УДК 517.982.27

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН

© 2007 С.В. Асташкин[1]

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых вещественный метод интерполяции порождает эквивалентные нормы на произвольной банаховой паре пространств и подпаре их пересечений с ядром линейного функционала.

Введение

Одной из центральных в теории интерполяции операторов [1] по-прежнему остается проблема интерполяции подпространств, упомянутая еще в монографии Ж.-Л. Лионса и Е. Мадженеса [2]. Ни в коей мере не претендуя на полноту, сошлемся на работы [3–12], в которых изучались ее различные аспекты. Важным частным случаем этой проблемы является задача интерполяции пересечений, которую для вещественного метода интерполяции (определения см. ниже) можно сформулировать следующим образом. Пусть (X_0, X_1) — банахова пара, т.е. два банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в отделимое линейное топологическое пространство $\mathcal{T}$. Если N — линейное подпространство $\mathcal{T}$, то оно порождает нормированную (вообще говоря, не банахову) пару $(X_0 \cap N, X_1 \cap N)$, где норма в $X_i \cap N$ — сужение нормы X_i $(i = 0, 1)$. Спрашивается, при каких условиях на тройку (X_0, X_1, N) и параметры вещественного метода интерполяции $\theta \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty]$ выполнено следующее естественное равенство (по составу элементов с эквивалентностью норм):

$$(X_0 \cap N, X_1 \cap N)_{\theta,q} \; = \; (X_0, X_1)_{\theta,q} \cap N. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать ситуацию, когда N — ядро линейного функционала $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$. В этом случае равенство (1) означает просто эквивалентность норм пространств $N_{\theta,q} = (X_0 \cap N, X_1 \cap N)_{\theta,q}$ и $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ на подпространстве N. В работах автора [13, 14], а также независимо в работе [15] были введены четыре индекса растяжения $\mathcal{K}$-функционала Петре, функционала ψ как элемента суммы $X_0^* + X_1^*$ в сопряженной паре (X_0^*, X_1^*), позволившие решить задачу при некотором дополнительном условии. В этой работе, продолжающей заметку [13], мы покажем, что введение еще двух аналогичных индексов позволяет снять это условие и в итоге получить полное решение рассматриваемой задачи.

[1]Асташкин Сергей Владимирович (astashkn@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Важный частный случай описанной проблемы был рассмотрен в работе Н.Я. Кругляка, Л. Малигранды и Л.-Э. Перссона [16]. При некоторых дополнительных предположениях ими были найдены условия на $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$ и весовые функции $w_0(x)$ и $w_1(x)$, при которых выполнено равенство

$$(L_p(w_0) \cap N, L_p(w_1) \cap N)_{\theta,p} \;=\; (L_p(w_0), L_p(w_1))_{\theta,p} \cap N, \tag{2}$$

где $L_p(w)$ — весовое L_p-пространство на $(0,\infty)$ с обычной нормой, а N — линейное пространство всех функций $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \;=\; 0. \tag{3}$$

При этом выяснилось, что выполнение равенства (2) тесно связано с возможностью "интерполяции" некоторых интегральных неравенств типа неравенства Харди. Там же была поставлена более общая задача: найти, при каких условиях на $w_0(x)$, $w_1(x)$, $p_0, p_1 \in [1,\infty)$, $\theta \in (0,1)$ и $q \in [1,\infty]$ имеет место равенство

$$(L_{p_0}(w_0) \cap N, L_{p_1}(w_1) \cap N)_{\theta,q} \;=\; (L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))_{\theta,q} \cap N \tag{4}$$

(здесь, вообще говоря, $p_0 \neq p_1$, а пространство N определяется по-прежнему соотношением (3)). Нетрудно видеть, что решение этой задачи, по существу, вытекает из результатов, полученных здесь. Не останавливаясь на этом подробно, сошлемся на работы [14, 17]. В последней из них предлагается иной подход к рассматриваемой здесь проблеме, основывающийся на ее сведении к частному случаю вложенных банаховых пар.

