и механика. – 1981. – Т. 45. Вып. 5. – С. 932–939 (совместно с Ю.Д. Цветковым).
- 54) К исследованию нестационарных поверхностных волн в нелинейно-упругих средах // Прикл. мех. – 1981. – Т. 17. № 12. – С. 27–33 (совместно с Н.П. Бестужевой и В.Н. Дуровой).
- 55) Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в идеальное жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – С. 47–52 (совместно с А.И. Хромовым).

1982

- 56) Об одной модели разрушения в идеально упругопластических средах // Пробл. прочности. – 1982. Вып. 3. – С. 72–75 (совместно с Л.Г. Лукашевым и С.Л. Степановым).

1983

- 57) Об одной закономерности в ползучести металлов // ДАН СССР. – 1983. – Т. 273. № 5. – С. 1080–1082 (совместно с В.И. Гореловым).

1984

- 58) Автомоделные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // Журнал прикл. мех. и техн. физики. – 1984. Вып. 6. – С. 148–156 (совместно с В.В. Колокольчиковым и П.Н. Сыгуровым).

1985

- 59) Феноменологическое построение кинетических уравнений теории ползучести // ДАН СССР. – 1985. – Т. 283. № 1. – С. 5–61 (совместно с В.И. Гореловым).
- 60) Акустическое поле направленного источника в океанических волноводах // ДАН СССР. – 1985. – Т. 280. № 1. – С. 57–59 (совместно с Г.И. Кузнецовым и А.Н. Степановым).

1986

- 61) Движение со сверхзвуковой скоростью ступенчатой нагрузки по полупространству с изменяющимися упругими модулями // Изв. АН Арм.ССР. Мех. – 1986. – Т. 39. № 2. – С. 49–56 (совместно с А.В. Колокольчиковым и В.В. Колокольчиковым).
- 62) Оценка прочности сцепления анизотропной оболочки при взаимодействии ее с неоднородно-стареющим вязкоупругим цилиндром // Сб.: Анал. и числ. методы решения краевых задач пластич. и вязкоупругости. Свердловск, 1986. – С. 21–26 (совместно с А.С. Лукановым).

1987

- 63) Двумерная задача нагружения упругопластической плоскости, ослабленной отверстием // Прикл. матем. и механика. – 1987. – Т. 51. Вып. 2. – С. 314–322 (совместно с Ю.Д. Цветковым).
- 64) Импульсное нагревание полупространства с учетом термоупругого сопряжения и конечной скорости распространения тепла // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 2. – С. 101–107 (совместно с А.Г. Шаталовым).

1988

- 65) Построение кинетических уравнений теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. № 1. – С. 147–157 (совместно с О.И. Бережной и В.И. Гореловым).

1989

- 66) Модель упрочняющейся среды, имеющей различные законы упрочнения при растяжении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. – 1989. – № 2. – С. 146–151 (совместно с Т.Б. Лавровой).

1990

- 67) Конечные деформации упругопластических сред // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. № 1. – С. 59–62 (совместно с А.В. Шитиковой).

1994

- 68) Кусочно-линейные потенциалы в нелинейной механике // ДАН РАН. – 1994. – Т. 335. № 3. – С. 310–312 (совместно с Н.Г. Быковцевой).

1996

- 69) Общие свойства уравнений нелинейной теории упругости при кусочно-линейных потенциалах // Прикл. матем. и механика. – 1996. – Т. 60. Вып. 3. – С. 505–515.
- 70) Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН РАН. – 1996. – Т. 347. № 2. – С. 199–201 (совместно с А.А. Бурениным и Г.И. Ковтанюк).

1998

- 71) Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с. (совместно с Д.Д. Ивлевым).³⁴

2002

- 72) Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сборник статей. – Владивосток: Дальнаука, 2002. – 566 с.³⁵

Поступила в редакцию 2/X/2007;
в окончательном варианте — 2/X/2007.

³⁴Эта монография вышла в свет после безвременной кончины Геннадия Ивановича Быковцева. Наряду с известными результатами, монография содержит ряд новых результатов в области теории идеальной пластичности, принадлежащих Г.И. Быковцеву.

³⁵Это издание включает наиболее значимые научные работы Г.И. Быковцева разных лет. В настоящее время в Самарском государственном университете готовится к печати двухтомное собрание сочинений Г.И. Быковцева, наиболее полно отражающее его выдающийся вклад в механику деформируемого твердого тела.