

УДК 519.214

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ПОРОЖДЕННЫХ УСЛОВНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ПРОЕКЦИЙ УСТОЙЧИВОЙ МЕРЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

© 2007 Е.А. Савинов, С.Я. Шатских²

В работе изучается схема серий асимптотически независимых случайных величин, порожденных конечномерными условными распределениями сигма-аддитивной устойчивой меры на гильбертовом пространстве. Для нормированных сумм таких серий в случае, когда размерность условных распределений стремится к бесконечности, установлена слабая сходимость к гауссовскому распределению. Доказана возможность обобщения результата на более широкие классы мер и пространств.

Введение

Пусть $\mathbf{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathbf{H})$; μ_α — σ -аддитивная устойчивая мера на $\mathbf{H}$ с характеристическим функционалом

$$\Psi_\alpha(y) = \exp \left[- \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \langle y, e_j \rangle^2 \right)^{\alpha/2} \right], \quad y \in \mathbf{H}$$

и показателем $\alpha \in (0, 2)$ (см., например [1]), где $\lambda_j > 0$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$.

Будем рассматривать линейные функционалы $\langle \cdot, e_1 \rangle, \dots, \langle \cdot, e_n \rangle$ в качестве случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $\{\mathbf{H}, \mathcal{B}(\mathbf{H}), \mu_\alpha\}$. Введем для этих величин совместную функцию распределения

$$F_{1..n}^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_n) := \mu_\alpha\{h \in \mathbf{H} : \langle h, e_1 \rangle \leq x_1, \dots, \langle h, e_n \rangle \leq x_n\}$$

и соответствующую этой функции условную функцию распределения

$$F_{i|\widehat{1..i..n}}^{(\alpha)}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$$

случайной величины $\langle h, e_i \rangle$ относительно системы случайных величин

$$\langle h, e_1 \rangle, \dots, \widehat{\langle h, e_i \rangle}, \dots, \langle h, e_n \rangle,$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-1758.2003.1.

²Савинов Евгений Анатольевич (henrylee2005@yandex.ru), Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

здесь $\hat{}$ — знак пропуска элемента.

В нашей работе мы рассматриваем схему серий случайных величин

$$X_{n,i}^{(\alpha)} := \Phi^{-1} \left(F_{i|1\ldots\hat{i}\ldots n}^{(\alpha)} (X_i | X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (i)$$

где $X_i := \langle x, e_i \rangle$, $x \in \mathbf{H}$, $n \in \mathbf{N}$ и через $\Phi^{-1}(\cdot)$ обозначена функция, обратная функции $(0,1)$ -гауссовского распределения $\Phi(\cdot)$.

1. Основной результат

Целью нашей работы является доказательство следующей предельной теоремы.

Теорема 1. Для любого $\alpha \in (0, 2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\alpha \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_{n,i}^{(\alpha)} \leq u \right\} = \Phi(u), \quad u \in \mathbf{R}. \quad (1.1)$$

Утверждение этой теоремы для частного случая меры Коши ($\alpha = 1$) было доказано авторами в работе [7].

Замечание. Введенная система (i) неоднократно являлась объектом исследований в связи с изучением свойств *преобразований независимости* (см., например, [3], [4]) негауссовских случайных величин. В частности, в работе [1], (см. также [2]) было установлено, что при $n \rightarrow \infty$ система случайных величин (i) является асимптотически независимой и для нее имеет место усиленный закон больших чисел.

Как будет показано в п. 2° леммы 4, случайные величины (i) некоррелированы, а ввиду леммы 2, их одномерные распределения являются $(0,1)$ -гауссовскими. Однако, совместные распределения этих случайных величин (см. лемму 5) гауссовскими не являются, поэтому, вообще говоря, каждая серия $\{X_{n,1}^{(\alpha)}, \dots, X_{n,n}^{(\alpha)}\}$ состоит из зависимых случайных величин.

2. Вспомогательные утверждения

В следующей лемме мы укажем явный вид условной функции распределения $F_{i|1\ldots\hat{i}\ldots n}^{(\alpha)}$.

Лемма 1.

$$\begin{aligned} F_{i|1\ldots\hat{i}\ldots n}^{(\alpha)}(x_i | x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) &= \\ &= \int_0^\infty \Phi \left(\frac{x_i}{\lambda_i \sqrt{z}} \right) h_{n-1}^{(\alpha)} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1, k \neq i}^n x_k^2 / \lambda_k^2; z \right) dz, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$h_{n-1}^{(\alpha)}(t; z) = \frac{\exp \left[-\frac{n-1}{2} \left(\frac{t}{z} + \ln z \right) \right] g \left(\frac{z}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1 \right)}{\int_0^\infty \exp \left[-\frac{n-1}{2} \left(\frac{t}{u} + \ln u \right) \right] g \left(\frac{u}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1 \right) du},$$

$g(\cdot; \alpha/2, 1)$ — плотность крайнего устойчивого распределения на полуоси $(0, +\infty)$ с показателем $\alpha/2$ (см. [8, с. 201]).

