УДК 517.53

ОПИСАНИЕ КЛАССА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ, ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛИННЫ КОТОРЫХ ПРИНАДЛЕЖИТ ВЕСОВЫМ L^p-ПРОСТРАНСТВАМ

© 2007 О.В. Охлупина[1]

В этой работе получено параметрическое представление класса субгармонических функций, характеристика Неванлинны которых принадлежит весовым пространствам Лебега.

Введение

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$, $z = re^{i\varphi}$. S — множество измеримых положительных суммируемых функций ω на $(0;1)$, для которых существуют числа $m_\omega, M_\omega, q_\omega$, причем $m_\omega, q_\omega \in (0;1)$ удовлетворяют оценке $m_\omega \leqslant \dfrac{\omega(r\lambda)}{\omega(r)} \leqslant M_\omega$, $r \in (0;1)$, $\lambda \in [q_\omega;1]$. Такие функции называют еще медленно изменяющимися функциями (см. [1]). Важным частным случаем функции из S является степенная функция $\omega(t) = t^\alpha, \alpha > -1$.

Далее обозначим через $SH(D)$ множество всех субгармонических функций в D, $u^+(z) = \max(u(z);0)$, $u^-(z) = \max(-u(z);0)$, $u(z) = u^+(z) - u^-(z)$.

Введем также в рассмотрение следующий класс субгармонических функций:

$$SH^p_\omega(D) = \left\{ u \in SH(D) : \left(\int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi \right)^p dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$0 < p < +\infty$. $L_{p,\omega}(D)$ — обычное весовое L^p-пространство, т.е.

$$L_{p,\omega}(D) = \left\{ \psi : \left(\int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(re^{i\varphi})|d\varphi \right)^p dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Одна из наиболее важных теорем в теории субгармонических функций принадлежит Ф. Риссу (см., например, [2, с. 123]).

Теорема (Ф. Рисс). Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в D. Тогда в D существует единственная борелевская мера μ такая, что для любой подобласти $\Omega \subset D$: $u(z) = \int_\Omega \ln|z-\zeta|d\mu(\zeta) + h(z)$, где $h(z)$ — гармоническая функция в Ω.

[1]Охлупина Ольга Валентиновна (valentir2006@yandex.ru), кафедра математического анализа Брянского государственного университета, 242036, Россия, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14

При решении разнообразных задач в теории потенциала и в теории функций комплексного переменного очень важно иметь представление субгармонической функции во всем круге D.

Задачи такого рода для субгармонических в D (и в шаре в $\mathbf{R}^n$) функций, имеющих ограниченную характеристику Р. Неванлинны, исследованы в работах [3–5].

В данной работе мы получим параметрическое представление для функций u, вообще говоря, не имеющих ограниченную характеристику Р. Неванлинны $T(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi$, т.е. класса функций u, для которых $T(r, u) \in L_{p,\omega}(D)$, $0 < p < +\infty$, $\omega \in L_1(0; 1)$.

Для дальнейшего изложения введем также следующее обозначение (см. [4]): пусть $z, \zeta \in D$, $\zeta \neq 0$, $\beta > -1$, тогда

$$A_\beta(z,\zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-\frac{\beta}{\pi}\int\limits_D \frac{(1-|t|^2)^\beta \ln|1-\frac{t}{\zeta}|}{(1-\bar{t}z)^{\beta+2}}dm_2(t)\right\}. \qquad (a)$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. Для того чтобы субгармоническая функция u принадлежала классу $SH^p_\omega(D)$, $0 < p < +\infty$, $\omega \in S$, необходимо и достаточно, чтобы в D u допускала представление

$$u(z) = \int\limits_D \ln|A_\beta(z,\zeta)|d\mu(\zeta) + h(z), \qquad (b)$$

где β — достаточно большое положительное число, зависящее только от ω, $\mu(\zeta)$ — произвольная борелевская неотрицательная мера в D, для которой $\int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^p n^p(r)dr < +\infty$, $n(r) = \mu(D_r)$, $D_r = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, $h(z)$ — гармоническая функция в D, удовлетворяющая условию:

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|h(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr < +\infty.$$

Замечание. При $p = 1$, $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$ аналогичное представление получено в работе [6].

1. Доказательство вспомогательных утверждений

В этом разделе работы будем предполагать, что $u(z)$ является субгармонической в D функцией, которая гармонична в некоторой окрестности точки ноль, причем $u(0) = 0$. c — константа, не имеющая принципиального значения.

