УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ[1]

© 2007 Ю.Н. Шишмарева[2]

В этой работе рассматривается краевая задача для строго гиперболической системы в области, выпуклой относительно характеристик этой системы с границей, составленной из нехарактеристических гладких дуг, на которых задаются линейные комбинации решений системы. Получено достаточное условие однозначной разрешимости поставленной задачи в специальным образом определенных весовых классах обобщенных решений системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим на плоскости гиперболическую систему первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial y} - A\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

относительно неизвестного вектора $u = (u_1, u_2, \ldots, u_l)$, где вещественная постоянная матрица A размерности $l \times l$ допускает только различные вещественные собственные значения ν_j, $j = 1, 2, \ldots, l$. Пусть $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_l$, и вещественный вектор $B_j = (B_{1j}, B_{2j}, \ldots, B_{lj})$ есть собственный вектор, отвечающий собственному значению ν_j. Легко видеть, что $B = (B_1, B_2, \ldots, B_l)$, где B_j рассматриваются как столбцы, приводит матрицу A к диагональному виду $J = B^{-1}AB = \mathrm{diag}\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l\}$. Условимся под ν_j-характеристикой понимать прямую, параллельную прямой $x + \nu_j y = 0$.

Пусть область D ограничена двумя гладкими дугами Γ_1 и Γ_2 с общими концами τ_1 и τ_2. Предполагается, что каждая из дуг Γ_i во всех своих точках некасательна к характеристикам системы (1) и, значит, область D выпукла относительно данных характеристик. Другими словами, для любого числа c множество $D \cap \{x + \nu_j y = c\}$ связно. Такая область относится к типу допустимых областей для гиперболических систем, введенных в [1].

Характеристики каждого семейства однозначно определяют гомеоморфизмы α_j, $j = 1, 2, \ldots, l$ (сдвиги) дуги Γ_2 на Γ_1 по следующему правилу: каждой точке $t \in \Gamma_2$ ставится в соответствие точка $\alpha_j(t) \in \Gamma_1$, для которой $[t,\ \alpha_j(t)]$ является отрезком ν_j-характеристики. Считая дуги Γ_i ориентированными от τ_1 к τ_2, композицию сдвигов $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i$, $j \neq i$ назовем левой, если точка $\alpha_j^{-1}(\alpha_i(t)) \in \Gamma_2$ предшествует

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С. Пулькиной.
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 070100299).

[2]Шишмарева Юлия Николаевна (zhyulia@inbox.ru), кафедра математического анализа Белгородского государственного университета, 308015, Россия, г. Белгород, ул. Победы, 85.

точке $t \in \Gamma_2$, и правой, если выполняется противоположное свойство для всех точек $t \in \Gamma_2$. При каждом сдвиге α_i точки τ_1 и τ_2 остаются неподвижными.

Помимо классических решений $u \in C^1(D)$ системы (1) можно рассматривать и обобщенные решения этой системы.

Определение 1. Функция $u \in C(D)$ является обобщенным решением системы (1), если справедливо интегральное тождество

$$\int_D u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - A^T\frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy = 0, \qquad v \in C_0^\infty(D).$$

Здесь и ниже запись uv для векторов u и v означает их скалярное произведение.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ — произвольный набор вещественных чисел.

Определение 2. Обозначим $C_\lambda(\bar{D}) = C_\lambda(\bar{D}; \tau_1, \tau_2)$ класс непрерывных на $\bar{D}\setminus\{\tau_1, \tau_2\}$ функций комплексной переменной $z = x + iy$ такой, что функции $u(z) = u(x, y)$ этого класса можно представить в виде

$$u(z) = |z - \tau_1|^{\lambda_1}|z - \tau_2|^{\lambda_2}u_0(z),$$

где $u_0(z) \in C(\bar{D} \setminus \{\tau_1, \tau_2\})$ и ограничена в области D.

Относительно нормы

$$|u|_{C_\lambda} = \sup_{z \in D}|u_0(z)|$$

это пространство банахово. Аналогичный смысл имеет пространство $C_\lambda(\Gamma; \tau_1, \tau_2)$ по отношению к функциям, заданным на границе $\partial D = \Gamma$.