1. Определения, обозначения и формулировка основных результатов

Для нормированной пары (X_0, X_1) и $t > 0$ определим $\mathcal{K}$-функционал Петре:

$$\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1) = \inf_{x=x_0+x_1,\,x_i\in X_i}(\|x_0\|_{X_0} \;+\; t\|x_1\|_{X_1}),\;\; x \in X_0 + X_1.$$

Если $0 < \theta < 1$ и $1 \leqslant q < \infty$, то интерполяционное пространство вещественного метода $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, таких, что

$$\|x\|_{X_{\theta,q}} = \left\{\int_0^\infty (t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x:X_0,X_1))^q\,\frac{dt}{t}\right\}^{1/q} \;<\; \infty.$$

Анализ доказательства теоремы эквивалентности [1, § 3.3] показывает, что она справедлива не только для банаховых, но и для нормированных пар. Поэтому пространству $X_{\theta,q}$ можно дать и другое определение (с эквивалентной нормой), используя $\mathcal{J}$-функционал

$$\mathcal{J}(t,x;X_0,X_1) = \max(\|x\|_{X_0}, t\|x\|_{X_1}),\quad x \in X_0 \cap X_1,$$

а именно $X_{\theta,q}$ состоит из всех $x \in X_0 + X_1$, представимых в виде

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{\theta k} x_k \;\;(\text{сходимость в } X_0 + X_1),$$

с нормой

$$\inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\mathcal{J}(2^k,x_k;X_0,X_1))^q\right\}^{1/q}, \tag{5}$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям указанного вида.

Если $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1, а $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, то можно рассмотреть банахову пару сопряженных пространств (X_0^*, X_1^*) и $\psi \in X_0^* + X_1^*$ [1, § 3.7]. Важную роль в дальнейшем играет $\mathcal{K}$-функционал $k(t) = \mathcal{K}(t, \psi; X_0^*, X_1^*)$, а также функции

$$M(t) = \sup_{s>0} \frac{k(ts)}{k(s)}, \quad M_0(t) = \sup_{0<s\leqslant\min(1,1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)},$$

$$M_\infty(t) = \sup_{s\geqslant\max(1,1/t)} \frac{k(ts)}{k(s)}.$$

Они полумультипликативны при $t > 0$, и поэтому существуют числа

$$\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \alpha_0 = \lim_{t\to 0} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, \alpha_\infty = \lim_{t\to 0} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},$$

$$\beta = \lim_{t\to \infty} \frac{\log_2 M(t)}{\log_2 t}, \beta_0 = \lim_{t\to \infty} \frac{\log_2 M_0(t)}{\log_2 t}, \beta_\infty = \lim_{t\to \infty} \frac{\log_2 M_\infty(t)}{\log_2 t},$$

называемые индексами растяжения функции $k(t)$. Легко видеть, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 \leqslant \leqslant \beta_0 \leqslant \beta \leqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_\infty \leqslant \beta_\infty \leqslant \beta \leqslant 1$.

Предположим, что (X_0, X_1) — банахова пара такая, что $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1. Пусть $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $\psi \neq 0$, $N = \operatorname{Ker}\psi$ и N_i — пространство N, рассматриваемое с нормой из X_i $(i = 0, 1)$.

Теорема 1. *Нормы интерполяционных пространств $N_{\theta,q} = (N_0, N_1)_{\theta,q}$ и $X_{\theta,q} = = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ эквивалентны на N тогда и только тогда, когда*

$$\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta_0, \alpha_\infty) \cup (\beta, 1). \tag{6}$$

При этом, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_0, \alpha_\infty) \cup (\beta, 1)$, то $N_{\theta,q} = (N_0, N_1)_{\theta,q}$ всюду плотно в $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$; если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $N_{\theta,q}$ всюду плотно в некотором подпространстве коразмерности 1 пространства $X_{\theta,q}$.

Замечание 1. Под интервалом (α, β) всюду далее понимается, как обычно, множество всех вещественных x, удовлетворяющих неравенству $\alpha < x < \beta$. Поэтому ввиду неравенств $\alpha_0 \leqslant \beta_0$ и $\alpha_\infty \leqslant \beta_\infty$ непустым может быть, самое бо́льшее, лишь один из интервалов (β_0, α_∞) и (β_∞, α_0).