Доказательство теоремы основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. Пусть u — произвольная субгармоническая функция из класса $SH^p_\omega(D)$, $0 < p < +\infty$. Тогда справедлива оценка:

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr \leqslant c\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr.$$

Доказательство. Применяя теорему о среднем значении, имеем: $u(0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\varphi})d\varphi,\ r \in [0;1)$.

Далее воспользуемся тем, что $u(z) = u^+(z) - u^-(z)$:

$$2\pi u(0) = 0 \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi}[u^+(re^{i\varphi}) - u^-(re^{i\varphi})]d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi - \int\limits_{-\pi}^{\pi} u^-(re^{i\varphi})d\varphi,$$

то есть

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^-(re^{i\varphi})d\varphi \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Затем, учитывая, что $|u(z)| = u^+(z) + u^-(z)$, а также предыдущее неравенство, получим:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\varphi})|d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi}[u^+(re^{i\varphi}) + u^-(re^{i\varphi})]d\varphi \leqslant 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi.$$

Возведем обе части полученного неравенства в степень p:

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p \leqslant 2^p\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p. \tag{1.1}$$

Умножим неравенство (1.1) на $\omega(1-r)$ и проинтегрируем по r от 0 до 1:

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr \leqslant 2^p\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr < +\infty.$$

Следовательно, $u \in L_{p,\omega}(D)$. Что и требовалось доказать.

Следующая лемма установлена в работе [5].

Лемма 2. Пусть $z, \zeta \in D$, $\zeta \neq 0$, $\beta > -1$, $A_\beta(z,\zeta)$ — функция, определенная по формуле (a). Тогда справедлива оценка:

$$\ln|A_\beta(z,\zeta)| \leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\beta+2}. \tag{1.2}$$

Лемма 3. Пусть $u \in SH^p_\omega(D)$, $0 < p < +\infty$, $D_r = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, $n(r) = \mu(D_r)$. Тогда справедлива оценка:

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^p n^p(r)dr \leqslant c\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr.$$

Доказательство. Пусть сначала $u \in SH^p_\omega(D) \cap C^{(2)}(D)$. Δu— лапласиан функции u, $n(r) = \int\limits_0^r\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Delta u(te^{i\varphi})d\varphi t dt$, $0 < r < 1$.

Рассмотрим круг радиуса $\rho : 0 < \rho < 1$. Тогда по формуле Грина (см. [7, с. 274]) имеет место следующее равенство:

$$\rho^2\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(\rho e^{i\varphi})d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\rho} \ln\frac{\rho}{r}\Delta u(re^{i\varphi})rdrd\varphi. \tag{1.3}$$

Так как $u(0) = 0$, то, по теореме о среднем, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\varphi})d\varphi \geqslant 0$, а также, учитывая, что $u(z) \leqslant u^+(z)$, получим:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\rho} \ln\frac{\rho}{r}\Delta u(re^{i\varphi})rdrd\varphi \leqslant \rho^2\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(\rho e^{i\varphi})d\varphi \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(\rho e^{i\varphi})d\varphi.$$

Возведем обе части неравенства в степень p, $0 < p < +\infty$, а затем умножим на $\omega(1-\rho)$ и проинтегрируем по ρ от 0 до 1:

$$\int\limits_{0}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\rho} \ln\frac{\rho}{r}\Delta u(re^{i\varphi})rdrd\varphi\right)^p d\rho \leqslant \int\limits_{0}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(\rho e^{i\varphi})d\varphi\right)^p d\rho.$$

Учитывая это, получим:

$$\int\limits_{0}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\rho} \ln\frac{\rho}{r}\Delta u(re^{i\varphi})rdrd\varphi\right)^p d\rho < +\infty. \tag{1.4}$$

Проинтегрируем по частям внутренний интеграл в (1.4):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\rho} \ln\frac{\rho}{r}\Delta u(re^{i\varphi})rdrd\varphi = \int\limits_{0}^{\rho}\frac{1}{r}\left(\int\limits_{0}^{r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta u(te^{i\varphi})d\varphi tdt\right)dr.$$

Положим $\mu(D_r) = \int\limits_{0}^{r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Delta u(te^{i\varphi})d\varphi tdt = n(r)$. С учетом этого перепишем (1.4):

$$\int\limits_{0}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{0}^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr\right)^p d\rho \leqslant \frac{1}{(2\pi)^p}\int\limits_{0}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(\rho e^{i\varphi})d\varphi\right)^p d\rho.$$

