УДК 517.51:517.98

ОБЪЕМ ФРЕЙМА ПАРСЕВАЛЯ[1]

© 2007 Е.С. Драбкова, С.Я. Новиков[2]

Работа является обзором полученных в 2000–2007 гг. результатов по фреймам (каркасам) в конечномерных унитарных и евклидовых пространствах. Получены новые оценки MSE (средней квадратичной ошибки) при передаче зашумленного цифрового сигнала. Приведено замкнутое доказательство теоремы о существовании фрейма Парсеваля произвольного объема. Дано полное описание равномерных жестких фреймов в $\mathbb{R}^2$.

Введение

Понятие фрейма (каркаса) для евклидова, гильбертова и банахова пространства стало объектом математических исследований недавно. В тех книгах, которые доступны русскоязычному читателю [1–5], они обсуждаются в рамках теории всплесков (вейвлетов) в пространствах L^2. При этом без должного внимания остается большой и важный для приложений раздел теории фреймов — фреймы в конечномерных евклидовых (унитарных) пространствах. К настоящему времени работами многочисленных авторов получены важные результаты, в известной монографии О. Христенсена [6] первая глава посвящена фреймам в конечномерных пространствах. После выхода этой книги получены важные результаты, поставлены новые задачи, активно продолжаются исследования.

Предлагаемая вниманию читателя работа представляет собой небольшой обзор последних результатов теории фреймов в конечномерных пространствах. При этом авторы старались сделать изложение замкнутым и независимым.

В отечественных изданиях (не включая тезисы конференций) нам известна только одна работа [7], посвященная фреймам в конечномерных пространствах.

1. Определение фрейма. Фреймы и полные системы

Пусть M и N — натуральные числа, причем $M \geqslant N$. Все дальнейшие рассуждения будут проводиться, в основном, в конечномерных пространствах $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{C}^N$. Если выбор числового поля не влияет на формулировки результатов и определений, применяется обозначение $\mathbb{H}^N$. Пространство $\mathbb{H}^N$ наделяется стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

[2]Драбкова Екатерина Сергеевна (kadra82@mail.ru), Новиков Сергей Яковлевич (nvks@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Определение. Набор элементов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ называется *фреймом* для пространства $\mathbb{H}^N$, если существуют числа $A, B > 0$ такие, что для любого $x \in \mathbb{H}^N$ выполняются неравенства:

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2. \tag{1.1}$$

Числа A и B называются *границами фрейма.* Они определены неоднозначно. Супремум множества всех нижних границ и инфимум множества всех верхних границ фрейма называются *оптимальными границами* фрейма. Количество элементов фрейма M будем называть *объемом* фрейма.

Если набор Φ является фреймом, то используем запись $\Phi \in (F)$. Если элементы фрейма имеют одинаковые нормы, то есть $\|\varphi_i\| = \|\varphi_j\|$ для любых $i, j = 1, \dots, M$, используем запись $F \in (UF)$, называя такой фрейм *равномерным.* Если Φ — нормированный фрейм, то есть $\|\varphi_i\| = 1$, $i = 1, \dots, M$, используем запись $\Phi \in (NF)$.

Заметим, что правая часть (1.1) выполняется для любого конечного набора Φ:

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i\|^2\right) \cdot \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{H}^N.$$

Выполнение левой части (1) влечет полноту системы $\Phi : \operatorname{span}\Phi = \mathbb{H}^N$. Действительно, если $x \perp \varphi_i$, $i = 1, \dots, M$, то $\|x\| = 0$. Условие полноты оказывается и достаточным:

Предложение 1. Если Φ — набор из M элементов пространства $\mathbb{H}^N$, то Φ — фрейм для $\operatorname{span}\Phi$.

Доказательство. Обозначим $W := \operatorname{span}\Phi$. Отображение $x \in W \mapsto \sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2$ непрерывно, единичная сфера в W — компакт, следовательно, найдется $y \in W$, $\|y\| = 1$, такой, что

$$A := \sum_{i=1}^{M} |\langle y, \varphi_i\rangle|^2 = \inf\left\{\sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 : \ x \in W, \ \|x\| = 1\right\}.$$

$A > 0$ (если $A = 0$, то $y \perp \operatorname{span}\Phi$) и

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \geqslant A\|x\|^2, \quad x \in W.$$

Следствие. Набор Φ является фреймом для $\mathbb{H}^N$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{span}\Phi = \mathbb{H}^N$.

Полученное следствие показывает, во-первых, что фрейм в конечномерном пространстве — это другое название полной системы, а, во-вторых, что объем фрейма может быть сколь угодно большим. Добавление новых элементов к фрейму (в частности, к базису) оставляет его фреймом (возможно, с другими границами). Такое увеличение объема фрейма оказывается полезным для приложений.

Отметим здесь, что в *бесконечномерном* сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ последнее следствие не имеет места. В случае бесконечномерного гильбертова пространства определение фрейма становится таким:

Определение. Последовательность элементов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ бесконечномерного гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется *фреймом*, если существуют числа $A, B > 0$ такие, что для любого $x \in \mathbb{H}$ выполняются неравенства:

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Если для некоторой последовательности Φ выполнено только правое неравенство, то Φ называют *бесселевой последовательностью.* Конечно, и в этой бесконечномерной ситуации из определения фрейма вытекает полнота Φ: $\overline{\operatorname{span}}\,\Phi = \mathbb{H}$. Но теперь полноты недостаточно для представления произвольного $x \in \mathbb{H}$ в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$.

Пример [6, 5.4.6]. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом для $\mathbb{H}$ и пусть

$$\varphi_k := e_k + e_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

1) $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна и минимальна, ее единственная биортогональная последовательность определяется равенствами

$$\psi_k = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} e_n \text{ для нечетных } k \text{ и} \\ \sum\limits_{n=1}^{k} (-1)^{n} e_n \text{ для четных } k. \end{cases} \tag{1.2}$$

2) $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является бесселевой последовательностью, но не является фреймом.