Альтернативную формулировку теоремы 1 можно дать, используя следующее определение из [15].

Пусть по-прежнему (X_0, X_1) — банахова пара, $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и в X_1, $\psi \in (X_0 \cap X_1)^*$, $N = \operatorname{Ker}\psi$. Для произвольных $0 < \theta < 1$ и $1 \leqslant q < \infty$ через $X_{\theta,q,\psi} = (X_0, X_1)_{\theta,q,\psi}$ мы обозначим множество всех $x \in X_0 + X_1$, допускающих представление в виде

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{\theta k} x_k, \quad x_k \in N \ \text{(сходимость в } X_0 + X_1), \tag{7}$$

с нормой (5), где нижняя грань берется по представлениям вида (7).

Теорема 2. *Для того чтобы пространство $X_{\theta,q,\psi}$ было замкнуто в пространстве $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$, необходимо и достаточно выполнение условия (6).*

При этом, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_0, \alpha_\infty) \cup (\beta, 1)$, то $X_{\theta,q,\psi} = X_{\theta,q}$; если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $X_{\theta,q,\psi} = X_{\theta,q} \cap \operatorname{Ker}\tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ — непрерывное продолжение функционала ψ на пространство $X_{\theta,q}$.

Теорема 2 является усилением предложения 5.6 из работы [15], где дополнительно предполагалось, что $\beta_\infty \leqslant \alpha_0$.

2. Доказательства теорем

Мы используем идею, состоящую в сведении сформулированной ранее задачи интерполяции пересечений к изучению оператора сдвига в некотором весовом l_q-пространстве последовательностей. Впервые она была применена С.А. Ивановым и Н. Калтоном для сравнения интерполяционных пространств $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ и $(N_0, X_1)_{\theta,q}$, где $\psi \in X_0^*$ и $N_0 = \operatorname{Ker}\psi$ [10]. Этот случай является частным по отношению к рассматриваемому здесь, и поэтому интерполяционные результаты [10] являются следствием теоремы 1 нашей работы (см. также [14, 15]).

Предполагая выполненными условия теоремы 1, введем некоторые обозначения. Если $\mu_n = (k(2^{-n}))^{-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$, то $\mu_n > 0$ и, так как $k(t)$ — возрастающая вогнутая на $(0, \infty)$ функция, то

$$\mu_n \leqslant \mu_{n+1} \leqslant 2\mu_n \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{8}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mu_k}{\mu_{n+k}}, \qquad & \beta &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log_2 \sup_{k\in\mathbb{Z}} \tfrac{\mu_k}{\mu_{k-n}},\\
\alpha_\infty &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k\leqslant 0} \frac{\mu_{k-n}}{\mu_k}, \qquad & \beta_\infty &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log_2 \sup_{k\leqslant 0} \tfrac{\mu_k}{\mu_{k-n}},\\
\alpha_0 &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \sup_{k\geqslant 0} \frac{\mu_k}{\mu_{n+k}}, \qquad & \beta_0 &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log_2 \sup_{k\geqslant 0} \tfrac{\mu_{k+n}}{\mu_k}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Пусть e_k $(k \in \mathbb{Z})$ — стандартные орты в пространстве числовых последовательностей, а $l_q(\mu)$ — пространство двусторонних числовых последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ с нормой

$$\|a\|_{q,\mu} = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^q \mu_k^q \right\}^{1/q}.$$

Далее нас будут интересовать оператор сдвига $S(a_k) = (a_{k-1})$, обратный к нему S^{-1}, а также операторы $T_\theta = S - 2^\theta I$ $(0 < \theta < 1)$, где I — тождественное отображение. Ввиду (8) S и S^{-1} ограничены в пространстве $l_q(\mu)$ и $\|S\| \leqslant 2$, $\|S^{-1}\| \leqslant 1$.