Оценим левую часть последнего неравенства снизу:

$$+\infty > \int\limits_{0}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{0}^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr\right)^p d\rho \geqslant \int\limits_{0}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{\rho-\frac{1-\rho}{2}}^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr\right)^p d\rho \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{\rho-\frac{1-\rho}{2}}^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr\right)^p d\rho.$$

Запишем оценку для интеграла $\int\limits_{\rho-\frac{1-\rho}{2}}^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr$:

$$\int\limits_{\rho-\frac{1-\rho}{2}}^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr \geqslant n\left(\rho-\frac{1-\rho}{2}\right)\left(\rho-\rho+\frac{1-\rho}{2}\right) = n\left(\frac{3\rho-1}{2}\right)\left(\frac{1-\rho}{2}\right).$$

Воспользуемся полученной оценкой:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\omega(1-\rho)n^p\left(\frac{3\rho-1}{2}\right)\left(\frac{1-\rho}{2}\right)^p d\rho = c(p)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\omega(1-\rho)n^p\left(\frac{3\rho-1}{2}\right)(1-\rho)^p d\rho. \tag{1.5}$$

Совершим замену переменных:

$$\frac{3\rho-1}{2}=r, 1-\rho=\frac{2}{3}(1-r), \frac{1}{4}\leqslant r\leqslant 1.$$

Тогда (1.5) примет вид:

$$c_1(p)\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\omega(1-r)n^p(r)(1-r)^p dr,$$

где $c_1(p)=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}\cdot\frac{1}{2^p}\cdot\omega\left(\frac{2}{3}\right)$.

Следовательно,

$$\int\limits_0^1\omega(1-r)n^p(r)(1-r)^p dr\leqslant c\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr<+\infty \tag{1.6}$$

при условии, что $u\in SH^p_\omega(D)\cap C^{(2)}(D)$.

Покажем, что $\int\limits_0^1\omega(1-r)n^p(1-r)(1-r)^p dr<+\infty$ в случае, когда $u\in SH^p_\omega(D)$. Для доказательства леммы в общем случае рассмотрим последовательность бесконечно дифференцируемых субгармонических функций $u_k(z)$, которые, убывая, сходятся к субгармонической функции $u(z)$ внутри D при $k\to+\infty$ (см. теорема 3.8, [2], с. 121), при этом Δu_k слабо сходятся к $d\mu$, где μ — представляющая мера в разложении Рисса субгармонической функции u. Применим формулу (1.3) к данной последовательности:

$$\rho^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}u_k(\rho e^{i\varphi})d\varphi=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\rho}\ln\frac{\rho}{r}\Delta u_k(re^{i\varphi})rdrd\varphi.$$

Используя теорему Б. Леви (см. [8, с. 303]), перейдем к пределу при $k\to+\infty$ в предыдущем равенстве. Затем, используя формулу Иенсена (см., например, [2, §3.9]), получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u^+(\rho e^{i\varphi})d\varphi\geqslant\int\limits_0^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr,$$

где $n(r)=\mu(D_r)$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1\omega(1-\rho)(1-\rho)^p n^p(\rho)d\rho\leqslant\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\left(\int\limits_0^{\rho}\frac{n(r)}{r}dr\right)^p d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}u^+(\rho e^{i\varphi})d\varphi\right)^p d\rho<+\infty.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 4. Пусть u — произвольная субгармоническая функция в D, допускающая представление (b), где $\mu(\zeta)$ — борелевская неотрицательная мера в D, для которой $\int\limits_0^1\omega(1-r)(1-r)^p n^p(r)dr<+\infty$, $n(r)=\mu(D_r)$, $D_r=\{z:|z|<r\}$, $0<r<1$, $h(z)$ —

гармоническая функция в D, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi}|d\varphi\right)^p dr < +\infty,$$

$0 < p < +\infty$, $\omega \in S$, β — достаточно большое положительное число, зависящее только от ω. Тогда $u \in SH^p_\omega(D)$.

Доказательство. Введем следующее обозначение: пусть

$$V_\beta(z) = \int_D \ln|A_\beta(z,\zeta)|d\mu(\zeta).$$

Тогда $u(z) = V_\beta(z) + h(z)$.