Покажем, что последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является бесселевой. Для $x \in \mathbb{H}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k + e_{k+1}\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle + \langle x, e_{k+1}\rangle|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_{k+1}\rangle|^2 \leqslant 4\,\|x\|^2.$$

Для доказательства полноты $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ предположим, что $x \in \mathbb{H}$ и что

$$\langle x,\ e_k + e_{k+1}\rangle = 0 \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\langle x, e_k\rangle = -\langle x, e_{k+1}\rangle$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $|\langle x, e_k\rangle|$ является константой. С другой стороны, в силу равенства Парсеваля, $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$, поэтому $\langle x, e_k\rangle = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и получаем, что $x = 0$. Таким образом, последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной.

Для доказательства минимальности системы будем рассуждать от противного. Предположим, что для некоторого $j \in \mathbb{N}$

$$\varphi_j \in \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_k\}_{k\neq j} = \overline{\operatorname{span}}\{e_1 + e_2,\ e_2 + e_3, \ldots, e_{j-1} + e_j,\ e_{j+1} + e_{j+2}, \ldots\} =$$
$$= \overline{\operatorname{span}}\{e_1 + e_2,\ e_2 + e_3, \ldots, e_{j-1} + e_j\} \oplus \overline{\operatorname{span}}\{e_{j+k} + e_{j+k+1}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Так как $\varphi_j = e_j + e_{j+1}$, то мы получаем, что

$$e_j \in \operatorname{span}\{e_1 + e_2,\ e_2 + e_3, \ldots, e_{j-1} + e_j\}.$$

Это означает, что найдутся коэффициенты $a_1, \ldots, a_{j-1}$ такие, что

$$e_j = a_1(e_1 + e_2) + \ldots + a_{j-1}(e_{j-1} + e_j),$$

или

$$a_1 e_1 + (a_1 + a_2)e_2 + (a_2 + a_3)e_3 + \ldots + (a_{j-2} + a_{j-1})e_{j-1} + (a_{j-1} - 1)e_j = 0.$$

Из последнего равенства следуют противоречащие друг другу равенства: $a_{j-1} = 0$ и $a_{j-1} = 1$. Таким образом, последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ минимальна. Каждая минимальная последовательность имеет единственную биортогональную последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, определяемую соотношениями:

$$\langle \psi_k, e_k + e_{k+1}\rangle = 1, \quad \langle \psi_k, e_j + e_{j+1}\rangle = 0 \text{ для } j \neq k.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, определяемая равенством (1.2), действительно является биортогональной для $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Заметим, что $\|\psi_j\| = \sqrt{j}$, $j = 1, 2, \ldots$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \psi_j, \varphi_k \rangle|^2 = 1 = \frac{1}{j}\|\psi_j\|^2, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{1.3}$$

Теперь становится очевидным утверждение о том, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ не является фреймом. Равенство (1.3) явно противоречит левому неравенству из определения фрейма.

Приведенный здесь пример показывает, что объединение базисов подпространств может не быть базисом или фреймом всего пространства. Действительно, $\{2^{-1/2}(e_{2k-1} + e_{2k})\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом для $\overline{\mathrm{span}}\{e_{2k-1} + e_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{2^{-1/2}(e_{2k} + e_{2k+1})\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом для $\overline{\mathrm{span}}\{e_{2k} + e_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$; объединением этих базисов является последовательность $\{2^{-1/2}(e_k + e_{k+1})\}_{k=1}^{\infty}$, которая не является ни базисом ни фреймом для $\overline{\mathrm{span}}\{e_k + e_{k+1}\}_{k=1}^{\infty} = \mathbb{H}$. Более того, система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ не является даже системой представления, т. е. существует $x \in \mathbb{H}$, который не может быть представлен в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ ни для какого набора коэффициентов $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $x = e_1$. Отметим дополнительно, что даже если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом Рисса, то $\{\varphi_k + \varphi_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ не будет фреймом. Однако, если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является фреймом, то $\{\varphi_k + \varphi_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ может оказаться фреймом [6, 7.2.5].

2. Фреймы и операторы

С фреймом связаны три оператора:

- оператор анализа $F : x \mapsto \{\langle x, \varphi_i \rangle\}_{i=1}^{M}$ — инъекция из $\mathbb{H}^N$ в $\mathbb{H}^M$;
- сопряженный к F оператор синтеза $F^* : \{c_i\}_{i=1}^{M} \mapsto \sum_{i=1}^{M} c_i \varphi_i$ — сюръекция из $\mathbb{H}^M$ в $\mathbb{H}^N$; заметим, что $F^*\delta_k = \varphi_k, k = 1, \ldots, M$, если δ_k — k-й орт пространства $\mathbb{H}^N$;
- фреймовый оператор $S := F^*F$, действующий из $\mathbb{H}^N$ в $\mathbb{H}^N$.

Рассмотрим последний оператор подробнее.

$$Sx = F^*Fx = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i ;$$

$$\langle Sx, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i,\ x \right\rangle = \sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i \rangle|^2, \quad x \in \mathbb{H}^N.$$

Следовательно, (1.1) можно переписать как

$$A\langle x, x \rangle \leqslant \langle Sx, x \rangle \leqslant B\langle x, x \rangle \quad \text{или} \quad AI_N \leqslant S \leqslant BI_N, \tag{2.1}$$

здесь имеется в виду стандартная частичная упорядоченность самосопряженных операторов [8, 12.32].

Определение. Фрейм называется *жестким* (tight frame) (в этом случае используем запись $\Phi \in (TF)$), если оптимальные границы совпадают: $A = B$.

Определение жесткого фрейма можно выразить равенством:

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 = A\|x\|^2, \quad x \in \mathbb{H}^N \qquad \text{или} \qquad S = AI_N, \tag{2.2}$$

$$Sx = Ax, \quad x \in \mathbb{H}^N;$$

подробнее

$$\sum_{i=1}^{M}\langle x, \varphi_i\rangle\, \varphi_i = Ax, \quad x \in \mathbb{H}^N,$$

$$x = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{M}\langle x, \varphi_i\rangle\, \varphi_i. \tag{2.3}$$

Формуле (2.3) можно придать такой вид:

$$x = \sum_{i=1}^{M}\langle x, \widetilde{\varphi_i}\rangle\, \varphi_i, \tag{2.4}$$

где

$$\widetilde{\varphi_i} := \frac{\varphi_i}{A}.$$

Следующая теорема является базовой для фреймов в конечномерном евклидовом пространстве. Она обобщает (2.4) на произвольные фреймы.