Доказательство этого утверждения дано в работе [1].

Лемма 2. Для любого $\alpha \in (0, 2]$ случайная величина $X_{n,i}^{(\alpha)}$ имеет $(0, 1)$ -гауссовское распределение и относительно меры μ_α не зависит от семейства случайных величин $\{X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n\}$.

Доказательство следует из теоремы 1 работы [5] (см. также теорему 1 работы [4]).

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1, 6], введем функционал

$$s_\infty^2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, e_i \rangle^2}{\lambda_i^2} \quad (2.2)$$

и множество $\Gamma = \{x \in \mathbf{H} : 0 < s_\infty^2(x) < \infty\}$.

Будем предполагать все вводимые далее случайные величины заданными на множестве Γ и для краткости опускать аргумент (x) .

Считая $s_\infty(x) > 0$, обозначим

$$s_\infty := s_\infty(x), \quad \xi_i := \frac{X_i}{\lambda_i s_\infty}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Лемма 3.

- 1° множество Γ является борелевским ($\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$) и $\mu_\alpha\{\Gamma\} = 1$;
- 2° относительно меры μ_α система случайных величин $s_\infty, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ независима;
- 3° случайные величины ξ_i имеют стандартное гауссовское распределение;
- 4° функция распределения случайной величины s_∞ имеет следующий вид

$$\mu_\alpha\{s_\infty \leq u\} = \int_0^u s g(s^2/2, \alpha/2, 1) ds;$$

- 5° для любого натурального i при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $X_{n,i}^{(\alpha)} \rightarrow \xi_i$, (μ_α -почти наверное).

Доказательства этих утверждений приведены в работе [1] (см. также [6]).

Лемма 4.

- 1° $\mathbf{M}\{X_{n,i}^{(\alpha)}\} = 0, \quad \mathbf{M}\{|X_{n,i}^{(\alpha)}|^2\} = 1$;
- 2° $\text{cov}(X_{n,i}^{(\alpha)}, X_{n,j}^{(\alpha)}) = 0, \quad i \neq j$.

Доказательство.

- 1°. Справедливость этих равенств следует из леммы 2.

- 2°. Вначале, применяя неравенство Коши–Буняковского, используя $(0, 1)$ -гауссовость случайных величин $\{X_{n,i}^{(\alpha)}\}$, заметим, что

$$\mathbf{M}\{|X_{n,i}^{(\alpha)} X_{n,j}^{(\alpha)}|\} \leq \mathbf{M}\{|X_{n,i}^{(\alpha)}|^2\}^{1/2} \mathbf{M}\{|X_{n,j}^{(\alpha)}|^2\}^{1/2} = 1 < +\infty.$$

Пользуясь формулой (1.5) и обозначениями (2.3), применяя равенства

$$\Phi(-v) = 1 - \Phi(v), \quad \Phi^{-1}(1 - u) = -\Phi^{-1}(u),$$

случайную величину $X_{n,i}^{(\alpha)}$ можно представить в виде

$$X_{n,i}^{(\alpha)} = \text{sgn}(\xi_i) \Phi^{-1} \left[\int_0^\infty \Phi \left(\frac{|\xi_i| s_\infty}{\sqrt{z}} \right) h_{n-1}^{(\alpha)} \left(\frac{s_\infty^2}{n-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \xi_k^2; z \right) dz \right]. \quad (2.4)$$

Используя пп. 2°, 3°, 4° леммы 3, формулу (2.4) и сокращающее обозначение $\tilde{g}(s) := sg(s^2/2, \alpha/2, 1)$, вычисляем математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{X_{n,i}^{(\alpha)} X_{n,j}^{(\alpha)}\} &= \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \text{sgn}(t_i) \Phi^{-1} \left[\int_0^\infty \Phi\left(\frac{|t_i|s}{\sqrt{z}}\right) h_{n-1}^{(\alpha)}\left(\frac{s^2 \sum_{k \neq i} t_k^2}{n-1}; z\right) dz \right] \times \\ &\quad \times \text{sgn}(t_j) \Phi^{-1} \left[\int_0^\infty \Phi\left(\frac{|t_j|s}{\sqrt{z}}\right) h_{n-1}^{(\alpha)}\left(\frac{s^2 \sum_{k \neq j} t_k^2}{n-1}; z\right) dz \right] \times \\ &\quad \times \tilde{g}(s) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n t_k^2\right) dt_1 \dots dt_n ds. \end{aligned}$$