Учитывая, что $u(z) \leqslant u^+(z)$, а также справедливость оценки (1.2) из леммы 2, запишем:

$$u^+(z) \leqslant |h(z)| + V^+_\beta(z) \leqslant |h(z)| + c\int_D \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\beta+2} d\mu(\zeta).$$

Проинтегрируем обе части неравенства по φ от $-\pi$ до π, возведем обе части в степень p и применим неравенство Минковского:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p + c(p)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_D \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\beta+2} d\mu(\zeta)\right)d\varphi\right)^p.$$

Умножим обе части на $\omega(1-r)$ и проинтегрируем по r от 0 до 1:

$$\int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr \leqslant \int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr +$$

$$+c(p)\int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_D \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\beta+2} d\mu(\zeta)\right)d\varphi\right)^p dr.$$

Первый интеграл в правой части сходится по предположению. Покажем сходимость второго интеграла правой части, то есть остается показать принадлежность $V_\beta(z)$ классу $SH^p_\omega(D)$, а именно $\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} V^+_\beta(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p dr < +\infty$.

$$V_\beta(z) \leqslant V^+_\beta(z) \leqslant c\int_D \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\beta+2} d\mu(\zeta).$$

Пусть $1 < p < +\infty$, $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $z = re^{i\theta}$, ψ — произвольная функция из $L_q(0;1)$, $\psi \geqslant 0$, $\|\psi\|_{L_q} = 1$.

Рассмотрим последовательность неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций $\chi_k(\rho,\varphi)$, которые, убывая, слабо сходятся к $d\mu(\rho,\varphi)$ (см. [9, с. 37]).

$$\int_{-\pi}^{\pi} V^+_\beta(\rho e^{i\varphi})d\varphi \leqslant c\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\rho^2}{|1-\rho re^{i(\theta-\varphi)}|}\right)^{\beta+2}\chi_k(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho\right)d\varphi =$$

$$= c\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 (1-\rho)^{\beta+2}\chi_k(\rho,\varphi)\rho\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-\rho re^{i(\theta-\varphi)}|^{\beta+2}}\right)d\rho\right)d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left(\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho)^{\beta+2}}{(1-\rho r)^{\beta+1}}\chi_k(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho\right) = c_1\left(\int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+2}}{(1-\rho r)^{\beta+1}}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_k(\rho,\varphi)\rho d\varphi d\rho\right) =$$

$$= c_1\left[\int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+2}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} d\left(\int_0^\rho\int_{-\pi}^{\pi}\chi_k(t,\varphi)d\varphi t dt\right)\right].$$

Интегрируя по частям последний интеграл, получим:

$$\int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+2}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} d\left(\int_0^\rho \int_{-\pi}^{\pi} \chi_k(t,\varphi) d\varphi t dt\right) = c(\beta) \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+1}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} \left(\int_0^\rho \int_{-\pi}^{\pi} \chi_k(t,\varphi) d\varphi t dt\right) d\rho.$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$, имеем:

$$c(\beta) \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+1}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} \left(\int_0^\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t,\varphi)\right) d\rho = c(\beta) \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+1}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} n(\rho) d\rho.$$

Умножим полученный интеграл на $\psi(r)$ и $\omega^{\frac{1}{p}}(1-r)$ и проинтегрируем по r от 0 до 1:

$$\int_0^1 \omega^{\frac{1}{p}}(1-r)\psi(r) \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+1}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} n(\rho) d\rho dr =$$

$$= \int_0^1 n(\rho)(1-\rho)^{\beta+1} \int_0^1 \frac{\omega^{\frac{1}{p}}(1-r)\psi(r)}{(1-\rho r)^{\beta+1}} dr d\rho =$$

$$= \int_0^1 n(\rho)(1-\rho)^{\beta+1} \int_0^\rho \frac{\omega^{\frac{1}{p}}(1-r)\psi(r)}{(1-\rho r)^{\beta+1}} dr d\rho +$$

$$+ \int_0^1 n(\rho)(1-\rho)^{\beta+1} \int_\rho^1 \frac{\omega^{\frac{1}{p}}(1-r)\psi(r)}{(1-\rho r)^{\beta+1}} dr d\rho = I_1 + I_2.$$

Оценим I_1. При $0 < r < \rho$: $1 - r\rho \geqslant 1 - r$. Тогда

$$I_1 \leqslant \int_0^1 n(\rho)(1-\rho)^{\beta+1} \int_0^\rho \frac{\omega^{\frac{1}{p}}(1-r)\psi(r)}{(1-r)^{\beta+1}} dr d\rho.$$

