

УДК 517.9

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА–СИДОРОВА ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЛОТНИКОВА¹

© 2007 А.Ф. Гильмутдинова²

В статье обсуждается вопрос о единственности решения задачи Шоултера–Сидорова для системы уравнений $v_t = \Delta v - \Delta w$, $0 = v + \Delta w - \delta w - \alpha w^3$. Показано, что если $\alpha \in \mathbb{R}_+$, а $\delta = \lambda_1$ (первое собственное значение оператора Лапласа Δ), то фазовое пространство системы уравнений Плотникова лежит на сборке Уитни, и поэтому в зависимости от начальных условий задача может иметь либо одно, либо три решения.

В работе дается ответ на вопрос, поставленный в [1, 2]. Речь идет о неединственности решений начально-краевой задачи

$$\theta(x, 0) + \varphi(x, 0) = \xi(x), \quad x \in \Omega; \quad (\text{i})$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial n} + \lambda \theta\right)(x, t) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \lambda \varphi\right)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+; \quad (\text{ii})$$

для системы уравнений

$$(\theta + \varphi)_t = \Delta \theta, \quad \Delta \varphi - \alpha \varphi^3 + \delta \varphi + \theta = 0, \quad (\text{iii})$$

определенной в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , параметры $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}_+$. Рассуждая аналогично [3], редуцируем задачу (i)–(iii) к задаче Шоултера–Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0 \quad (\text{iv})$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \quad \ker L \neq \{0\}, \quad (\text{v})$$

где оператор M сильно $(L, 0)$ -секториален, а оператор N нелинеен. Ответ заключается в описании фазового пространства уравнения (v). Именно, будет показано, что оно лежит на сборке Уитни [4].

Если уравнение (v) линейно (т.е. оператор $N = \mathbf{O}$), то его фазовым пространством $\mathfrak{P}$ является некоторое подространство. Поэтому любое решение задачи (iv) совпадает с решением задачи Коши

$$u(0) = v_0, \quad (\text{vi})$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Л.С. Пулькиной.

²Гильмутдинова Альбина Фаритовна (algil@list.ru), кафедра уравнений математической физики Южно-Уральского государственного университета, 454080, Россия, г. Челябинск, ул. Ленина, 76.

где v_0 — проекция вектора u_0 на $\mathfrak{P}$ вдоль $\ker L$ [5]. Таким же образом обстоит дело и в случае $N \neq \mathbf{0}$, но фазовым пространством служит гладкое банахово многообразие [6–9]. Совсем иная ситуация в случае когда фазовое пространство уравнения (v) лежит на многообразии, содержащем особенность, например, складку Уитни как в [10]. Тогда проекция u_0 на $\mathfrak{P}$ вдоль $\ker L$ может иметь два образа, и соответственно задача (iv) будет иметь два решения. Этот феномен был впервые отмечен в [11]. В рассматриваемом случае при некоторых значениях параметра δ фазовое пространство уравнения (iii) лежит на сборке Уитни, и соответственно задача (i), (ii) может иметь три решения.

Статья организована следующим образом. В п.1 изложена редукция задачи (i)–(iii) к задаче (iv), (v). В п.2 приведен основной результат статьи — описание фазового пространства.

1. Постановка задачи

Прежде всего, следуя [3], преобразуем задачу (i)–(iii) к более удобному для нас виду

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u \right)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+; \quad (1.2)$$

$$v_t = \Delta v - \Delta w, \quad 0 = v + \Delta w - \delta w - \alpha w^3; \quad (1.3)$$