Как показывает доказательство теоремы 1 в [14] (см. также [15, теоремы 4.2 и 4.3]), теорема 1, а вместе с ней и теорема 2 будут доказаны, если получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $0 < \theta < 1$ и $1 \leqslant q < \infty$. Тогда оператор T_θ замкнут как оператор в $l_q(\mu)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (6).*

При этом, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_0, \alpha_\infty) \cup (\beta, 1)$, то образ $\operatorname{Im} T_\theta = l_q(\mu)$; если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $\operatorname{Im} T_\theta$ является замкнутым подпространством коразмерности 1 пространства $l_q(\mu)$, состоящим из всех $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_q(\mu)$ таких, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\theta} a_k = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие (6). Так как в случае $\beta_\infty \leqslant \alpha_0$ теорема 3 доказана в [14] (см. лемму 2 и замечание 1), то мы ограничимся рассмотрением случая, когда $\alpha_0 < \beta_\infty$. Кроме того, там же утверждение получено для $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$. Поэтому достаточно показать, что из условия

$$\beta_0 < \theta < \alpha_\infty \tag{11}$$

следует

$$\operatorname{Im} T_\theta = l_q(\mu). \tag{12}$$

Ввиду соображений двойственности [18, В. 3.9, предложение 2] соотношение (12) эквивалентно тому, что сопряженный оператор $V_\theta = S^{-1} - 2^\theta I$ будет инъекцией, т.е. изоморфизмом $l_{q'}(\mu^{-1})$ на $\mathrm{Im} V_\theta$, где $1/q' + 1/q = 1$.

Прежде всего, если $\alpha_0 < \theta < \beta_\infty$ (и тем более, если выполнено (11)), то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\theta q}\mu_k^q < \infty. \tag{13}$$

Действительно, из неравенства $\theta > \alpha_0$ и определения индекса α_0 следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\sup_{n\geqslant 0}\frac{\mu_n}{\mu_{k+n}} \geqslant c_1 2^{-k(\theta-\varepsilon)}, \qquad k = 1, 2, \ldots\ ,$$

откуда

$$\mu_k 2^{-\theta k} \leqslant \frac{\mu_0}{c_1} 2^{-\varepsilon k}, \qquad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Аналогично, так как $\theta < \beta_\infty$, то при достаточно малом $\eta > 0$

$$\mu_{-k} 2^{\theta k} \leqslant \frac{\mu_0}{c_2} 2^{-\eta k}, \qquad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Как легко видеть, соотношение (13) следует из последних двух неравенств.

Оператор V_θ инъективен. В самом деле, если $V_\theta a = 0$, то $a_n = 2^{\theta n} a_0$. Но из (13) следует, что последовательность $(2^{\theta n})_{n\in\mathbb{Z}} \notin l_{q'}(\mu^{-1})$, и, значит, $\mathrm{Ker}\, V_\theta = \{0\}$.

Далее, так как

$$V_\theta\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{(n-1-i)\theta} e_{-i}\right) = e_{-n} - 2^{\theta n} e_0, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

то $e_n - 2^{-\theta n} e_0 \in \mathrm{Im} V_\theta$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим линейный функционал $g_\theta \in l_{q'}(\mu^{-1})^* = l_q(\mu)$, который аннулируется на $\mathrm{Im} V_\theta$. Тогда $g_\theta(e_n) = c2^{-\theta n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ и, следовательно, g_θ порождается последовательностью $(c2^{-\theta n})_{n\in\mathbb{Z}}$. Ввиду (13) можно считать, что $c = 1$ и $\mathrm{Ker}\, g_\theta$ совпадает со множеством всех $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ таких, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\theta} a_k = 0. \tag{14}$$

Так как по теореме Хана–Банаха $\overline{\mathrm{Im} V_\theta} = \mathrm{Ker}\, g_\theta$, то остается доказать, что при условии (11)

$$\mathrm{Im} V_\theta = \mathrm{Ker}\, g_\theta. \tag{15}$$

Рассмотрим оператор $Wa = (Wa)_n$,

$$\text{где}\quad (Wa)_n = \begin{cases} -\sum_{i=n}^{\infty} 2^{(n-i-1)\theta} a_i\,, & n \geqslant 1, \\ \sum_{i=-\infty}^{n-1} 2^{(n-i-1)\theta} a_i\,, & n \leqslant 0. \end{cases}$$