Воспользуемся видом функции $\omega(x)$ (свойства функции $\omega(x)$ см. в работе [5, с. 1423]).

$$\omega(x) = \exp \int_x^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} dt, \tag{1.7}$$

где $\beta_\omega \geqslant \varepsilon(t) \geqslant \dfrac{\log m_\omega}{\log \frac{1}{q_\omega}} = -\dfrac{\log m_\omega}{\log q_\omega} = -\alpha_\omega$. $\omega(x) \geqslant x^{\alpha_\omega}$, $\dfrac{\omega^{\frac{1}{p}}(x)}{x^\beta} \geqslant \dfrac{1}{x^{\beta - \frac{\alpha_\omega}{p}}}$. Следовательно, функция $\dfrac{\omega^{\frac{1}{p}}(x)}{x^\beta}$ монотонно убывает при $\beta > 1 + \dfrac{\alpha_\omega}{p}$. С учетом этого, $I_1 \leqslant \int\limits_0^1 n(\rho)(1-$ $-\rho)\omega^{\frac{1}{p}}(1-\rho)\left(\int\limits_0^\rho \frac{\psi(r)}{1-r} dr\right) d\rho$. Изменим порядок интегрирования в последнем интеграле:

$$\int_0^1 \frac{\psi(r)}{1-r} \left(\int_r^1 n(\rho)(1-\rho)\omega^{\frac{1}{p}}(1-\rho) d\rho\right) dr.$$

Применим неравенство Гельдера:

$$\left(\int_0^1 \psi^q(r) dr\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{1-r} \int_r^1 n(\rho)(1-\rho)\omega^{\frac{1}{p}}(1-\rho) d\rho\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$=\left(\int\limits_0^1\left(\frac{1}{1-r}\int\limits_r^1 n(\rho)(1-\rho)\omega^{\frac{1}{p}}(1-\rho)d\rho\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}}$$

После замены переменных $v=1-\rho$ последний интеграл примет вид:

$$c\left(\int\limits_0^1\left(\frac{1}{1-r}\int\limits_0^{1-r} n(1-v)v\omega^{\frac{1}{p}}(v)dv\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.8}$$

Применяя к (1.8) неравенство Харди (см. [10, с. 319]), получим оценку сверху для (1.8):

$$c(p)\left(\int\limits_0^1 \omega(v)v^p n^p(1-v)dv\right)^{\frac{1}{p}}=c(p)\left(\int\limits_0^1 \omega(1-t)(1-t)^p n^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Оценим I_2. При $\rho<r<1$: $1-r\rho\geqslant 1-\rho$. Тогда

$$I_2\leqslant\int\limits_0^1 n(\rho)(1-\rho)^{\beta+1}\frac{1}{(1-\rho)^{\beta+1}}\left(\int\limits_\rho^1 \omega^{\frac{1}{p}}(1-r)\psi(r)dr\right)d\rho=\int\limits_0^1 n(\rho)\left(\int\limits_\rho^1 \omega^{\frac{1}{p}}(1-r)\psi(r)dr\right)d\rho.$$

После замены переменных $v=1-r$ последний интеграл примет вид:

$$\int\limits_0^1 n(\rho)\left(\int\limits_0^{1-\rho} \omega^{\frac{1}{p}}(v)\psi(1-v)dv\right)d\rho. \tag{1.9}$$

Учитывая (1.7), запишем:

$$\frac{\omega(v)}{\omega(1-\rho)}=\exp\left(\int\limits_v^1\frac{\varepsilon(t)}{t}dt-\int\limits_{1-\rho}^1\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right)=\exp\left(\int\limits_v^{1-\rho}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left(\beta_\omega\int\limits_v^{1-\rho}\frac{dt}{t}\right)=\exp\left(\beta_\omega\ln\frac{1-\rho}{v}\right)=\left(\frac{1-\rho}{v}\right)^{\beta_\omega}.$$

Следовательно, $\omega(v)\leqslant\omega(1-\rho)\left(\frac{1-\rho}{v}\right)^{\beta_\omega}$ при $1-\rho\geqslant v$.