где $u = \text{col}(v, w)$, $v = v(x, t)$, $w = w(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ ; параметры $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\delta \in \mathbb{R}$. Для редукции задачи (1.1)–(1.3) к задаче (iv), (v) положим $\mathcal{H} = (W_2^1)^2$, а через $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$ обозначим сопряженное к $\mathcal{H}$ относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$ из $(L_2)^2$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Операторам $L, M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ сопоставим матрицы

$$L : (u, \zeta) \rightarrow \text{diag} \left\{ \int v \xi dx, 0 \right\}, \quad u, \zeta \in \mathfrak{U}, \quad \zeta = \text{col}(\xi, \eta);$$

$$M : (u, \zeta) \rightarrow \{M_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad M_{11} = - \int_{\Omega} v_x \xi_x dx - \lambda \int_{\partial\Omega} v \xi dx,$$

$$M_{12} = \int_{\Omega} w_x \eta_x dx + \lambda \int_{\partial\Omega} w \xi dx, \quad M_{22} = - \int_{\Omega} w_x \eta_x dx - \lambda \int_{\partial\Omega} w \eta dx, \quad M_{21} = 0,$$

где $\varphi_x \psi_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Как нетрудно видеть, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\text{dom } M = \mathcal{H}$. Кроме того, нам потребуется условие

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}). \quad (A1)$$

Условие (A1) имеет место либо в случае, когда оператор M сильно (L, p) -секториален справа (слева), либо когда пространство $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) рефлексивно (теорема Яги–Федорова [12]). Здесь $\mathfrak{U}^k$ ($\mathfrak{F}^k$) имеет тот же смысл, что в статье [13]. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$ ($\mathfrak{U}^k \cap \text{dom } M$), $k = 0, 1$.

Кроме (A1) нам потребуется еще одно условие

$$\text{оператор } L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1), \quad (A2)$$

которое выполняется либо в случае, когда оператор M сильно (L, p) -секториален, либо когда $\mathfrak{F}^1 = \text{Im } L_1$ (теорема Банаха). Если выполнены условия (A1) и (A2), то существует операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ [5]. Аналогично [3], нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.1. Оператор M $(L, 0)$ -секториален, причем выполнены условия (A1), (A2).

Действительно, по построению правая L -резольвента оператора M [5]

$$R_\mu^L(M) = \text{diag} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cdot, \varphi_k)\varphi_k}{(\mu - \lambda_k)}, \mathbf{0} \right\} \equiv \text{diag} \{A, \mathbf{0}\}$$

и левая L -резольвента оператора M [5]

$$L_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} A & -A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где $\{\lambda_k\}$ -собственные значения третьей краевой задачи для оператора Лапласа Δ в области Ω , занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ -соответствующие ортонормированные собственные функции, $(\cdot, \cdot)$ -скалярное произведение в L_2 . Из (1.4) легко вытекает $(L, 0)$ -секториальность оператора M . Далее, пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, тогда $\mathfrak{U}^0 = \ker L = \{0\} \times \mathfrak{W}$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{V} \times \{0\}$, $\mathfrak{F}^1 = \text{Im } L = \mathfrak{V} \times \{0\}$, $\mathfrak{F}^0 = M[\mathfrak{U}^0 \cap \text{dom } M] = \{f \in \mathfrak{F} : f = \text{col}(-\Delta w, \Delta w), w \in \mathfrak{W} \cap W_2^1\}$. Также нетрудно получить, что $L_1^{-1} = L$. Другими словами, условия (A1), (A2) тоже выполнены.

Теперь построим оператор

$$N : u \rightarrow \text{col}(0, v - \delta w + \alpha w^3)$$

и положим $\text{dom } N = (L_4)^2 = \mathfrak{U}_\alpha$.

Теорема 2.1. Пусть $n \in \{2, 3, 4\}$, тогда оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha; \mathfrak{F})$.

Доказательство. Покажем сначала, что $N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha; \mathfrak{U}_\alpha^*)$, где $\mathfrak{U}_\alpha^*$ -сопряженное к $\mathfrak{U}_\alpha$ относительно двойственности $[\cdot, \cdot]$ пространство $\mathfrak{U}_\alpha^* \cong (L_{4/3})^2$. Действительно, в силу неравенства Гельдера и непрерывности вложения $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow (L_2)^2$ имеем

$$|[N(u), \zeta]| \leq (a \|u\|_{\mathfrak{U}_\alpha}^3 + b \|u\|_{\mathfrak{U}_\alpha}) \|\zeta\|_{\mathfrak{U}_\alpha^*},$$

$$|[N'_u \zeta_1, \zeta_2]| \leq (c \|u\|_{\mathfrak{U}_\alpha}^2 + d) \|\zeta_1\|_{\mathfrak{U}_\alpha^*} \|\zeta_2\|_{\mathfrak{U}_\alpha^*},$$

где константы $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ и не зависят ни от u , ни от ζ, ζ_1, ζ_2 . N'_u -производная Фреше оператора N в точке u . Аналогично доказывается непрерывность второй и третьей производной, остальные производные равны нулю.