Для доказательства того, что он ограниченно действует в пространстве $l_{q'}(\mu^{-1})$, нам понадобится следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *определим оператор* H_ε *следующим образом: если* $c = (c_i)_{i=1}^\infty$, *то*

$$H_\varepsilon c = \left(\sum_{j=1}^{i} c_{i+1-j} 2^{-j\varepsilon}\right)_{i=1}^{\infty}.$$

Тогда H_ε *ограничен в* l_p *для произвольного* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Доказательство. Ограниченность H_ε в l_∞ очевидна. Кроме того,

$$\|H_\varepsilon c\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}|c_{i+1-j}|2^{-j\varepsilon} = 2^{-\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}|c_k|2^{(k-i)\varepsilon} = \frac{1}{2^\varepsilon-1}\|c\|_1,$$

т.е. H_ε ограничен в l_1. Применяя интерполяционную теорему Рисса–Торина [1, теорема 1.1.1], получаем утверждение леммы.

Продолжим доказательство теоремы. Для любого $a \in l_{q'}(\mu^{-1})$

$$\|Wa\|_{l_{q'}(\mu^{-1})} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i=n}^{\infty}2^{(n-i-1)\theta}a_i\right|^{q'}\mu_n^{-q'}\right)^{1/q'} + \\ + \left(\sum_{n=0}^{-\infty}\left|\sum_{i=n-1}^{-\infty}2^{(n-i-1)\theta}a_i\right|^{q'}\mu_n^{-q'}\right)^{1/q'}. \tag{16}$$

Так как выполнено соотношение (11), мы можем взять $\varepsilon \in (0,1)$ так, что $\beta_0 < \theta-\varepsilon < \theta+\varepsilon < \alpha_\infty$. Тогда ввиду (9) для некоторого $C > 0$

$$\mu_n^{-1} \leqslant C2^{(i-n)(\theta-\varepsilon)}\mu_i^{-1}, \quad 1 \leqslant n \leqslant i \tag{17}$$

и

$$\mu_n^{-1} \leqslant C2^{(i-n)(\theta+\varepsilon)}\mu_i^{-1}, \quad i \leqslant n \leqslant 0. \tag{18}$$

Применяя сначала (17), для произвольного $c=(c_n)_{n=1}^{\infty}$, $\|c\|_q \leqslant 1$ и $c_n \geqslant 0$ $(n=1,2,..)$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sum_{i=n}^{\infty}2^{(n-i-1)\theta}|a_i|\mu_n^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty}2^{-(i+1)\theta}|a_i|\sum_{n=1}^{i}c_n2^{n\theta}\mu_n^{-1} \leqslant \\ \leqslant C\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\mu_i^{-1}\sum_{n=1}^{i}c_n2^{-(i-n)\varepsilon} \leqslant 2C\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\mu_i^{-1}\sum_{j=1}^{i}c_{i+1-j}2^{-j\varepsilon} = \\ = 2C\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\mu_i^{-1}(H_\varepsilon c)_i.$$

Тем самым, по лемме 1

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i=n}^{\infty}2^{(n-i-1)\theta}a_i\right|^{q'}\mu_n^{-q'}\right)^{1/q'} \leqslant 2C\|H_\varepsilon\|_{l_q\to l_q}\|a\|_{l_{q'}(\mu^{-1})}. \tag{19}$$

Аналогично ввиду (18) для таких же последовательностей $c=(c_n)_{n=0}^{\infty}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sum_{i=-n-1}^{-\infty}2^{-(n+i+1)\theta}|a_i|\mu_{-n}^{-1} = \sum_{i=-1}^{-\infty}2^{-(i+1)\theta}|a_i|\sum_{n=0}^{-i-1}c_n2^{-n\theta}\mu_{-n}^{-1} \leqslant \\ \leqslant C\sum_{i=-1}^{-\infty}|a_i|\mu_{i+1}^{-1}\sum_{n=0}^{-i-1}c_n2^{(i+1+n)\varepsilon} \leqslant C\sum_{i=-1}^{-\infty}|a_i|\mu_i^{-1}\sum_{j=0}^{-i-1}c_{-i-1-j}2^{-j\varepsilon} = \\ = C\sum_{i=-1}^{-\infty}|a_i|\mu_i^{-1}(H_\varepsilon c)_{-i-1}.$$