Теорема 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ — фрейм в $\mathbb{H}^N$ с фреймовым оператором S. Тогда

1) оператор S обратимый и самосопряженный;

2) каждый вектор $x \in \mathbb{H}^N$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^{M}\langle x, \widetilde{\varphi_i}\rangle\, \varphi_i = \sum_{i=1}^{M}\langle x, \varphi_i\rangle\, \widetilde{\varphi_i},$$

где $\widetilde{\varphi_i} = S^{-1}\varphi_i, \quad i = 1, \ldots, M$ — *канонический дуальный фрейм.*

3) Фреймовые коэффициенты $\{\langle x, \widetilde{\varphi_i}\rangle\}_{i=1}^M$ минимизируют l_2-норму на множестве $(\{c_k\}_{k=1}^M \mid \sum_{k=1}^M c_k\,\varphi_k = x)$.

Доказательство. Докажем 1). Обратимость S следует из (2.1) :

$$AS^{-1} \leqslant S^{-1}S \leqslant BS^{-1},$$

$$\frac{1}{B}I_N \leqslant S^{-1} \leqslant \frac{1}{A}I_N.$$

Так как $S = F^*F$, то $S^* = S$.

Обратимость S можно доказать и по-другому. Из (2.1) следует инъективность S:

$$Sx = 0 \Rightarrow 0 = \langle Sx, x\rangle = \sum_{i=1}^{M} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \geqslant A\|x\|^2 \Rightarrow x = 0.$$

Полнота Φ влечет сюръективность оператора синтеза F^* : для любого $x \neq 0 \in \mathbb{H}^N$ найдется набор $\{c_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{C}^M$ такой, что $F^*\{c_i\}_{i=1}^M = x$. Набор $\{c_i\}_{i=1}^M$ можно брать из $\mathcal{N}_{F^*}^{\perp} = \mathcal{R}_F$, а $S = F^*F$, следовательно, S — сюрьекция.

Докажем 2). Для каждого $x \in \mathbb{H}^N$

$$x = SS^{-1}x = F^*FS^{-1}x = \sum_{i=1}^{M}\langle S^{-1}x, \varphi_i\rangle\, \varphi_i = \sum_{i=1}^{M}\langle x, \widetilde{\varphi_i}\rangle\, \varphi_i.$$

Последнее равенство справедливо в силу самосопряженности оператора S. Если начать с равенства $x = S^{-1}Sx$, получим второе представление из 2):

$$x = S^{-1}Sx = S^{-1}\left(\sum_{i=1}^{M}\langle x,\varphi_i\rangle\varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{M}\langle x,\varphi_i\rangle S^{-1}\varphi_i = \sum_{i=1}^{M}\langle x,\varphi_i\rangle\,\widetilde{\varphi_i}.$$

Для доказательства 3) предположим, что $x = \sum_{i=1}^{M} c_i\,\varphi_i$. Представим c_i, $i = 1,\dots,M$ в виде

$$c_i = (c_i - \langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle) + \langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle. \tag{2.5}$$

По предположению имеет место равенство $\sum_i (c_i - \langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle)\varphi_i = 0$. Это означает, что $(\{c_i\} - \{\langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle\})_{i=1}^{M} \in \mathcal{N}_{F^*} = \mathcal{R}_F^{\perp}$. С другой стороны, $\{\langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle\} = \{\langle S^{-1}x,\varphi_i\rangle\} \in \mathcal{R}_F$. Таким образом, слагаемые в правой части (2.5) перпендикулярны друг другу. По теореме Пифагора

$$\sum_{i=1}^{M}|c_i|^2 = \sum_{i=1}^{M}|\,c_i - \langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{M}|\langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle|^2.$$

Левая часть будет минимальной, если $c_i = \langle x,\widetilde{\varphi_i}\rangle$, $i = 1,\dots,M$.

Следующая теорема указывает на связь между собственными значениями фреймового оператора S и другими свойствами фрейма. Рассмотрение этой связи оказывается полезным во многих вопросах.

Теорема 2. Пусть Φ — фрейм в $\mathbb{H}^N$, $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ — собственные значения фреймового оператора S. Справедливы следующие утверждения:

1) оптимальная нижняя граница Φ равна $\min\{\lambda_i\}_{i=1}^{N}$;
   оптимальная верхняя граница Φ равна $\max\{\lambda_i\}_{i=1}^{N}$;
2) $\sum\limits_{i=1}^{N}\lambda_i = \sum\limits_{k=1}^{M}\|\varphi_k\|^2$;
3) если $\Phi \in (UTF)$ и $\|\varphi_i\| = c$, $i = 1,\dots,M$, то $A = \dfrac{M}{N}c^2$.

Доказательство. Из (2.1) и теоремы 1 следует, что оператор $S \geqslant 0$ обратимый, самосопряженный, поэтому все его собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ — положительные числа.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{N}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{H}^N$, состоящий из собственных векторов оператора S. Для любого $x \in \mathbb{H}^N$

$$x = \sum_{k=1}^{N}\langle x,e_k\rangle\,e_k,$$

$$Sx = \sum_{k=1}^{N}\langle x,e_k\rangle\,\lambda_k\,e_k,$$

$$\sum_{i=1}^{M}|\langle x,\varphi_i\rangle|^2 = \langle Sx,x\rangle = \left\langle\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_k\rangle\lambda_k\,e_k,\ \sum_{j=1}^{N}\langle x,e_j\rangle\,e_j\right\rangle = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k|\langle x,e_k\rangle|^2.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M}|\langle x,\varphi_i\rangle|^2 \leqslant \lambda_{\max}\|x\|^2.$$

В частности, при фиксированном $k \in \{1,\dots,N\}$

$$\langle Se_k,\ e_k\rangle = \sum_{i=1}^{M}|\langle e_k,\varphi_i\rangle|^2 = \langle\lambda\,e_k,\ e_k\rangle = \lambda_k,$$

откуда сразу следует оптимальность границ $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$, если в качестве e_k выбирать собственные вектора, соответствующие собственным числам $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$.