Будем искать обобщенное решение $u \in C_\lambda(\bar{D})$ системы (1) по краевому условию

$$(a_1u)|_{\Gamma_1} = f_1, \qquad (a_iu)|_{\Gamma_2} = f_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, l, \tag{2}$$

где вектор-функции $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l})$ и $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{il})$, $i = 2, 3, \ldots, l$ непрерывны на, соответственно, Γ_1 и Γ_2. Удобно их распространить на всю замкнутую область $\bar{D}$, считая эти функции постоянными вдоль ν_1-характеристик. Это же относится и к скалярным функциям $f_i \in C(\bar{D})$.

Положим для краткости $b_{ij} = a_iB_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$.

Определение 3. Задачу (1)–(2) отнесем к нормальному типу, если определитель матрицы

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \ldots & b_{ll} \end{pmatrix} \tag{3}$$

отличен от нуля всюду в $\bar{D}$ или, что равносильно, всюду на Γ_2.

В случае простейшей гиперболической системы уравнений колебания струны краевая задача с условием типа (2) решена в работе [2].

2. Основные результаты

Положим

$$q_j(\tau_k) = \frac{|\alpha_1'(\tau_k)|}{|\alpha_j'(\tau_k)|}, \qquad \delta_j = \max_{1 \leqslant i \leqslant l}|b_{1j}(b^{-1})_{i1}(\tau_k)|, \qquad j = 2, 3, \ldots, l,$$

где дифференцирование функций α_i осуществляется по параметру длины дуги. Ниже будет показано, что при каждом значении $k = 1, 2$ числа $\ln q_j(\tau_k)$, $j = 2, 3, \ldots, l$ одного знака, и, следовательно, уравнение

$$\sum_{j=2}^{l} \delta_j(\tau_k) \left[q_j(\tau_k)\right]^{\lambda} = 1 \tag{4}$$

имеют единственное решение, которое обозначим λ_k^*. При изменении ориентации дуг эти числа меняют знак. Удобно выбрать нумерацию точек τ_1, τ_2 так, чтобы $\ln q_j(\tau_1) > 0$.

Теорема 1. Пусть задача (1)–(2) принадлежит к нормальному типу и $\lambda_1 < \lambda_1^*$, $\lambda_2 > \lambda_2^*$. Тогда эта задача однозначно разрешима в классе $C_\lambda(\bar{D}; \tau_1, \tau_2)$ обобщенных решений.

Доказательство. Введем новую неизвестную вектор-функцию ϕ с помощью преобразования $u = B\phi$. Тогда вектор-функция $\phi \in C(D)$ будет обобщенным решением распадающейся системы

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y} - \nu_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что общее решение скалярного уравнения (5) имеет вид $\phi_j(x, y) = \varphi_j(x + \nu_j y)$. В результате приходим к представлению обобщенного решения системы (1) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^{l} B_{ij} \varphi_j(x + \nu_j y), \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

где функции $\varphi_j \in C(I_j)$, здесь I_j – образ области D при отображении вдоль прямой $x + \nu_j y = 0$. В терминах сдвигов α_i этот факт можно выразить соотношением

$$\phi_j = \phi_j \circ \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \tag{6}$$

то есть функции ϕ_j сохраняют постоянное значение вдоль сдвигов α_j, введенных выше.

Краевое условие (2) с помощью сдвига α_1 можно определить на одной дуге Γ_2

$$b_1 \tilde{\phi} = f_1, \quad b_i \phi = f_i, \quad i = 2, 3, \ldots, l, \tag{7}$$

где $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{il})$, $i = 2, 3, \ldots, l$ и учтено постоянство функций b_{ij} и f_i вдоль ν_1-характеристик. Используя (6), определим $\tilde{\phi} = \phi \circ \alpha_1 = (\phi_1, \phi_2 \circ \beta_2, \ldots, \phi_l \circ \beta_l)$, где сдвиги $\beta_j = \alpha_j^{-1} \circ \alpha_1$, $j = 2, 3, \ldots, l$ задают отображение дуги Γ_2 на себя. Таким образом, задача (1)–(2) редуцируется эквивалентным образом к функциональному уравнению

$$(b + \sum_{j=2}^{l} b_{1j} \Delta_{1j} T_j)\phi = f. \tag{8}$$

Здесь постоянные матрицы Δ_{1j} размерности $l \times l$ составлены из нулей и единицы на $(1, j)$-месте, матрица-функция $b(t)$ определена на дуге Γ_2 и описана (3). Операторы $T_j \phi = \phi \circ \beta_j$, $j = 2, 3, \ldots, l$ являются операторами сдвига дуги Γ_2 на себя. В силу указанных свойств сдвигов α_i эти операторы отображают класс $C_\lambda(\Gamma_2)$ на себя. Вектор-функция $f = (f_1, f_2, \ldots, f_l)$ определена на дуге Γ_2.