Отсюда опять по лемме 1

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{i=-n-1}^{-\infty}2^{-(n+i+1)\theta}a_i\right|^{q'}\mu_{-n}^{-q'}\right)^{1/q'} \leqslant C\|H_\varepsilon\|_{l_q\to l_q}\|a\|_{l_{q'}(\mu^{-1})}. \tag{20}$$

В итоге из (16), (19) и (20) следует, что оператор W ограниченно действует в пространстве $l_{q'}(\mu^{-1})$.

Покажем далее, что

$$V_\theta(Wa) = a, \quad \text{если} \quad a \in \operatorname{Ker} g_\theta. \tag{21}$$

Действительно, если $n \geqslant 1$, то

$$(V_\theta(Wa))_n = -\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{(n-i)\theta} a_i + 2^\theta \sum_{i=n}^{\infty} 2^{(n-i-1)\theta} a_i = a_n,$$

и точно так же для $n < 0$

$$(V_\theta(Wa))_n = -\sum_{i=n}^{-\infty} 2^{(n-i)\theta} a_i - 2^\theta \sum_{i=n-1}^{-\infty} 2^{(n-i-1)\theta} a_i = a_n.$$

Наконец, ввиду (14)

$$(V_\theta(Wa))_0 = (Wa)_1 - 2^\theta (Wa)_0 = -\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i\theta} a_i - 2^\theta \sum_{i=-1}^{-\infty} 2^{-(i+1)\theta} a_i =$$

$$= a_0 - \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-i\theta} a_i = a_0.$$

В итоге нужные нам соотношения (15) и (12) следуют из (21) и доказанной ранее ограниченности оператора W в пространстве $l_{q'}(\mu^{-1})$.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Так как оператор T_θ замкнут, то $\operatorname{Im} T_\theta$ может совпадать либо с $\operatorname{Ker} f_\theta$, где линейный функционал f_θ задается последовательностью $(2^{\theta n})_{n \in \mathbb{Z}}$, либо с $l_q(\mu)$ (см. доказательство леммы 2 в [14]). Если при этом оператор T_θ инъективен, то ввиду [14, лемма 2 и замечание 1] мы сразу заключаем, что $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta_\infty, \alpha_0) \cup (\beta, 1)$, и, кроме того, если $\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, 1)$, то $\operatorname{Im} T_\theta = l_q(\mu)$, а если $\theta \in (\beta_\infty, \alpha_0)$, то $\operatorname{Im} T_\theta$ является замкнутым подпространством коразмерности 1 пространства $l_q(\mu)$, состоящим из всех $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_q(\mu)$, удовлетворяющих соотношению (10).

Предположим теперь, что T_θ не инъективен. Тогда последовательность $(2^{-\theta n})_{n \in \mathbb{Z}} \in l_q(\mu)$, т. е. выполнено (13), и, значит, функционал f_θ неограничен. Поэтому $\operatorname{Im} T_\theta = l_q(\mu)$, и опять используя [18, B. 3.9, предложение 2], заключаем, что сопряженный оператор V_θ является изоморфизмом $l_{q'}(\mu^{-1})$ на $\operatorname{Ker} g_\theta$. Таким образом, для некоторого $c > 0$ и $r = q'$ мы имеем

$$\|V_\theta a\|_{l_r(\mu^{-1})} \geqslant c \|a\|_{l_r(\mu^{-1})}. \tag{22}$$

Предполагая, что $\theta > \alpha$, докажем неравенство:

$$\theta \geqslant \beta_0. \tag{23}$$

Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$nc^2 > 16, \tag{24}$$

где c — константа из (22).