Применим полученную оценку к интегралу (1.9):

$$\int\limits_0^1 n(\rho)\left(\int\limits_0^{1-\rho}\omega^{\frac{1}{p}}(v)\psi(1-v)dv\right)d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^1 n(\rho)\omega^{\frac{1}{p}}(1-\rho)(1-\rho)^{\frac{\beta_\omega}{p}}\left(\int\limits_0^{1-\rho}\frac{\psi(1-v)}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}}}dv\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^1 n(\rho)\omega^{\frac{1}{p}}(1-\rho)(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^{\frac{1-\beta_\omega}{p}}}\left(\int\limits_0^{1-\rho}\frac{\psi(1-v)}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}}}du\right)d\rho.$$

Применяя неравенство Гельдера, получим:

$$I_2 \leqslant \left(\int\limits_0^1 n^p(\rho)\omega(1-\rho)(1-\rho)^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{(1-\rho)^{\frac{1-\beta_\omega}{p}}} \int\limits_0^{1-\rho} \frac{\psi(1-v)}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}}} dv\right)^q d\rho\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{(1-\rho)^{\frac{1-\beta_\omega}{p}}} \int\limits_0^{1-\rho} \frac{\psi_1(v)}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}}} dv\right)^q d\rho\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\psi_1(v) = \psi(1-v)$. Сделаем замену переменной $1-\rho = x$:

$$I_2 \leqslant c\left(\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x^{\frac{1-\beta_\omega}{p}}} \int\limits_0^{x} \frac{\psi_1(v)}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}}} dv\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Воспользуемся неравенством Харди:

$$I_2 \leqslant c\left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{\psi_1(xv)}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}}} dv\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = c\left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{\psi_1^q(xv)}{v^{\frac{\beta_\omega q}{p}}} dv\right) dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$c\left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{\psi_1^q(xv)}{v^{\frac{\beta_\omega q}{p}}} dx\right) dv\right)^{\frac{1}{q}} = c\left[\int\limits_0^1 \frac{dv}{v^{\frac{\beta_\omega q}{p}}} \left(\int\limits_0^1 \psi_1^q(xv)dx\right)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Сделаем замену переменных $xv = t$, $0 \leqslant t \leqslant v$ во внутреннем интеграле:

$$c\left[\int\limits_0^1 \frac{dv}{v^{\frac{\beta_\omega q}{p}+1}} \left(\int\limits_0^v \psi_1^q(t)dt\right)\right]^{\frac{1}{q}} = c\int\limits_0^1 \frac{dv}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}+\frac{1}{q}}} \left(\int\limits_0^v \psi_1^q(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Вернемся к функции $\psi(t)$. По определению нормы функции ψ в пространстве $L_q(0;1)$: $I_2 \leqslant c\int\limits_0^1 \frac{dv}{v^{\frac{\beta_\omega}{p}+\frac{1}{q}}}$.

Полученный интеграл сходится при $\frac{\beta_\omega}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\frac{\beta_\omega}{p} < \frac{1}{p}$, то есть $\beta_\omega < 1$.

Следовательно, потенциал $V_\beta(z) \in SH^p_\omega(D)$, если $1 < p < +\infty$.

Рассмотрим теперь случай $0 \leqslant p < 1$. Воспользовавшись полученной ранее оценкой, запишем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} V_\beta^+(\rho e^{i\varphi})d\varphi \leqslant c(\beta)\int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+1}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} n(\rho)d\rho.$$

Разобьем интервал от 0 до 1 точками $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. С учетом этого разбиения:

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+1}}{(1-\rho r)^{\beta+1}} n(\rho)d\rho \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{(1-\rho)^{\beta+1} n(\rho)}{(1-r\rho)^{\beta+1}} d\rho. \tag{1.10}$$

Рассмотрим выражение под знаком суммы:

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{(1-\rho)^{\beta+1} n(\rho)}{(1-r\rho)^{\beta+1}} d\rho \leqslant \frac{n(r_k)(1-r_k)^{\beta+1}}{(1-rr_k)^{\beta+1}} (r_k - r_{k-1}).$$

Учитывая, что $1 - r_k = \dfrac{1}{2^k}$, $n(r_k) = n_k$, а также $r_k - r_{k-1} = \dfrac{1}{2^k}$, получим:

$$\frac{n(r_k)(1-r_k)^{\beta+1}}{(1-rr_k)^{\beta+1}} (r_k - r_{k-1}) = \frac{n_k}{2^{k(\beta+2)}(1-rr_k)^{\beta+1}}.$$

То есть $\displaystyle\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{(1-\rho)^{\beta+1} n(\rho)}{(1-r\rho)^{\beta+1}} d\rho \leqslant c \frac{n_k}{2^{k(\beta+2)}(1-rr_k)^{\beta+1}}$.

