УДК 517.946

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ КЛАССА ФУКСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2007 Х.А. Чиханов[1]

В статье рассматриваются некоторые свойства решений уравнения класса Фукса четвертого порядка.

В сущности основы теории уравнений класса Фукса давно известны [4]. Однако равитие аналитических методов вычислений с использованием ЭВМ позволяет получить практические результаты, которые ранее не проводились вручную из-за их трудоемкости. В данной статье продолжается исследование уравнений класса Фукса, предпринятое автором в работе [3].

Для уравнения 4-го порядка с аналитическими коэффициентами особая точка x_0 называется правильной, если уравнение имеет вид

$$U^{(4)} + \frac{P_1(x)}{(x-x_0)}U^{(3)} + \frac{P_2(x)}{(x-x_0)^2}U^{(2)} + \frac{P_3(x)}{(x-x_0)^3}U^{(1)} + \frac{P_4(x)}{(x-x_0)^4}U = 0, \tag{1}$$

где P_k — аналитические функции в точке x_0. Уравнение Фукса 4-го порядка с 3-мя особыми точками $0, 1, \infty$ имеет вид:

$$U^{(4)} + \frac{H_1(x)}{x(x-1)}U^{(3)} + \frac{H_2(x)}{x^2(x-1)^2}U^{(2)} + \frac{H_3(x)}{x^3(x-1)^3}U^{(1)} + \frac{H_4(x)}{x^4(x-1)^4}U = 0, \tag{2}$$

где $H_k(x)$ — многочлены соответствующих степеней, удовлетворяющие условию Фукса (см. формулу (6)). В целом многочлены $H_k(x)$ содержат 15 параметров.

Предполагается, что уравнение имеет решения вида $U(x) = (x-x_0)^\lambda V(x)$ в окрестности особой точки x_0, где $V(x)$ — аналитическая в точке x_0 функция. Число λ называется характеристическим показателем (ХП) решения в точке x_0. Подстановка $U(x)$ в уравнение (2) дает для трех особых точек уравнения для ХП:

$$\lambda^4 - A_k\lambda^3 + B_k\lambda^2 - C_k\lambda + E_k = 0, \quad k = 0, 1, 2. \tag{3}$$

Значение $k = 2$ соответствует точке ∞. Коэффициенты этих уравнений связаны с дифференциальным уравнением (2), которое поэтому может быть переписано в

[1]Чиханов Хамит Александрович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

виде:

$$
\begin{gathered}
U^{(4)}+\left[\frac{6-A_0}{x}+\frac{6-A_1}{x-1}\right]U^{(3)}-\\
-\left[\frac{7-3A_0+B_0}{x}+\frac{3A_1-B_1-7}{x-1}-25+3A_1+3A_0-B_2\right]\frac{U^{(2)}}{x(x-1)}+\\
+\left[\frac{1-A_0+B_0-C_0}{x}+\frac{1-A_1+B_1-C_1}{x-1}+r0+\frac{7-A_1-A_0+B_2+C_2}{x}\right]\frac{U^{(1)}}{x^2(x-1)^2}+\\
+\left[-\frac{E_0}{x}+\frac{E_1}{x-1}+s0+s1x+E_2x^2\right]\frac{U}{x^3(x-1)^3}=0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

При этом остаются произвольными еще три параметра $r0$, $s0$ и $s1$, а условие правильности особой точки $x=\infty$ приводит к условию Фукса $A_0+A_1+A_2=6$. Поэтому коэффициент A_2 в уравнении отсутствует. В таком общем виде уравнение класса Фукса целесообразно рассматривать на бесконечнолистной римановой поверхности комплексного переменного x с тремя точками ветвления 0, 1, ∞. Пусть

$$
K=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & \varepsilon_0\\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1\\ \infty & \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \tag{5}
$$

Первый столбец матрицы K — особые точки. Элементы матрицы K, начиная со второго столбца, — характеристические показатели особых точек (по переменной x). Условие Фукса здесь имеет вид:

$$
\alpha_0+\beta_0+\delta_0+\varepsilon_0+\alpha_1+\beta_1+\delta_1+\varepsilon_1+\alpha_2+\beta_2+\delta_2+\varepsilon_2=6. \tag{6}
$$