След $\operatorname{Tr} S$ оператора S

$$\operatorname{Tr} S := \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = \sum_{k=1}^{N} \langle S e_k,\ e_k \rangle = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} |\langle e_k, \varphi_i \rangle|^2 = \\ = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} |\langle e_k, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{M} \|\varphi_i\|^2.$$

Если $\Phi \in (UTF)$ и $\|\varphi_i\| = c$, $i = 1, \ldots, M$, то согласно (2.2)

$$S = A I_N \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = A,$$

равенство 2) в условии теоремы примет вид:

$$N \cdot A = M \cdot c^2.$$

3. Фреймы и передача сигналов

Пусть передается сигнал $x \in \mathbb{R}^N$ от $\mathcal{A}$ к $\mathcal{R}$. Для защиты информации в этом сигнале можно предоставить $\mathcal{A}$ и $\mathcal{R}$ некоторый фрейм Φ в качестве ключа и передавать фреймовые коэффициенты

$$\{\langle x, \widetilde{\varphi_i} \rangle\}_{i=1}^{M} \quad \text{или} \quad \{\langle x, \varphi_i \rangle\}_{i=1}^{M}.$$

$\mathcal{R}$ восстанавливает сигнал по формулам

$$x = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \widetilde{\varphi_i} \rangle\, \varphi_i \quad \text{или} \quad x = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i \rangle\, \widetilde{\varphi_i}.$$

Реально $\mathcal{R}$ получает зашумленный или квантованный (с округлениями до заранее определенных уровней) сигнал

$$\{\langle x, \widetilde{\varphi_i} \rangle + \eta_i\}_{i=1}^{M}.$$

При восстановлении получаем

$$\sum_{i=1}^{M} (\langle x, \widetilde{\varphi_i} \rangle + \eta_i)\, \varphi_i = x + \sum_{i=1}^{M} \eta_i\, \varphi_i.$$

Последнее слагаемое в правой части равенства является шумом. Если $M > N$, то $\mathcal{N}_{F^*} \neq \{0\}$. Появляется теоретическая возможность подобрать Φ так, чтобы помехи $\{\eta_i\} \in \mathcal{N}_{F^*}$, это значит: $\sum_{i=1}^{M} \eta_i\, \varphi_i = 0$, что приведет к точному восстановлению сигнала.

При использовании вместо фрейма ортонормированного базиса $\{\varphi_i\}_i$ такая ситуация теоретически невозможна в силу равенства $\| \sum_i c_i\, \varphi_i \|^2 = \sum_i |c_i|^2$.

Задача восстановления сигнала алгоритмически решается разными способами [9]. Опишем здесь простейший из них, линейный. Обозначим полученный сигнал $\widehat{y} = Fx + \eta$. Если $\eta = 0$, то $x = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i \rangle \widetilde{\varphi_i} = \widetilde{F^*}\widehat{y}$, где $\widetilde{F^*}$ — оператор синтеза канонического дуального фрейма $\widetilde{\Phi}$. И в общем случае будем действовать по такому же алгоритму. В качестве оптимального сигнала берется

$$\widehat{x} := \widetilde{F^*}\widehat{y} = \widetilde{F^*}(Fx + \eta) = \sum_{i=1}^{M} (\langle x, \varphi_i \rangle + \eta_i) \widetilde{\varphi_i}.$$

Ошибка такой замены (в векторном виде)

$$x - \widehat{x} = \sum_{i=1}^{M} \langle x, \varphi_i \rangle \widetilde{\varphi}_i - \sum_{i=1}^{M} (\langle x, \varphi_i \rangle + \eta_i) \widetilde{\varphi}_i = - \sum_{i=1}^{M} \eta_i \, \widetilde{\varphi}_i.$$

Численно ошибку можно измерять разными метриками. Рассмотрим простейший вариант — евклидову метрику.

$$MSE(\text{mean square error}) := \frac{1}{N} \mathbb{E} \| x - \widehat{x} \|_2^2 = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{M} \eta_i \, \widetilde{\varphi}_i \right\|^2,$$

математическое ожидание или усреднение берется по вероятностному пространству, на котором определены случайные величины η_i. Обычно предполагается, что η_i независимы или некоррелированы, имеют одинаковую дисперсию σ^2 и математическое ожидание, равное нулю.

Преобразуем MSE:

$$MSE = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{M} \eta_i \, \widetilde{\varphi}_i \right\|^2 = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \eta_i \, \eta_k \, \langle \widetilde{\varphi}_i, \widetilde{\varphi}_k \rangle \right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=1}^{M} \| \widetilde{\varphi}_k \|^2 = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\lambda}_i = \frac{\sigma^2}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i},$$

где $\widetilde{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, N$ — собственные значения фреймового оператора $\widetilde{S}$ канонического дуального фрейма. Учитывая, что $\widetilde{S} = S^{-1}$, получим $\widetilde{\lambda}_i = \dfrac{1}{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, N$.

Теорема 3. Минимальное значение MSE на классе всех равномерных фреймов с нормой, равной c, достигается на жестком фрейме, и это значение равно $\dfrac{N\sigma^2}{Mc^2}$. В частности, при фиксированном объеме фрейма $M \geqslant N$ минимальное значение MSE на классе всех равномерных фреймов с нормой $\sqrt{\dfrac{N}{M}}$ достигается на фрейме Парсеваля, и это значение равно σ^2.

Доказательство. В силу условия 2) теоремы 2 для $\Phi \in (UF)$ справедливо:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \sum_{k=1}^{M} \| \varphi_k \|^2 = Mc^2, \quad \text{где } c = \| \varphi_k \|, \ k = 1, \ldots, M.$$

Таким образом, задача сводится к минимизации $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i}$ при условии $\sum_i \lambda_i = \text{const}$. Известно решение этой задачи: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = \dfrac{Mc^2}{N}$. Как мы видели выше, одинаковые собственные значения фреймового оператора S характеризуют жесткий фрейм.