Выделим отдельно в этом выражении двойной внутренний интеграл по dt_i , dt_j . Тогда, ввиду нечетности подынтегральной функции по каждой из переменных t_i , t_j , он равен нулю. Поэтому, с учетом п. 1°, будем иметь

$$\text{cov}(X_{n,i}^{(\alpha)}, X_{n,j}^{(\alpha)}) = 0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос о зависимости системы случайных величин $\{X_{n,i}^{(\alpha)}, i = \overline{1, n}\}$. Для этого рассмотрим пример случайного вектора

$$(X_{n,1}^{(1)}, \dots, X_{n,n}^{(1)}),$$

порожденного условными функциями распределения n -мерной проекции меры μ_1 (мера Коши). Мы покажем, что несмотря на гауссовость одномерных маргинальных распределений и некоррелируемость компонент, многомерное распределение этого вектора гауссовским не является и поэтому его компоненты не могут быть независимы.

Лемма 5. Для любого $n \geq 2$ случайные величины

$$X_{n,1}^{(1)}, \dots, X_{n,n}^{(1)}$$

зависимы.

Доказательство. Воспользуемся известным представлением условных функций распределения n -мерного распределения Коши (см., [6]) с помощью бета-распределения $B(\cdot; \cdot, \cdot)$ (см. [6]):

$$F_{i|1\dots i\dots n}^{(1)}(x_i|x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sgn}(x_i) B\left(\frac{x_i^2/\lambda_i^2}{1 + \sum_{k=1}^n x_k^2/\lambda_k^2}; \frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \right]. \quad (2.5)$$

Из этой формулы следует, что при $z > 0$ множество

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 0, \Phi^{-1}(F_{i|1\dots i\dots n}^{(1)}(x_i|x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)) > z\} = \emptyset.$$

Тогда при $z > 0$ следует равенство случайных событий

$$A_n(z) := \{X_{n,i}^{(1)} \geq z; \text{ для всех } i = \overline{1, n}\} = \{X_i \geq 0, X_{n,i}^{(1)} \geq z; \text{ для всех } i = \overline{1, n}\}.$$

Отсюда, используя формулу (2.5), будем иметь

$$A_n(z) \subset \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k^2/\lambda_k^2}{1 + \sum_{k=1}^n X_k^2/\lambda_k^2} > n \cdot B^{-1}\left(2\Phi(z) - 1; \frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \right\}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\lim_{z \rightarrow \infty} n \cdot B^{-1} \left(2\Phi(z) - 1; \frac{1}{2}, \frac{n}{2} \right) = n, \quad \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k^2 / \lambda_k^2}{1 + \sum_{k=1}^n X_k^2 / \lambda_k^2} > 1 \right\} = \emptyset.$$

Поэтому при $n \geq 2$ для достаточно больших z случайное событие

$$A_n(z) = \{X_{n,i}^{(1)} \geq z; \text{ для всех } i = \overline{1, n}\} = \emptyset,$$

что невозможно для гауссовских случайных векторов. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Разобьем сумму в формуле (1.1) на два слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_{n,i}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (3.1)$$

Известно, что если одна последовательность случайных величин сходится по вероятности к нулю, а вторая сходится по распределению к некоторой случайной величине, то сумма таких последовательностей сходится к этой же величине по распределению (см. например [9, с. 111]).

Поскольку второе слагаемое в (3.1) при каждом n является стандартной гауссовской случайной величиной, достаточно установить сходимость по вероятности первого слагаемого. Для этого вычислим его дисперсию D_n . Ввиду пп. 1°, 2° леммы 4, а затем, используя независимость математических ожиданий в формуле (3.2) от i (это нетрудно видеть из формулы (2.4)), получим

$$D_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{M} \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i|^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i|^2 \right\}. \quad (3.2)$$

Покажем сначала сходимость последовательности $\{X_{n,i}^{(\alpha)}\}_{n \geq 1}$ в среднем к ξ_i . Для этого докажем ее равномерную интегрируемость.

На полуоси $[0, +\infty)$ рассмотрим функцию $G(t) = t^2$. Она неотрицательная, возрастающая и для нее выполняется свойство $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)/t = +\infty$. Кроме того, ввиду леммы 2,

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{M} \{ G(X_{n,i}^{(\alpha)}) \} = \sup_{n \geq 1} \mathbb{M} \{ |X_{n,i}^{(\alpha)}|^2 \} = 1.$$

Отсюда, ввиду известного утверждения (см. [10], стр. 237), следует равномерная интегрируемость.

Таким образом последовательность $\{X_{n,i}^{(\alpha)}\}$, ввиду п. 5° леммы 3, сходится к ξ_i в среднем (см. [10], стр. 235, теорема 4, п. б).

Покажем теперь, что $D_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Вначале, используя формулу (3.2), запишем равенство

$$D_n = \mathbb{M} \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i|^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i| < 1\}} \right\} + \mathbb{M} \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i|^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i| \geq 1\}} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что при $n \rightarrow \infty$ первое слагаемое стремится к нулю ввиду доказанной сходимости в среднем. Теперь рассмотрим оценку второго слагаемого.