Аналог схемы Римана $P(K,x,r0,s0,s1)$ есть множество всех решений уравнения (4). Уравнение (4) так же, как и классическое уравнение Римана, обладает замечательной группой преобразований. Первая подгруппа связана с выделением множителя $x^{-\lambda}$

$$
P\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & r0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & s0 & x\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & s1 & \end{array}\right]=x^{-\lambda}P\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0+\lambda & \beta_0+\lambda & \delta_0+\lambda & \varepsilon_0+\lambda & rr0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & ss0 & x\\ \alpha_2-\lambda & \beta_2-\lambda & \delta_2-\lambda & \varepsilon_2-\lambda & ss1 & \end{array}\right], \tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
rr0&=8\lambda^3+(3A_1+6A_0-30)\lambda^2+(-2B_1+12+2B_2+2B_0-6A_0+3A_1)\lambda+r0,\\
ss0&=3\lambda^4+(-6+3A_0+A_1)\lambda^3+(-B_1+3A_1+2B_0-7+B_2)\lambda^2+\\
&\qquad+(B_2-2B_1+3A_1+B_0+C_1-2A_0+C_0+r0)\lambda+s0\\
ss1&=-3\lambda^4+(-2A_1+12-3*A_0)\lambda^3+(-2B_2-B_0-3A_1+B_1+7)\lambda^2+\\
&\qquad+(-B_2-r0+B_1+C_2-B_0-1-2A_1+2A_0)\lambda+s1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Вторая подгруппа преобразований есть группа ангармонических преобразований аргумента: x, $1-x$, $1/x$, $1/(1-x)$, $x/(x-1)$, $1-1/x$. Приведем два образующих преобразования:

$$
P\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & r0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & s0 & x\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & s1 & \end{array}\right]=P\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & R0 & \\ \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & s0+E_2+s1 & 1-x\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & -2E_2-s1 & \end{array}\right]. \tag{9}
$$

Здесь $R0 = -C_2 - 7 + A_0 - r0 + A_1 - B_2$. Повторное применение этого преобразования приводит к исходному уравнению (т.е. является биекцией).

$$P\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & r0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & s0 & x \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & s1 & \end{array}\right] = P\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & q & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & E_1 - s1 & \frac{1}{x} \\ \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & \varepsilon_0 & E_1 - s0 & \end{array}\right]. \tag{10}$$

Здесь $q = -7A_1 - 2B_2 + 3B_1 + 11 - C_1 - r0 - 2B_0$. По аналогии с классическим гипергеометрическим уравнением Гаусса целесообразно выделить уравнение, допускающее аналитическое решение в точке $x = 0$ и второе решение, аналитическое в точке $x = 1$. Это означает, что $\epsilon_0 = 0$ и $\epsilon_1 = 0$. Обозначим через $U_1 = \Phi(K, x, r0, s0, s1)$ решение, аналитическое в точке $x = 0$, где K — матрица характеристических показателей. В ситуации общего положения оно единственно при условии $U_1(0) = 1$ (при произвольных α_0, β_0, δ_0 другие решения уравнения (4) имеют в точке $x = 0$ точку ветвления).

Существует 8 автоморфизмов этого решения (включая тождественное), образующих стационарную подгруппу точки $x = 0$:

$$\begin{aligned}
U_1 \equiv \Phi&\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & r0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & 0 & s0 & x \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & s1 & \end{array}\right] \equiv \\
\equiv (1-x)^{-\alpha_2}\ \Phi&\left[\begin{array}{cccc|cc} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & R1_0 & \\ \beta_2 - \alpha_2 & \delta_2 - \alpha_2 & \varepsilon_2 - \alpha_2 & 0 & S1_0 & \frac{x}{x-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \alpha_2 & \delta_1 + \alpha_2 & \alpha_2 & S1_1 & \end{array}\right] \equiv \\
\equiv (1-x)^{\alpha_1}\ \Phi&\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & R2_0 & \\ \beta_1 - \alpha_1 & \delta_1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & S2_0 & x \\ \beta_2 + \alpha_1 & \delta_2 + \alpha_1 & \varepsilon_2 + \alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_1 & S2_1 & \end{array}\right] \equiv \\
\equiv (1-x)^{-\beta_2}\ \Phi&\left[\begin{array}{cccc|cc} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & R3_0 & \\ \delta_2 - \beta_2 & \varepsilon_2 - \beta_2 & \alpha_2 - \beta_2 & 0 & S3_0 & \frac{x}{x-1} \\ \beta_1 + \beta_2 & \delta_1 + \beta_2 & \beta_2 & \alpha_1 + \beta_2 & S3_1 & \end{array}\right] \equiv \\
\equiv (1-x)^{\beta_1}\ \Phi&\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & R4_0 & \\ \delta_1 - \beta_1 & -\beta_1 & \alpha_1 - \beta_1 & 0 & S4_0 & x \\ \delta_2 + \beta_1 & \varepsilon_2 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_1 & \beta_2 + \beta_1 & S4_1 & \end{array}\right] \equiv \\
\equiv (1-x)^{-\delta_2}\ \Phi&\left[\begin{array}{cccc|cc} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & R5_0 & \\ \varepsilon_2 - \delta_2 & \alpha_2 - \delta_2 & \beta_2 - \delta_2 & 0 & S5_0 & \frac{x}{x-1} \\ \delta_1 + \delta_2 & \delta_2 & \alpha_1 + \delta_2 & \beta_1 + \delta_2 & S5_1 & \end{array}\right] \equiv \\
\equiv (1-x)^{\delta_1}\ \Phi&\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & R6_0 & \\ -\delta_1 & \alpha_1 - \delta_1 & \beta_1 - \delta_1 & 0 & S6_0 & x \\ \varepsilon_2 + \delta_1 & \alpha_2 + \delta_1 & \beta_2 + \delta_1 & \delta_2 + \delta_1 & S6_1 & \end{array}\right] \equiv \\
\equiv (1-x)^{-\varepsilon_2}\ \Phi&\left[\begin{array}{cccc|cc} \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & R7_0 & \\ \alpha_2 - \varepsilon_2 & \beta_2 - \varepsilon_2 & \delta_2 - \varepsilon_2 & 0 & S7_0 & \frac{x}{x-1} \\ \varepsilon_2 & \alpha_1 + \varepsilon_2 & \beta_1 + \varepsilon_2 & \delta_1 + \varepsilon_2 & S7_1 & \end{array}\right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R1_0 &= -19 + 8A_0 - 28\alpha_2 - 3B_0 + B_1 + B_2 + \\
&\quad + C_0 - C_1 - C_2 + 3A_1\alpha_2 - 2B_0\alpha_2 + 2B_2\alpha_2 - \\
&\qquad - r0 + 3A_1\alpha_2^2 - 12\alpha_2^2 + 4\alpha_2^3 + 3A_0\alpha_2^2 + 9A_0\alpha_2, \\
S1_0 &:= \alpha_2 + 2E_0 + E_1 + E_2 - C_0\alpha_2 - C_2\alpha_2 + B_2\alpha_2^2 + B_0\alpha_2 + \\
&\qquad + A_1\alpha_2^3 - s0 + \alpha_2^4 - 6\alpha_2^3 - A_0\alpha_2 + A_0\alpha_2^3, \\
S1_1 &:= -7\alpha_2 - E_0 - 2E_1 + E_2 + s1 - B_0\alpha_2 - C - 1\alpha_2 - \\
&\quad - A_1\alpha_2 + C_0\alpha_2 - C_2\alpha_2 + B_2\alpha_2^2 - 2B_0\alpha_2 + B_1\alpha_2 + \\
&\qquad + A_1\alpha_2^3 - r0\alpha_2 + s0 + \alpha_2^4 - 7\alpha_2^2 - 6\alpha_2^3 + 3A0\alpha_2^2 + 4A_0\alpha_2 + A_0\alpha_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Рекомендуем для сравнения взглянуть на автоморфизмы классической гипергеометрической функции Гаусса [1]. Мы не выписываем значения остальных дополнительных параметров ввиду их громоздкости. Пытливый читатель может их вычислить и попутно проверить другие формулы, используя, например, пакет MAPLE 10.