Таким образом, получили следующие оценки для MSE:

а) для фрейма общего вида $\dfrac{\sigma^2}{B} \leqslant MSE \leqslant \dfrac{\sigma^2}{A}$;

б) для равномерного фрейма (UF) в силу теоремы 3 имеем

$$\frac{N\sigma^2}{Mc^2} \leqslant MSE \leqslant \frac{\sigma^2}{A}, \qquad c = \| \varphi_i \|, \ i = 1, \ldots, M;$$

в) для равномерного жесткого фрейма (UTF) MSE минимальна и

$$MSE = \frac{N\sigma^2}{Mc^2} = \frac{\sigma^2}{rc^2}, \qquad r = \frac{M}{N} > 1 \text{ — отношение избыточности,}$$

т.е. для класса UTF ошибка $MSE = O\left(\frac{1}{r}\right)$, $r \to \infty$.

Для равномерного фрейма Парсеваля третье утверждение теоремы 2 примет вид

$$1 = \frac{M}{N}c^2 \;\Rightarrow\; c^2 = \frac{N}{M},$$

и поэтому MSE не зависит от r и $MSE = \sigma^2$.

4. Объем фрейма Парсеваля

В связи с изложенными в предыдущем параграфе результатами возникает следующий вопрос: существуют ли фреймы Парсеваля с одинаковыми нормами сколь угодно большого объема?

Во-первых, отметим следующий простой результат.

Предложение 2. Если $\Phi \in (NPF)$ в $\mathbb{H}^N$, то $M = N$ и Φ— ортонормированный базис.

Доказательство. Как показано выше для $\Phi \in (UPF)$ справедливо равенство

$$\|\varphi_k\|^2 = \frac{N}{M}, \qquad k = 1, \dots, M.$$

Поэтому из условия сразу следует равенство $N = M$.

По определению фрейма Парсеваля для каждого j имеем

$$1 = \|\varphi_j\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle\varphi_j, \varphi_k\rangle|^2 = 1 + \sum_{k \neq j} |\langle\varphi_j, \varphi_k\rangle|^2,$$

откуда $\langle\varphi_j, \varphi_k\rangle = 0$ для $k \neq j$. Таким образом, Φ— ортонормированный базис в $\mathbb{H}^N$.

Конструктивный метод построения фреймов в $\mathbb{H}^N$ основан на теореме 4.

Теорема 4. Пусть Λ — $M \times N$-матрица, строки которой $\varphi_1, \dots, \varphi_M$— элементы $\mathbb{H}^N$, а столбцы $\psi_1, \dots, \psi_N$— элементы $\mathbb{H}^M$. Векторы $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ образуют фрейм в $\mathbb{H}^N$ с границами A и B тогда и только тогда, когда для любого набора $\{c_k\}_{k=1}^N$ из $\mathbb{H}^N$ выполняются неравенства:

$$A\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{N} c_k\psi_k \Big\|_{\mathbb{H}^M}^2 \leqslant B\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2, \tag{4.1}$$

т.е. $\{\psi_k\}_{k=1}^N$ является базисом в своей линейной оболочке в $\mathbb{H}^M$.

Доказательство. Утверждение теоремы становится очевидным, если заметить, что

$$\Big\| \sum_{k=1}^{M} c_k\psi_k \Big\|_{\mathbb{H}^M}^2 = \Big\| \Lambda\{c_k\}_{k=1}^N \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{M} |\langle\varphi_i, \{\overline{c_k}\}_{k=1}^N\rangle|^2, \ \{c_k\}_{k=1}^N \in \mathbb{H}^N.$$

Таким образом, неравенство (4.1) совпадает с определением фрейма в пространстве $\mathbb{H}^N$.

Пример 1. [6, 1.3.5]

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix}.$$

Векторы ψ_1, ψ_2, ψ_3 ортогональны в $\mathbb{R}^5$, $\|\psi_k\| = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $k = 1, 2, 3$ и выполняется

$$\Big\| \sum_{k=1}^{3} c_k \psi_k \Big\|^2 = \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{3} |c_k|^2, \quad \text{для любого } \{c_k\} \in \mathbb{R}^3.$$

Следовательно, набор $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^5$ строк матрицы Λ образует жесткий фрейм в $\mathbb{R}^3$ с границей $A = \frac{5}{3}$ и $\|\varphi_i\| = 1$, $i = 1, \dots, 5$.

Матрица $\sqrt{\frac{3}{5}}\,\Lambda$ порождает в $\mathbb{R}^3$ фрейм Парсеваля с одинаковыми нормами и $M = 5$.

Приведенный пример интересен тем, что удаление двух последних строк превращает матрицу в вырожденную. Активно исследуются вопросы о сохранении фрейма после удаления некоторого количества его элементов [10].

Следствие 1. Пусть $M \geqslant N$ и Λ— $M \times N$-матрица. Эквивалентны следующие утверждения:

(1) Выполняется равенство $\Lambda^*\Lambda = I_N$.
(2) Столбцы $\psi_1, \dots, \psi_N$ матрицы Λ образуют ортонормированную систему в $\mathbb{H}^M$.
(3) Строки $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ матрицы Λ образуют фрейм Парсеваля в $\mathbb{H}^N$.

Доказательство. Докажем (1) $\Leftrightarrow$ (2). Запишем равенство (1) подробнее:

$$\Lambda^*\Lambda = \begin{pmatrix} - & \overline{\psi_1} & - \\ - & \overline{\psi_2} & - \\ . & . & . \\ - & \overline{\psi_N} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_N \\ | & | & & | \end{pmatrix} = I_N,$$

это эквивалентно системе равенств

$$\|\psi_k\|^2 = 1,\ k = 1, \dots, N; \quad \langle \psi_k, \psi_j \rangle = 0,\ k, j = 1, \dots, N,\ k \neq j.$$

Докажем (2) $\Leftrightarrow$ (3). Согласно теореме 4, условие (3) эквивалентно выполнению равенства:

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2,$$

а оно, в свою очередь, эквивалентно утверждению, что $\{\psi_k\}_{k=1}^N$ образуют ортонормированную систему, т.е. условию (2).

Следствие 2. Пусть Λ — унитарная матрица размерности $M\times M$. Тогда после удаления любых $M-N$ столбцов матрицы Λ строки оставшейся матрицы будут образовывать фрейм Парсеваля для пространства $\mathbb{H}^N$.

Доказательство. Доказательство вытекает из следствия 1, если заметить, что оставшиеся N столбцов матрицы Λ образуют ортонормированную систему в $\mathbb{H}^M$.