Таким образом, задача (1)–(2) однозначно разрешима, если обратим оператор

$$G = 1 + b^{-1} \left(\sum_{j=2}^{l} b_{1j} \Delta_{1j} T_j \right), \tag{9}$$

который существует в силу принадлежности этой задачи к нормальному типу.

Рассмотрим весовую функцию

$$\rho_\lambda(t) = |t-\tau_1|^{\lambda_1}|t-\tau_2|^{\lambda_2},$$

которая осуществляет изоморфизм пространства $C_0(\Gamma_2)$ на $C_\lambda(\Gamma_2)$ по правилу: $\phi_0 \to \phi = \rho_\lambda\phi_0$. Тогда достаточно рассмотреть оператор

$$G_0 = 1 + \sum_{j=2}^{l} \tilde{b}_{1j}T_j \tag{10}$$

с коэффициентами

$$\tilde{b}_{1j}(t) = b^{-1}(t)b_{1j}(t)\Delta_{1j}\frac{|\beta_j(t)-\tau_1|^{\lambda_1}|\beta_j(t)-\tau_2|^{\lambda_2}}{|t-\tau_1|^{\lambda_1}|t-\tau_2|^{\lambda_2}}$$

в пространстве $C_0(\Gamma_2)$.

Сдвиги β_j непрерывно дифференцируемы, и производная $q_j = |\beta_j'|$ по параметру длины дуги всюду отлична от нуля. Это следует из того, что дуги Γ_i некасательны к характеристикам системы (1). Убедимся, что все сдвиги β_j, одного типа и при выбранном порядке собственных значений ν_j они правые, т.е. $|\beta_j'(\tau_2)| < 1 < |\beta_j'(\tau_1)|$. Для этого перейдем к характеристической системе координат с началом в точке τ_1. Не умаляя общности, можно считать, что $\tau_1 = 0$, тогда формулы перехода к новой системе координат имеют вид $\bar{x} = x+\nu_1 y$, $\bar{y} = x+\nu_l y$. В силу условий, наложенных на область D, она будет располагаться в первой координатной четверти. Так определенное аффинное преобразование не меняет ориентацию плоскости, поэтому прямые $L_j : x+\nu_j y = 0$, $j = 1,2,\ldots,l$ пересекают прямую $L : y = -1$ в старой системе координат в том же порядке, что и их образы $\bar{L}_1 : \bar{x} = 0$, $\bar{L}_j : \bar{y} = (\nu_j - \nu_3)\bar{x}/(\nu_j-\nu_1)$, $j = 2,3,\ldots,l-1$, $\bar{L}_l : \bar{y} = 0$ прямую $\bar{L} : \bar{y} = \bar{x}+(\nu_1-\nu_l)$ в новой системе координат. Через произвольную точку t дуги Γ_1 проведем прямые, параллельные прямым $\bar{L}_j$, до пересечения с прямой $\bar{L}$ в новой системе координат. Эти прямые пересекут и дугу Γ_2. Обозначим полученные точки пересечения t_j соответственно. Считая дугу Γ_2 ориентированной от 0 к образу точки τ_2 в новой системе координат, получим следующий порядок расположения точек на дуге Γ_2: t_1, t_2, t_3. Таким образом, если рассматривать композицию сдвигов $\alpha_j^{-1}\circ\alpha_1$, то образом точки t_1 является точка t_j, $j = 2,3,\ldots,l$. Так как точка t выбрана произвольно, то композиция будет правой для всех точек дуги Γ_2.