С учетом этого возведем обе части (1.10) в степень p, умножим неравенство на $\omega(1-r)$ и проинтегрируем по r от 0 до 1:

$$\int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta+1} n(\rho)}{(1-r\rho)^{\beta+1}} d\rho \right)^p dr \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k^p}{2^{kp(\beta+2)}} \int_0^1 \frac{\omega(1-r)dr}{(1-rr_k)^{p(\beta+1)}} \leqslant$$

Применим лемму 3 из работы [4]:

$$\leqslant c_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k^p}{2^{kp(\beta+2)}} \cdot \frac{\omega(1-r_k)}{(1-r_k)^{p(\beta+1)-1}} \right) = c_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k^p \omega(\frac{1}{2^k})}{2^{k(p+1)}} < +\infty \right).$$

Следовательно, функция u принадлежит классу $SH^p_\omega(D)$. Лемма доказана.

2. Доказательство основной теоремы

Мы докажем основную теорему при условии, что функция u является гармонической в некоторой малой окрестности точки ноль. При этом $u(0) = 0$. Общий случай ($u(0) \neq 0$) сводится к этому аналогично, как при $p = 1$, $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$ (см. [6]).

1. Сначала докажем необходимость. Пусть $u \in SH^p_\omega(D)$. Покажем, что u допускает представление (b). Рассмотрим разность $u(z) - V_\beta(z) = h(z)$ и покажем, что она является гармонической функцией.

Пусть D_r — круг радиуса r, $0 < r < 1$. По теореме Рисса для D_r: $u(z) = V(z) + \int_{D_r} ln|\zeta - z| d\mu(\zeta)$, где $V(z)$ — гармоническая функция в D_r, $\int_{D_r} ln|\zeta - z| d\mu(\zeta)$ — субгармоническая функция.

Преобразуем выражение:

$$ln|A_\beta(z,\zeta)| = ln\left(|A_\beta(z,\zeta)|\cdot\left|\frac{\zeta-z}{\zeta-z}\right|\right) = ln\frac{|A_\beta(z,\zeta)|}{|\zeta-z|} + ln|\zeta-z|;$$

$$ln\frac{|A_\beta(z,\zeta)|}{|\zeta-z|} = ln\left(\frac{1}{|\zeta-z|}\cdot\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\cdot\left|\exp\left\{-\frac{\beta}{\pi}\int_D\frac{(1-|t|^2)^\beta ln\left|1-\frac{t}{\zeta}\right|}{(1-\bar{t}z)^{\beta+2}}dm_2(t)\right\}\right|\right) =$$

$$= ln\frac{1}{|\zeta|} + Re\left\{-\frac{\beta}{\pi}\int_D\frac{(1-|t|^2)^\beta ln\left|1-\frac{t}{\zeta}\right|}{(1-\bar{t}z)^{\beta+2}}dm_2(t)\right\}.$$

$$h(z) = u(z) - \int_{D_r} ln|A_\beta(z,\zeta)|d\mu(\zeta) =$$

$$= u(z) - \int_{D_r}\left(\ln|\zeta-z| + \ln\frac{1}{|\zeta|} + Re\left\{-\frac{\beta}{\pi}\int_D\frac{(1-|t|^2)^\beta ln\left|1-\frac{t}{\zeta}\right|}{(1-\bar{t}z)^{\beta+2}}dm_2(t)\right\}\right)d\mu(\zeta) =$$

$$= u(z) - \int_{D_r} ln|\zeta-z|d\mu(\zeta) - \int_{D_r} ln\frac{1}{|\zeta|}d\mu(\zeta) -$$

$$- \int_{D_r} Re\left\{-\frac{\beta}{\pi}\int_D\frac{(1-|t|^2)^\beta ln\left|1-\frac{t}{\zeta}\right|}{(1-\bar{t}z)^{\beta+2}}dm_2(t)\right\}d\mu(\zeta),$$

$\int_{D_r} ln\frac{1}{|\zeta|}d\mu(\zeta) < +\infty$. Это следует из того, что $V_\beta(0) > -\infty$, $+\infty > -V_\beta(0) = -\int_D ln|A_\beta(0,\zeta)|d\mu(\zeta) \geqslant \int_D ln\frac{1}{|\zeta|}d\mu(\zeta)$. $\mathrm{Re}\left\{-\frac{\beta}{\pi}\int_D\frac{(1-|t|^2)^\beta ln\left|1-\frac{t}{\zeta}\right|}{(1-\bar{t}z)^{\beta+2}}dm_2(t)\right\}$ — гармоническая функция в круге радиуса r. Так как r — произвольное из $(0;1)$, получаем, что $h(z)$ является гармонической функцией.