Другой подход к построению фреймов Парсеваля основан на теореме М.А. Наймарка [11, 12]: Набор $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in I}$ образует фрейм Парсеваля в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда существует гильбертово пространство $\mathbb{K}\supset\mathbb{H}$, существует ортонормированный базис $\{e_i\}_{i\in I}$ в $\mathbb{K}$ и ортопроектор P из $\mathbb{K}$ на $\mathbb{H}$ такой, что $Pe_i=\varphi_i$, $i\in I$.

Часть "только тогда" в теореме Наймарка простая: если $\{e_i\}_{i\in I}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{K}$, то

$$\langle x,\varphi_i\rangle=\langle x,Pe_i\rangle=\langle Px,e_i\rangle=\langle x,e_i\rangle,\quad i\in I$$

для $x\in P(\mathbb{K})=\mathbb{H}$ и

$$\sum_{i\in I}|\langle x,\varphi_i\rangle|^2=\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2=\|x\|^2.$$

Фреймовое представление для фрейма Парсеваля имеет такую же форму, как представление для ортонормированного базиса:

$$x=\sum_i\langle x,\varphi_i\rangle\,\varphi_i.$$

Как уже отмечалось выше, для фрейма Парсеваля фреймовый оператор $S=I_N$, а канонический дуальный фрейм $\widetilde{\Phi}=\Phi$.

Следующее предложение дает общее описание фреймов в виде образов сюръективного оператора. Первые два утверждения являются классическими и приводятся для сравнения базисов и фреймов.

Предложение 3. Справедливы следующие утверждения:

1) любой ОНБ в $\mathbb{H}^N$ есть множество вида
$(\{U\delta_k\}_{k=1}^N \mid U$ — ортогональная матрица, δ_k – орты в $\mathbb{H}^N)$;

2) любой базис в $\mathbb{H}^N$ есть множество вида
$(\{U\delta_k\}_{k=1}^N \mid U$ — линейная биекция, δ_k – орты в $\mathbb{H}^N)$;

3) любой фрейм Φ объема M в $\mathbb{H}^N$
$\Phi=\{\varphi_i\}_{i=1}^M=(\{U\delta_i\}_{i=1}^M \mid U:\ \mathbb{H}^M\to\mathbb{H}^N$ — сюръекция).

Доказательство. Докажем 3). Если Φ — фрейм, то оператор синтеза $F^*:\{c_i\}_{i=1}^M\in\mathbb{R}^M\mapsto\sum_{i=1}^M c_i\,\varphi_i$ — сюръекция по определению фрейма; $F^*\delta_i=\varphi_i$, δ_i — i-й орт в $\mathbb{H}^M$.

Обратно, пусть $\varphi_i:=U\delta_i$ и U — линейный сюрьективный оператор из $\mathbb{H}^M$ на $\mathbb{H}^N$. Тогда U^* — инъекция из $\mathbb{H}^N$ в $\mathbb{H}^M$. Более того, найдется $A>0$ [8] такое, что

$$\|U^*x\|^2\geqslant A\,\|x\|^2,\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

Имеем следующие равенства

$$\sum_{i=1}^M|\langle x,\varphi_i\rangle|^2=\sum_{i=1}^M|\langle x,U\delta_i\rangle|^2=$$

$$=\sum_{i=1}^M|\langle U^*x,\delta_i\rangle|^2=\|U^*x\|^2\geqslant A\|x\|^2,\quad x\in\mathbb{R}^N$$

Далее речь будет идти о фреймах Парсеваля с одинаковыми нормами. В теореме 5 приведено полное описание равномерных жестких фреймов в пространстве $\mathbb{R}^2$. Как мы видели выше (следствие 2 к теореме 4), если взять ортогональную или унитарную матрицу размера $M\times M$, удалить из нее $M-N$ столбцов, то строки оставшейся матрицы дадут фрейм Парсеваля, но он не будет фреймом Парсеваля с *одинаковыми* нормами. Получается, что проектор P сохраняет фреймовы границы, но не сохраняет нормы и делает из векторов единичной длины векторы разной длины. Таким образом, возникает общая для гильбертова пространства с ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i\in I}$ задача: среди множества всех ортопроекторов P выделить те, для которых $\|Pe_i\| = \mathrm{const}$. Эта задача остается открытой [13].

Теорема 5. Пусть $M \geqslant 2$. Эквивалентны утверждения:

1) Набор $\Phi = \{\varphi_k = (c\cdot\cos\alpha_k,\ c\cdot\sin\alpha_k)\}_{k=1}^{M}$ образуют равномерный жесткий фрейм в $\mathbb{R}^2$.

2) Числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_M$ удовлетворяют равенству $\sum\limits_{k=1}^{M} e^{2i\,\alpha_k} = 0$.

Доказательство. Запишем матрицу оператора анализа для Φ :

$$F = c\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_M & \sin\alpha_M \end{pmatrix}.$$

Набор Φ является равномерным жестким фреймом с границей A тогда и только тогда, когда выполняется равенство $S = F^*F = AI_2$, причем, ввиду утверждения 3 теоремы 2, $A = \dfrac{M}{2}c^2$. Записывая операторное равенство в матричной форме, имеем

$$c^2\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \ldots & \cos\alpha_M \\ \sin\alpha_1 & \ldots & \sin\alpha_M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cos\alpha_M & \sin\alpha_M \end{pmatrix} = \frac{M}{2}c^2 I_2,$$

отсюда

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{M}\cos^2\alpha_k = \dfrac{M}{2}, \\ \sum\limits_{k=1}^{M}\sin^2\alpha_k = \dfrac{M}{2}, \\ \sum\limits_{k=1}^{M}\cos\alpha_k\sin\alpha_k = 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{M}\cos 2\alpha_k = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{M}\sin 2\alpha_k = 0, \end{cases}$$

и, наконец, в комплексной форме

$$\sum_{k=1}^{M} e^{2i\,\alpha_k} = 0.$$

Пример 2. Множество $\left\{\alpha_k = \dfrac{\pi k}{M},\ k = 1,\ldots,M\right\}$ удовлетворяет теореме:

$$\sum_{k=1}^{M} e^{2i\cdot\frac{\pi k}{M}} = [\omega := e^{\frac{2i\pi}{M}}] = \sum_{k=1}^{M}\omega^k = \frac{\omega-\omega^{M+1}}{1-\omega} = \frac{\omega-\omega}{1-\omega} = 0,$$

так как $\omega^M = 1$.