Достаточное условие обратимости операторов вида (10), как будет показано ниже в лемме, имеет вид

$$R_2 + R_3 + \ldots + R_l < 1, \ \text{где } R_j = \max[|\tilde{b}_{1j}(\tau_1)|, |\tilde{b}_{1j}(\tau_2)|]. \tag{11}$$

В случае пространства $C_\lambda(\Gamma_2)$ числа R_j принимают вид

$$R_j = \max[|(b^{-1}b_{1j})(\tau_1)\Delta_{1j}|\ q_j^{\lambda_1}(\tau_1), |(b^{-1}b_{1j})(\tau_2)\Delta_{1j}|\ q_j^{\lambda_2}(\tau_2)].$$

Причем норму в пространстве непрерывных $l\times l$ матриц-функций $g(t)$ определим как

$$|g(t)| = \sum_{j=1}^{l} \max_{1\leqslant i\leqslant l} |g_{ij}(t)|,$$

в пространстве l вектор-функций $\xi(t)$

$$|\xi| = \max_{1\leqslant i\leqslant l} |\xi_i|,$$

при этом будут справедливы требования, наложенные на норму в лемме.

Таким образом, при выполнении условия (11) оператор G обратим и задача (1)–(2) однозначно разрешима. Легко убедиться, что уравнения (4), полученные для вычисления критического значения весового порядка λ_k^*, однозначно разрешимы. Для этого достаточно сделать замену $x = e^{\lambda}$, $n_j = \ln q_j(\tau_k)$. Учитывая тип сдвигов $n_j < 0$ при $k = 2$, $n_j > 0$ при $k = 1$ для $j = 2, 3, \ldots, l$. Тогда функция

$$F(x) = \sum_{j=2}^{l} \delta_j x^{n_j}$$

для всех $x > 0$ монотонно возрастает при $k = 1$ и убывает при $k = 2$, то есть существует единственный корень данного уравнения для каждого значения k. Неравенства из условия теоремы сразу же следуют из (11). Теорема доказана.

Замечание. Значения производных

$$q_j(\tau_k) = |\beta'_j(\tau_k)| = |(\alpha_j^{-1} \circ \alpha_1)'(\tau_k)| = \frac{|\alpha'_1(\tau_k)|}{|\alpha'_j(\tau_k)|}, \quad j = 2, 3, \ldots, l, \quad k = 1, 2$$

по параметру длины дуги можно вычислить явно. Для этого снова рассмотрим характеристическую систему координат с началом в точке $\tau_1 = 0$, формулы перехода к которой имеют вид $\bar{x} = x + \nu_j y$, $\bar{y} = x\nu_j - y$. Новая система координат прямоугольная и область D будет располагаться в первой координатной четверти. Пусть дуги Γ_i задаются уравнениями $\bar{y} = g_{ij}(\bar{x})$, $i = 1, 2$. Образом каждой из дуг при отображении вдоль ν_j-характеристики будет некоторый отрезок I_j координатной оси $\bar{x}$. Рассмотрим отображения $\gamma_{ij}(t) = t + ig_{ij}(t)$, $t \in I_j$ отрезка I_j на Γ_i соответственно. Тогда сдвиг α_j, который переводит точку с координатами $(\bar{x}, g_2(\bar{x}))$ в точку $(\bar{x}, g_1(\bar{x}))$, можно представить в виде композиции $\alpha_j = \gamma_{1j} \circ \gamma_{2j}^{-1}$. Таким образом,

$$|\alpha'_j(\tau_k)| = \frac{|\gamma'_{1j}(\tau_k)|}{|\gamma'_{2j}(\tau_k)|} = \frac{\sin\theta_{2j}(\tau_k)}{\sin\theta_{1j}(\tau_k)},$$

где учтено, что $|\gamma'_{ij}(\tau_k)| = \sqrt{1 + (g'_{ij}(\tau_k))^2} = 1\big/\sin\theta_{ij}(\tau_k)$. Здесь $\theta_{ij}(\tau_k)$ — угол между касательной к дуге Γ_i и характеристикой $x + \nu_j y = 0$ в точке τ_k. Окончательно

$$q_j(\tau_k) = \frac{\sin\theta_{21}(\tau_k)\sin\theta_{1j}(\tau_k)}{\sin\theta_{11}(\tau_k)\sin\theta_{2j}(\tau_k)}, \quad j = 2, 3, \ldots, l.$$

Осталось доказать справедливость условия (11). Норму в пространстве $C^{l\times l}(\Gamma)$ удобно подчинить требованию $|xy| \leqslant |x||y|$, $|x\xi| \leqslant |x||\xi|$, где $x, y \in C^{l\times l}(\Gamma)$, $\xi \in C^{l}(\Gamma)$.