Кроме U_1, существуют еще 3 решения от аргумента x:

$$U_2 \equiv x^{\alpha_0}\Phi\left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & \beta_0-\alpha_0 & \delta_0-\alpha_0 & -\alpha_0 & ru2_0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & 0 & su2_0 & x \\ \alpha_2+\alpha_0 & \beta_2+\alpha_0 & \delta_2+\alpha_0 & \varepsilon_2+\alpha_0 & su2_1 & \end{array}\right],$$

$$U_3 \equiv x^{\beta_0}\Phi\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0-\beta_0 & 0 & \delta_0-\beta_0 & -\beta_0 & ru3_0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & 0 & su3_0 & x \\ \alpha_2+\beta_0 & \beta_2+\beta_0 & \delta_2+\beta_0 & \varepsilon_2+\beta_0 & su3_1 & \end{array}\right],$$

$$U_4 \equiv x^{\delta_0}\Phi\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_0-\delta_0 & \beta_0-\delta_0 & 0 & -\delta_0 & ru4_0 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & 0 & su4_0 & x \\ \alpha_2+\delta_0 & \beta_2+\delta_0 & \delta_2+\delta_0 & \varepsilon_2+\delta_0 & su4_1 & \end{array}\right]. \tag{13}$$

Мы не выписываем значения вспомогательных параметров. Применяя к решениям $U_1..U_4$ стационарную подгруппу точки $x = 0$, получим 32 решения. Выполняя аналогичные преобразования для точек $x = 1$ и $x = \infty$, получаем 96 решений. Разумеется, любые 4 решения линейно зависимы. Следовательно, существует $C_{96}^4 = 3321960$ формул аналитического продолжения! Конечно, с точностью до стационарных подгрупп особых точек (меняющих только форму решения) мы имеем только 12 решений. Соответственно существует $C_{12}^4 = 495$ формул аналитического продолжения. Если же рассматривать переход от окрестности точки $x = 0$ до точки $x = 1$, например, то достаточно выписать 4 соотношения. Одно из них имеет вид

$$\Phi\left[\begin{array}{cccc|c|c} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & 0 & R0 & \\ \alpha_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & s0+E_2+s1 & 1-x \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & -2E_2-s1 & \end{array}\right] \equiv h_1U_1 + h_2U_2 + h_3U_3 + h_4U_4, \tag{14}$$

где h_k — коэффициенты, подлежащие определению.

В заключение отметим, что дифференциальное уравнение для

$${}_4F_3\left[\begin{array}{c|c} a1, a2, a3, a4 & \\ b1, b2, b3 & x \end{array}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a1)_k(a2)_k(a3)_k(a4)_k}{(b1)_k(b2)_k(b3)_k}\frac{x^k}{k!} \tag{15}$$

является частным случаем ДУ (4). Матрица ХП для (15) имеет вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1-b1 & 1-b2 & 1-b3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & b1+b2+b3-a1-a2-a3-a4 & 0 \\ \infty & a1 & a2 & a3 & a4 \end{array}\right]. \tag{16}$$

Таким образом, уравнение в этом частном случае допускает 3 линейно независимых решения, аналитических в точке $x = 1$.

Отметим также, что двойные гипергеометрические ряды связаны с дифференциальными системами класса Фукса [2].

Литература

[1] Бэйтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье / Г. Бэйтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1967. – 300 с.

[2] Голубева, В.А. Гипергеометрические функции двух переменных Аппеля и Капе де Ферье / В.А. Голубева // Сиб. мат. журн. – 1979. – Т. 20. – №5. – С. 997–1014.

[3] Чиханов, Х.А. Уравнение класса Фукса третьего порядка / Х.А. Чиханов // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2002. – №4(26). – С. 31–38.

[4] Федорюк, М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

Поступила в редакцию 19/*IX*/2007;
в окончательном варианте — 19/*IX*/2007.

THEORY OF THE FUX-CLASS EQUATION OF THE FOURTH ORDER

© 2007 Ch.A. Chikhanov[2]

In the paper characteristics of solution of the Fux-class equation of the fourth order are considered.

Paper received 19/*IX*/2007.
Paper accepted 19/*IX*/2007.

[2]Chikhanov Chamit Alexandrovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.