Пример 3. Если $\frac{M}{2}c^2 = 1$, т. е. $c = \sqrt{\frac{2}{M}}$, то теорема дает полное описание UPF в $\mathbb{R}^2$.

Пример 4. Пусть $M = 3$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha_3 = \pi$;

$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\varphi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\varphi_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}(-1, 0)$.

Введение любого нового понятия ставит вопрос о его инвариантности относительно некоторого класса преобразований. В этой связи вводится

Определение. Набор $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^M$ элементов пространства $\mathbb{C}^N$ ($\mathbb{R}^N$) назовем *эквивалентным* фрейму $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ пространства $\mathbb{C}^N$ ($\mathbb{R}^N$), если существует унитарное (соответственно ортогональное) преобразование $U : \mathbb{C}^N (\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}^N (\mathbb{R}^N)$ такое, что $\gamma_i = U\varphi_i$, $i = 1, \ldots, M$.

Теорема 6. Если набор Γ эквивалентен фрейму Φ с оптимальными границами A и B, то Γ является фреймом с теми же оптимальными границами.

Доказательство. Напомним, что преобразование $U : \mathbb{C}^N (\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}^N (\mathbb{R}^N)$ называется унитарным (ортогональным), если $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$, $x, y \in \mathbb{C}^N$ ($\mathbb{R}^N$)[14]. Оператор, сопряженный к унитарному (ортогональному), также является унитарным (ортогональным). Так как

$$\langle x, \gamma_i\rangle = \langle x, U\varphi_i\rangle = \langle U^* x, \varphi_i\rangle,$$

то

$$A\|U^* x\|^2 \leqslant \sum |\langle x, \gamma_i\rangle|^2 = \sum |\langle U^* x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|U^* x\|^2.$$

Остается заметить, что $\|U^* x\| = \|x\|$, $x \in \mathbb{C}^N$ ($\mathbb{R}^N$).

В недавних работах [13, 15] был получен принципиальный результат о существовании равномерных фреймов Парсеваля сколь угодно большого объема. В этих работах он получен в качестве следствия общей теоремы, которая приводится здесь без доказательства ввиду его большого объема и сложности.

Теорема 7. Пусть S — положительный, самосопряженный оператор на $\mathbb{H}^N$ с собственными значениями $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$. Пусть дан набор из M неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_M \geqslant 0$.

Эквивалентны утверждения:

1) существует фрейм $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^M$ в $\mathbb{H}^N$ с фреймовым оператором S и $\|\varphi_i\| = a_i$, $i = 1, \ldots, M$;
2) для всех $k = 1, \ldots, N$ выполняются неравенства $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{M} a_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i$.

Отметим, что последнее равенство уже было получено в теореме 3.

Следствие. Для любого $M \geqslant N$ в пространстве $\mathbb{H}^N$ существует равномерный фрейм Парсеваля объема M.

Доказательство. В условии теоремы 7 в качестве фреймового оператора S возьмем

$S = I_N$ и положим $a_i = \sqrt{\frac{N}{M}}$, $i = 1, \ldots, M$. Получим выполнение условия 2 теоремы 7:

1) $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 = k\dfrac{N}{M} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} 1 = k$ и

2) $\sum\limits_{i=1}^{M} a_i^2 = M\dfrac{N}{M} = \sum\limits_{i=1}^{N} 1 = N.$

Согласно теореме 7, существует фрейм $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ с фреймовым оператором $S = I_N$ и $\|\varphi_i\| = \sqrt{\dfrac{N}{M}}$, $i = 1, \ldots, M$; это и есть равномерный фрейм Парсеваля объема M.

В пространстве $\mathbb{C}^N$ такой фрейм можно построить явно. Для этого надо воспользоваться матрицей дискретного преобразования Фурье. Зафиксируем $M > N$, $\omega := e^{\frac{2\pi i}{M}}$, i — мнимая единица. Образуем $M \times M$- матрицу:

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{M-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(M-1)} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & \omega^{M-2} & \omega^{2(M-2)} & \ldots & \omega^{(M-1)(M-2)} \\ 1 & \omega^{M-1} & \omega^{2(M-1)} & \ldots & \omega^{(M-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Столбцы и строки этой матрицы образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}^N$, так называемый базис Фурье.

Удаляя из этой матрицы любые $M - N$ столбцов, получим в строках векторы $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{M-1}\} = \Phi$, которые образуют UPF в $\mathbb{C}^N$, его называют *гармоническим фреймом.* Он обладает дополнительными свойствами, например, устойчивостью к потерям (erasures): каждое подмножество Φ с количеством элементов, большим N, остается фреймом.

Переход от $\mathbb{C}^N$ к $\mathbb{R}^N$ нетривиален. Приведенные в [13] примеры фреймов Парсеваля не имеют, вообще говоря, одинаковых норм.

Теорема 8. Справедливы утверждения:

1) фрейм для $\mathbb{R}^N$ с границами A и B является фреймом для $\mathbb{C}^N$ с теми же границами;
2) если $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ является фреймом для $\mathbb{C}^N$ с границами A и B, то $2M$ векторов $(\{\operatorname{Re}\varphi_k\}_{k=1}^{M}, \{\operatorname{Im}\varphi_k\}_{k=1}^{M})$ образуют фрейм в $\mathbb{R}^N$ с границами A и B.