Покажем, что $h(z)$ удовлетворяет условию $\int_0^1 \omega(1-r)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|h(re^{i\varphi})|d\varphi\right)^p dr < +\infty$. Рассмотрим разность $u(z) - V_\beta(z) = h(z)$. Так как $u(z) \leqslant u^+(z)$, то по лемме 2:

$$h^+(z) \leqslant u^+(z) + V_\beta^+(z) \leqslant u^+(z) + c\int_D\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\beta+2}d\mu(\zeta).$$

Проинтегрируем обе части неравенства по φ:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h^+(re^{i\varphi})d\varphi \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi + c\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_D\left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|}\right)^{\beta+2}d\mu(\zeta)\right)d\varphi.$$

Применим теорему о среднем значении: $-\infty < 2\pi h(0) = \int_{-\pi}^{\pi} h(re^{i\varphi})d\varphi$.

$$2\pi h(0) = \int_{-\pi}^{\pi}\left[h^+(re^{i\varphi}) - h^-(re^{i\varphi})\right]d\varphi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} h^-(re^{i\varphi})d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} h^+(re^{i\varphi})d\varphi - 2\pi h(0) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} h^+(re^{i\varphi})d\varphi + 2\pi|h(0)|.$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} h^+(re^{i\varphi}) d\varphi + c_1.$$

В результате

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi}) d\varphi + c \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int_D \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|} \right)^{\beta+2} d\mu(\zeta) \right) d\varphi + c_1.$$

Возведем обе части неравенства в степень p, применим неравенство Минковского, а затем умножим обе части на $\omega(1-r)$ и проинтегрируем по r от 0 до 1:

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \leqslant \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi}) d\varphi \right)^p dr +$$

$$+ c \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int_D \left(\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}z|} \right)^{\beta+2} d\mu(\zeta) \right) d\varphi \right)^p dr + c_2.$$

Оба интеграла в правой части сходятся. Сходимость первого следует из принадлежности функции u классу $SH^p_\omega(D)$, сходимость второго доказана ранее (см. лемму 4).

Следовательно, $\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty$, то есть функция u допускает представление (b).

2. Доказательство достаточности непосредственно следует из предыдущего пункта и леммы 4.

Теорема доказана.

Литература

[1] Сенета, Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985.

[2] Хейман, У. Субгармонические функции / У. Хейман, П. Кеннеди. – М.: Мир, 1980.

[3] Tsuji, M. Potential theory in modern function theory / M. Tsuji. – Tokyo: Maruzen Co., 1959.

[4] Джрбашян, М.М. К проблеме представимости аналитических функций / М.М. Джрбашян // Сообщ. ин-та математики и механики АН Арм. ССР. – 1948. – В. 2. – С. 3–40.

[5] Шамоян, Ф.А., Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций / Ф.А. Шамоян // Сиб. мат. журнал. – 1999. – Т. 40:6. – С. 1421–1440.

[6] Аветисян, К.Л. Потенциалы типа Грина и представимость весовых классов субгармонических функций / К.Л. Аветисян // Изв. Нац. АН Армении. Математика. – 1995. – Т. 30. – №2.

[7] Кусис, П. Введение в теорию пространств H^p. Пер. с англ. / П. Кусис. – М.: Мир, 1984.

[8] Колмогоров, А.Н. Функциональный анализ / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976.

[9] Ландкоф, Н.С., Основы современной теории потенциала / Н.С. Ландкоф. – М.: Наука, 1966.

[10] Стейн, И.М., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И.М. Стейн. – М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 29/X/2007;
В окончательном варианте — 29/X/2007.

DESCRIPTION OF A CLASS OF SUBHARMONIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISK, NEVANLINNA'S CHARACTERISTIC OF WHICH BELONGS TO WEIGHT L^p-SPACES

 O.V. Okhlupina[2]

In the paper a parametrical representation of a class of subharmonic functions in the unit disk with the Nevanlinna's characteristic from the weight spaces of Lebesque is obtained.

Paper received 29/X/2007.
Paper accepted 29/X/2007.

[2]Okhlupina Olga Valentinovna (valentir2006@yandex.ru), Dept. of Mathematical Analysis, Bryansk State University, Bryansk, 242036, Russia.