Лемма 1. Пусть сдвиги α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ гладкой дуги $\Gamma = [\tau_1, \tau_2]$ одновременно либо левые, либо правые. Тогда для спектрального радиуса оператора

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i T_i,$$

где $a_i(t) \in C^{l\times l}(\Gamma)$, в пространстве $C_0(\Gamma)$ справедлива оценка

$$\mathrm{spr}A \leqslant R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \qquad R_i = \max[|a_i(\tau_1)|, |a_i(\tau_2)|].$$

Доказательство. Выбрав гладкую параметризацию $[0, 1] \to \Gamma$ дуги Γ, не меняющую ее ориентацию и отображение $\omega(t) = \ln(t/(1-t))$ отрезка $[0, 1]$ на числовую прямую $\mathbb{R}$, как в теореме 3 из [3], можно рассматривать функциональный оператор $\tilde{A}$, аналогичный оператору A, в классе $C(\mathbb{R})$. Далее будем считать, что оператор A действует именно в этом классе.

Пусть для определенности все сдвиги α_i являются правыми, тогда сдвиги $\alpha^+ = \max\{\alpha_i\}$, $\alpha^- = \min\{\alpha_i\}$ также правые. Рассмотрим

$$A^k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i T_i\right)^k, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Выполнив действия и учитывая порядок следования функциональных одночленов $a_i T_i$ в каждом произведении, получим сумму n^k слагаемых. Из них число слагаемых, в которых оператор $a_i T_i$ встречается k_i раз, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, совпадает с числом перестановок из k элементов с повторениями $k_1, k_2, \ldots, k_n$

$$P_k = \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!}.$$

Всевозможные произведения операторов $a_i T_i$, удовлетворяющие этому условию, можно представить в виде произведения $c_1 \tilde{T}_1 \cdot \ldots \cdot c_k \tilde{T}_k$ функциональных операторов $c_j \tilde{T}_j$, каждый из которых равен какому-то $a_i T_i$. Очевидно, что множители $c_j \tilde{T}_j$ с разными номерами могут быть равны одному и тому же $a_i T_i$. Тогда, рассуждая, как и при доказательстве теоремы 1 из [3], получим оценку для нормы таких слагаемых

$$\left| \prod_{j=1}^{k} c_j \tilde{T}_j \right|_{\mathfrak{L}(C_0)} \leqslant c_0^N \prod_{1 \leqslant s \leqslant k} \max[|c_s(-\infty)| + \varepsilon, |c_s(+\infty)| + \varepsilon],$$

где $\varepsilon > 0$, $c_0 = \max\{|a_i|_0\}$, а число N определено, согласно лемме 1 из [3] по отношению к сдвигам α^+ и α^-. В этом произведении $c_s = a_i$ для k_i номеров, $i = 1, 2, \ldots, n$, так что

$$\left| \prod_{j=1}^{k} c_j \tilde{T}_j \right|_{\mathfrak{L}(C_0)} \leqslant C (R_1 + \varepsilon)^{k_1} (R_2 + \varepsilon)^{k_2} \ldots (R_n + \varepsilon)^{k_n},$$

где $R_i = \max[|a_i(-\infty)|, |a_i(+\infty)|]$, число C зависит от c_0, N, ε. Окончательно

$$|A^k|_{\mathfrak{L}(C_0)} \leqslant C \sum_{k_1 + \ldots + k_n = k} \frac{k!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} (R_1 + \varepsilon)^{k_1} (R_2 + \varepsilon)^{k_2} \ldots (R_n + \varepsilon)^{k_n} =$$

$$= C (R_1 + R_2 + \ldots R_n + n\varepsilon)^k.$$

Таким образом, число $R_1 + R_2 + \ldots + R_n + n\varepsilon$ является спектральной границей оператора A. Так как $\varepsilon > 0$ любое, то справедливо неравенство из условия леммы. Лемма доказана.