Пользуясь неравенствами Минковского и Коши–Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathbf{M} \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i|^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i| \geq 1\}} \right\}} \leq \\ & \leq \mu_\alpha \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i| \geq 1 \right\}^{1/4} \left[\mathbf{M} \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)}|^4 \right\}^{1/4} + \mathbf{M} \left\{ |\xi_i|^4 \right\}^{1/4} \right]. \end{aligned}$$

Так как случайные величины $X_{n,i}^{(\alpha)}$ и ξ_i являются (0,1)-гауссовскими (см. лемму 2 и п.3° леммы 3), то ввиду п.5° леммы 3 при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i|^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i| \geq 1\}} \right\}} \leq 2 \cdot 3^{1/4} \mu_\alpha \left\{ |X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i| \geq 1 \right\}^{1/4} \rightarrow 0.$$

Наконец, используя неравенство Чебышева, принимая во внимание, что $X_{n,i}^{(\alpha)}$ и ξ_i имеют нулевые средние, будем иметь: для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu_\alpha \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_{n,i}^{(\alpha)} - \xi_i) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 1 обобщается также на следующие случаи: μ — непрерывная смесь гауссовских мер на локально выпуклом пространстве; μ — симметрические распределения на пространстве последовательностей $\mathbf{R}^\infty$.

В заключении отметим, что совершенно аналогично доказательству теоремы 1 можно установить справедливость следующего предложения.

Теорема 2. Пусть

$$Y_{n,i}^{(\alpha)} := H_0^{-1} \left(F_{i|1\dots n}^{(\alpha)} (X_i | X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) \right),$$

где $H_0(t)$ — произвольная абсолютно непрерывная симметричная функция распределения с конечным четвертым моментом. Тогда для любого $\alpha \in (0, 2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\alpha \left\{ \frac{1}{\sqrt{nD}} \sum_{i=1}^n Y_{n,i}^{(\alpha)} \leq u \right\} = \Phi(u), \quad u \in \mathbf{R},$$

где D — дисперсия распределения $H_0(t)$.

Литература

- [1] Шатских, С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений / С.Я. Шатских // Изв.РАЕН серия МММУ. — 1999. — Т.3. — №3. — С. 43–81.
- [2] Шатских, С.Я. Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер / С.Я. Шатских // Теория вероятностей и ее применения. — 2005. — Т. 50. — В. 2. — С. 292–382.
- [3] Rosenblatt, M. Remarks on multivariate transformation / M. Rosenblatt. — Ann. Math. Stat. — 1952. — V. 23. — P. 470–472.
- [4] Шатских, С.Я. Об одном варианте преобразования независимости / С.Я. Шатских. — В сб. Мера и интеграл. — Самара: Самарский университет, 1992. — С. 99–112.

- [5] Шатских, С.Я. Условные распределения вероятностей как преобразования независимости случайных величин / С.Я. Шатских, А.Н. Комлев. – Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. – №6(56). – 2007. – С. 204–222.
- [6] Shatskih, S.Ya. Asymptotic properties of conditional quantiles of the Cauchy distribution on Hilbert space / S.Ya. Shatskih // Journal of Math. Sciences. – NY, 1999. – V. 93. – No. 4. – P. 574–581.
- [7] Савинов, Е.А. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями σ -аддитивной меры Коши / Е.А. Савинов, С.Я. Шатских. – Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. – №6(40). – 2005. – С. 51–59.
- [8] Золотарев, В.М. Одномерные устойчивые распределения / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
- [9] Прохоров, А.В. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / А.В. Прохоров, В.Г. Ушаков, Н.Г. Ушаков. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
- [10] Ширяев, А.Н. Вероятность. Т. 1 / А.Н. Ширяев. – М.: МЦНМО, 2004. – 520 с.

Поступила в редакцию 14/I/2008;
в окончательном варианте — 14/I/2008.

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR RANDOM VARIABLES GENERATED BY CONDITIONAL DISTRIBUTIONS OF A STABLE MEASURE PROJECTIONS ON HILBERT SPACE³

© 2007 E.A. Savinov, S.Ya. Shatskih⁴

The paper is devoted to a study of triangular array scheme of asymptotically independent random variables generated by finite-dimensional conditional distributions of sigma-additive stable measure, determined on a real Hilbert space. In the case when the dimension of conditional distributions approaches infinity the central limit theorem for triangular array scheme is proved.

Paper received 14/I/2008.

Paper accepted 14/I/2008.

³This study is partially supported by grant of the RF President HIII-1758.2003.1

⁴Savinov Eugene Anatolievich (henry1ee2005@yandex.ru), Shatskih Sergei Yakovlevich (shatskih@ssu.samara.ru), Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.