Итак включение $N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha; \mathfrak{U}_\alpha^*)$ доказано. Далее в силу теорем вложения Соболева имеем непрерывные и плотные вложения

$$\mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow (L_2)^2 \hookrightarrow \mathfrak{U}_\alpha^* \hookrightarrow \mathfrak{U} = \mathfrak{F}.$$

Здесь пространство $(L_2)^2$ отождествлено со своим сопряженным.

Заметим еще, что начальное условие (1.1) приобретает вид (iv). На этом редукция задачи (1.1)–(1.3) к задаче (iv), (v) закончена.

2. Фазовое пространство

Поскольку $\mathfrak{U}^0 = \ker L$, то все решения системы уравнений (1.3) (здесь и далее в смысле (v)) будут квазистационарными полутраекториями и, значит, с необходимостью будут лежать во множестве

$$\mathfrak{M} = \{u \in \text{dom } M : v = \delta w - \Delta w + \alpha w^3\}.$$

Найдем параметры $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\delta \in \mathbb{R}$, при которых множество $\mathfrak{M}$ будет фазовым пространством уравнений (1.3). В статье [13] доказана следующая

Теорема 2.1. Пусть $n \in \{2, 3, 4\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\delta \in (\lambda_1, +\infty)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}_\alpha$ существует единственное решение задачи Шоултера–Сидорова для системы уравнений (1.3).

Теперь пусть $\delta = \lambda_1$, обозначим через φ нормальный (в смысле L_2) соответствующий δ собственный вектор, и положим $\mathfrak{M}^\perp = \{ \eta \in \mathfrak{M} : (\eta, \varphi) = 0 \}$, $\mathfrak{V}^\perp = \{ \xi \in \mathfrak{V} : (\xi, \varphi) = 0 \}$. Если $v \in \mathfrak{V}$ и $w \in \mathfrak{M}$ представить в виде $v = e\varphi + \xi$ и $w = s\varphi + \eta$, то множество $\mathfrak{M}$ приобретает следующий вид:

$$\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{U} \left\{ \begin{array}{l} \xi = \delta\eta - \Delta\eta + \alpha \left[(\eta + s\varphi)^3 - \int (\eta + s\varphi)^3 \varphi dx \varphi \right], \\ \alpha^{-1}e = \int (\eta + s\varphi)^3 \varphi dx. \end{array} \right. \right\}$$

Лемма 2.1. Пусть $n \in \{2, 3, 4\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\delta = \lambda_1$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда для любого ξ существует единственный η такой, что $\xi = \delta\eta - \Delta\eta + \alpha \left[(\eta + s\varphi)^3 - \int (\eta + s\varphi)^3 \varphi dx \varphi \right]$.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 1 статьи [13], если в качестве вспомогательного оператора рассмотреть следующий оператор:

$$A(\eta) = \delta\eta - \Delta\eta + \alpha \left[(\eta + s\varphi)^3 - \int (\eta + s\varphi)^3 \varphi dx \varphi \right].$$

По лемме 2.1 и по формулам Кардано по ξ_0 и e_0 построим η_0 и s_0 . Положим $v_0 = e_0\varphi + \xi_0$, $w_0 = s_0\varphi + \eta_0$. По построению точка $u_0 = \text{col}(v_0, w_0) \in \mathfrak{M}$. Для однозначной разрешимости воспользуемся результатами [14].