Пример. Рассмотрим гиперболическую систему первого порядка

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} - 3\frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - 5\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial u_3}{\partial y} - 3\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0
\end{gathered} \tag{12}$$

в области D плоскости, граница которой составлена из дуг Γ_1 и Γ_2, заданных уравнениями $21y = 2x(1 - x)$ и $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, соответственно. Пусть в области D задано краевое условие

$$u_1|_{\Gamma_1} = f_1(t), \quad (u_1 + 2u_2)|_{\Gamma_2} = f_2(t), \quad u_3|_{\Gamma_2} = f_3(t). \tag{13}$$

Здесь $f_i(t)$ — заданные на соответствующей дуге функции.

Характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

системы (12) имеет вид $\chi(z) = (z+2)(z-3)(z-6)$. Упорядочив собственные значения матрицы A по возрастанию: $\nu_1 = -2 < \nu_2 = 3 < \nu_3 = 6$, получаем, что семейства характеристик системы задаются уравнениями $x - 2y = c$, $x + 3y = c$, $x + 6y = c$, $c = \mathrm{const}$. Тогда матрица преобразования

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

приводит матрицу A к диагональному виду

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Краевое условие (13) с помощью сдвига α_1 дуги $\Gamma_2 \to \Gamma_1$ вдоль прямой $x - 2y = 0$ можно определить на одной дуге Γ_2, и задача (12)–(13) редуцируется к функциональному уравнению (8), где матрицы

$$b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det b = 6$, то задача (12)–(13) относится к нормальному типу, и уравнение (8) однозначно разрешимо, если обратим оператор (9), где матрицы

$$b^{-1}b_{12}\Delta_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b^{-1}b_{13}\Delta_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие обратимости оператора (9) в пространстве $C_\lambda(\bar{D})$, согласно доказанной выше теореме, имеет вид (11). Нормы матриц $|b^{-1}b_{12}\Delta_{12}| = |b^{-1}b_{13}\Delta_{13}| = 1$, значения q_i в точках 0 и 1

$$q_2(0) = \frac{27}{17}, \quad q_2(1) = \frac{3}{5}, \quad q_3(0) = \frac{33}{17}, \quad q_3(1) = \frac{9}{25}.$$

Тогда критические значения λ_k^* весового порядка найдем из уравнений (4)

$$\left(\frac{27}{17}\right)^\lambda + \left(\frac{33}{17}\right)^\lambda = 1, \quad k = 1; \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^\lambda + \left(\frac{9}{25}\right)^\lambda = 1, \quad k = 2.$$

Таким образом, задача (12)-(13) в весовом классе $C_\lambda(\bar{D})$ однозначно разрешима, если $\lambda_1 < \lambda_1^* \approx -1{,}243$, $\lambda_2 > \lambda_2^* = \log_{3/5}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Литература

[1] Солдатов, А.П. О допустимых областях для систем главного типа на плоскости / А.П. Солдатов, Ю.Н. Шишмарева // Современные проблемы математической физики и информационные технологии: Труды межд. научн. конф.: т. 1. – Ташкент, 2003. – С. 102–107.

[2] Шишмарева, Ю.Н. Задача Римана–Гильберта для системы уравнений струны / Ю.Н. Шишмарева // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Серия физ.-мат. науки. – 2006. – №6(26). – В. 12. – С. 61–64.

[3] Солдатов, А.П. Оценка спектрального радиуса функциональных операторов / А.П. Солдатов // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Изд-во института математики, 2005. – С. 268–274.

Поступила в редакцию 7/ *VI*/2007;
в окончательном варианте — 7/ *VI*/2007.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR STRONGLY HYPERBOLIC SYSTEM ON THE PLANE[3]

© 2007 J.N. Shishmareva[4]

In the paper problem of a Riemann–Hilbert type is studied for strongly hyperbolic system in domain with noncharacteristic boundary. Theorem of one-to-one solvability of this problem in weighted Holder spaces is obtained.

Paper received 7/ *VI*/2007.
Paper accepted 7/ *VI*/2007.

[3] Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

[4] Shishmareva Julia Nikolaevna (zhyulia@inbox.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Belgorod State University, Belgorod, 308015, Russia.