Доказательство. Докажем 1). Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ — фрейм в $\mathbb{R}^N$ с границами A и B. Если $x \in \mathbb{C}^N$, то $x = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}^N$. Рассмотрим

$$\langle x, \varphi_k\rangle_{\mathbb{C}^N} = \sum_{n=1}^{N} x_n \varphi_n^{(k)} = \sum_{n=1}^{N} (a_n + ib_n)\varphi_n^{(k)} = \langle a, \varphi_k\rangle_{\mathbb{R}^N} + i\langle b, \varphi_k\rangle_{\mathbb{R}^N}.$$

Поэтому

$$A(\|a\|^2 + \|b\|^2) \leqslant \sum_{k=1}^{M} |\langle x, \varphi_k\rangle_{\mathbb{C}^N}|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \langle a, \varphi_k\rangle_{\mathbb{R}^N}^2 + \sum_{k=1}^{M} \langle b, \varphi_k\rangle_{\mathbb{R}^N}^2 \leqslant B(\|a\|^2 + \|b\|^2),$$

или, учитывая, что $\|x\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$, получим

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{M} |\langle x, \varphi_k\rangle_{\mathbb{C}^N}|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Докажем 2). Пусть теперь $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в $\mathbb{C}^N$ с границами A и B, и пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда

$$\langle x, \varphi_k\rangle_{\mathbb{C}^N} = \sum_{n=1}^{N} x_n\Big(Re\,\varphi_n^{(k)} - i\,Im\,\varphi_n^{(k)}\Big) =$$

$$= \langle x, Re\,\varphi_k\rangle_{\mathbb{R}^N} - i\langle x, Im\,\varphi_k\rangle_{\mathbb{R}^N},$$

откуда и из условия получим

$$\begin{array}{c} \sum\limits_{k=1}^{M} |\langle x, \varphi_k\rangle_{\mathbb{C}^N}|^2 \\ \| \end{array}$$

$$A\|x\|^2_{\mathbb{R}^N} = A\|x\|^2_{\mathbb{C}^N} \leqslant \sum_{k=1}^{M} \Big(\langle x, Re\,\varphi_k\rangle^2_{\mathbb{R}^N} + \langle x, Im\,\varphi_k\rangle^2_{\mathbb{R}^N}\Big) \leqslant B\|x\|^2_{\mathbb{C}^N} = B\|x\|^2_{\mathbb{R}^N}.$$

Теорема 8 позволяет строить фреймы Парсеваля в $\mathbb{R}^N$ объема $2M$, однако равенство норм при этом может нарушаться.

Пример 5. Рассмотрим гармонический фрейм с $N = 2$ и $M = 3$.

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

$$Re\,\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Re\,\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Re\,\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$Im\,\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Im\,\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Im\,\varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

На этом примере можно увидеть, что векторы $\{Im\,\varphi_k\}_{k=1}^3$ не образуют фрейм в $\mathbb{R}^3$. Кроме того, нормы векторов $\|\varphi_k\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $k = 1, 2, 3$, а нормы векторов $\{Re\,\varphi_k, Im\,\varphi_k\}_{k=1}^3$ разные.

В $\mathbb{R}^N$ есть еще одна подходящая для наших целей матрица — матрица Уолша. Ниже приведены матрицы Уолша 1-го, 2-го и 4-го порядков:

$$1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots .$$

Также, как и выше, можем получать из этих матриц UPF с 2^k элементами. Но этот фрейм (Уолша-Парсеваля) не имеет устойчивости к потерям и содержит одинаковые элементы. Повторяющиеся элементы фрейма — нежелательное явление в при использовании его для передачи сигнала. Даже небольшие потери могут разрушить этот фрейм.

Заключение

Основными новыми результатами работы являются теорема 3 о минимизации средней квадратичной ошибки при передаче зашумленного сигнала на жестких фреймах и независимость такой ошибки от объема фрейма Парсеваля, теорема 8 о сохранении границ фрейма при переходе от вещественных пространств к комплексным и обратно и пример после этой теоремы.

Литература

[1] Новиков, И.Я. Теория всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. – М.: Физматлит, 2005. – 308 с.

[2] Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи. М.: Мир, 2001.

[3] Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. М.-Ижевск: РХД , 2004. – 464 с.

[4] Блаттер, К. Вейвлет-анализ. Основы теории / К. Блаттер. – М.: Техносфера, 2004. – 280 с.

[5] Малла, С. Вэйвлеты в обработке сигналов / С. Малла. – М.: Мир, 2005.

[6] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases / O. Christensen. Boston: Birkhäuser, 2002.

[7] Истомина М.Н. О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц / М.Н. Истомина, А.Б. Певный / Математическое просвещение. – 2007. – Сер. 3. – Вып. 11.

[8] Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975.

[9] Goyal, V.K. Quantized frame expansions with erasures / V.K. Goyal, J. Kovacevic, J.A. Kelner // Appl. Comput. Harmonic Anal. – 2001. – V. 10. – No. 3. – P. 203–233.

[10] Casazza, P.G. Uniform Tight Frames with Erasures / P.G. Casazza, J. Kovacevic. // Comp. Math. 18. – 2003. – No. 2–4. – P. 387–430.

[11] Наймарк, М.А. /М.А. Наймарк // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1940. – Т. 4. – №3. – С. 277–318.

[12] Кашин, Б.С. Замечание об описании фреймов общего вида / Б.С. Кашин, Т.Ю. Куликова // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – Вып. 6. – С. 941–945.

[13] Casazza, P.C. The known equal norm Parseval Frames as of 2005 / P.C. Casazza, N. Leonhard.
Preprint: `www.math.missouri.edu/~pete/`

[14] Глазман, И.М. Конечномерный линейный анализ / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. – М.: Наука, 1969.

[15] Casazza, P.C. Constructing Frames with a given Frame Operator / P.C. Casazza, M. Leon
Preprint: `www.math.missouri.edu/~pete/`

Поступила в редакцию 6/*VIII*/2007;
в окончательном варианте — 6/*VIII*/2007.

THE VOLUME OF PARSEVAL FRAME[3]

© 2007 E.S. Drabkova, S.Ya. Novikov[4]

This work is a review of the results on Frames in finite dimensional unitary and Euclid spaces obtained in 2000–2007. The new estimates of MSE (mean square error) in transmission of a digital signal with a noise are obtained. The self-contained proof of the existence of Parseval Frame with arbitrary volume is provided. The full description of uniform tight Frames in $\mathbb{R}^2$ is given.

Paper received 6/*VIII*/2007.
Paper accepted 6/*VIII*/2007.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4]Drabkova Ekaterina Sergeevna (kadra82@mail.ru), Novikov Sergei Yakovlevitsch (nvks@ssu.samara.ru), Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.