Лемма 2.2. Пусть $n \in \{2, 3, 4\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\delta = \lambda_1$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ в точке u_0 является C^∞ -многообразием, если выполняется следующее неравенство

$$s^2 \|\varphi\|_{L_4}^4 + 2s \int \eta_0 \varphi^3 dx + \int \eta_0^2 \varphi^2 dx \neq 0 \quad (2.1)$$

Поскольку $(A'_{s_0\varphi+\eta_0} \eta, \eta) = ((\lambda_1 - \Delta)\eta, \eta) + 3\alpha \int (\eta_0 + s_0\varphi)^2 \eta^2 dx > 0$, то доказательство этой леммы очевидно (аналогично теореме 6 статьи [13]).

Итак, мы показали, что если выполнено (2.1), то в точке u_0 множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞ -многообразием. Если (2.1) не выполняется, то точка u_0 является точкой складки или сборки Уитни [4].

Положим

$$a = \|\varphi\|_{L_4}^4, \quad b = 3 \int \eta \varphi^3 dx, \quad c = 3 \int \eta^2 \varphi^2 dx, \quad d = \int \eta^3 \varphi dx - \alpha^{-1}e,$$

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right), \quad Q = p^3 + q^2.$$

Теорема 2.2. Пусть $n \in \{2, 3, 4\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\delta = \lambda_1$. Тогда если:

- (i) $Q > 0$, то существует единственное решение задачи Шоултера–Сидорова для системы уравнений (1.3);
- (ii) $Q < 0$, то существует три решения задачи Шоултера–Сидорова для системы уравнений (1.3).

Литература

- [1] Плотников, П.И. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля / П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – №3. – С. 461–471.

- [2] Плотников, П.И. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций / П.И. Плотников, А.В. Клепачева // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – №3. – С. 651–669.
- [3] Fedorov, V.E. An inverse problem for linear Sobolev type equations / V.E. Fedorov, A.V. Urazaeva // Y. Inv. Ill-Posed Problems. – 2004. – V. 12. – №5. – P. 1–9.
- [4] Бокарева, Т.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева / Т.А. Бокарева, Г.А. Свиридюк // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55. – №3. – С. 3–10.
- [5] Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht-Boston: VSP, 2003.
- [6] Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференц. уравн. – 1996. – Т. 32. – №11. – С. 1538–1543.
- [7] Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71. – №2. – С. 292–297.
- [8] Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Изв. вузов. Матем. – 2003. – №9. – С. 36–41.
- [9] Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова // Дифференц. уравн. – 2006. – Т. 42. – №1. – С. 126–131.
- [10] Свиридюк, Г.А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф. Карамова (А.Ф. Гильмутдинова) // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41. – №10. – С. 1476–1481.
- [11] Свиридюк, Г.А. Об одной задаче Showalter / Г.А. Свиридюк // Дифференц. уравн. – 1989. – Т. 25. – №2. – С. 338–339.
- [12] Федоров, В.Е. Обобщение теоремы Хилле–Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В.Е. Федоров // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46. – №2. – С. 426–448.
- [13] Гильмутдинова, А.Ф. Простота фазового пространства системы уравнений Кагинаппа / А.Ф. Гильмутдинова // Вестник МаГУ. Математика. – 2006. – №9. – С. 5–16.
- [14] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Поступила в редакцию 17/I/2007;
в окончательном варианте — 17/I/2007.

ON NONUNIQUENESS OF SOLUTIONS TO THE
SHOWALTER–SIDOROV PROBLEM FOR THE
PLOTNIKOV MODEL³

© 2007 A.F. Gilmutdinova⁴

In this article we are discussing the question on uniqueness of a solution to the Showalter-Sidorov problem for a system of equations $v_t = \Delta v - \Delta w$, $0 = v + \Delta w - \delta w - \alpha w^3$. It is shown that the phase space of Plotnikov's system lies on Whitney's cup. This imply that the problem has either one or three solutions depending on initial data.

Paper received 17/I/2007.

Paper accepted 17/I/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

⁴Gilmutdinova Al'bina Faritonovna (algil@list.ru), Dept. of Mathematical Physics Equations, Uzhno-Uralsk State University, Chelyabinsk, 454080, Russia.