Далее, для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим последовательность $a = (I + 2^{-\theta} S^{-1} + \ldots + 2^{-n\theta} S^{-n})^2 e_m$. Непосредственные вычисления показывают, что $a \geqslant n 2^{-n\theta} e_{m-n}$. Поэтому

$$\|a\|_{l_r(\mu^{-1})} \geqslant n 2^{-n\theta} \mu_{m-n}^{-1}. \tag{25}$$

Кроме того,

$$V_\theta^2(I+2^{-\theta}S^{-1}+\dots+2^{-n\theta}S^{-n})^2=[V_\theta(I+2^{-\theta}S^{-1}+...+2^{-n\theta}S^{-n})]^2=$$
$$=2^{2\theta}(2^{-(n+1)\theta}S^{-n-1}-I)^2=2^{2\theta}I-2^{1+(1-n)\theta}S^{-n-1}+2^{-2n\theta}S^{-2n-2},$$

и значит,

$$V_\theta^2 a=\ 2^{2\theta}e_m-2^{1+(1-n)\theta}e_{m-n-1}+2^{-2n\theta}e_{m-2n-2}.$$

Следовательно, ввиду (8)

$$\|V_\theta^2 a\|_{l_r(\mu^{-1})}\ =\ (2^{2r\theta}\mu_m^{-r}+2^{(1+\theta-n\theta)r}\mu_{m-n-1}^{-r}+2^{-2rn\theta}\mu_{m-2n-2}^{-r})^{1/r}\ \leqslant$$
$$\leqslant\ 4\mu_m^{-1}+8\cdot 2^{-n\theta}\mu_{m-n}^{-1}+4\cdot 2^{-2n\theta}\mu_{m-2n}^{-1}$$

(в случае $r=\infty$ промежуточное выражение соответствующим образом модифицируется). Отсюда, а также из (22) и (25) получаем неравенство

$$4\mu_m^{-1}+8\cdot 2^{-n\theta}\mu_{m-n}^{-1}+4\cdot 2^{-2n\theta}\mu_{m-2n}^{-1}\ \geqslant\ c^2n2^{-n\theta}\mu_{m-n}^{-1}$$

или с учетом (24)

$$2^{-n\theta}\mu_{m-n}^{-1}\ <\ \frac{1}{2}(\mu_m^{-1}\ +2^{-2n\theta}\mu_{m-2n}^{-1})\ \leqslant\ \max(\mu_m^{-1},2^{-2n\theta}\mu_{m-2n}^{-1}).$$

Тем самым, полагая $\nu_s=2^{\theta s}\mu_s^{-1}$ $(s\in\mathbb{Z})$, приходим к соотношению

$$\nu_{m-n}\ <\ \max(\nu_m,\nu_{m-2n}),\tag{26}$$

верному для всех $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих (24), и $m\in\mathbb{Z}$. Так как $\theta>\alpha$, то для зафиксированного $n\in\mathbb{N}$ существует $k\in\mathbb{Z}$ такое, что $\mu_{k-n}>2^{-n\theta}\mu_k$. Тогда $\nu_{k-n}<\nu_k$, и если в (26) взять $m=k+n$, то мы получим:

$$\nu_k\ <\ \max(\nu_{k+n},\nu_{k-n}),\tag{27}$$

откуда $\nu_k<\nu_{k+n}$. Аналогичным образом из (26) при $m=k+2n$ следует: $\nu_{k+n}<\nu_{k+2n}$ и т.д. Следовательно, последовательность $(\nu_{k+sn})_{s=0}^\infty$ монотонно возрастает.

Пусть $j\geqslant k$ и $m\geqslant n$. Найдем $0\leqslant s_1<s_2$ такие, что

$$k+s_1n\ \leqslant\ j\ \leqslant\ k+(s_1+1)n\ \text{ и }\ k+(s_2-1)n\ \leqslant\ j+m\ \leqslant\ k+s_2n.$$

Тогда ввиду (8)

$$\frac{\mu_{j+m}}{\mu_j}\ \leqslant\ \frac{\mu_{k+s_2n}}{\mu_{k+s_1n}}\ =\ \frac{2^{s_2n\theta}\nu_{k+s_2n}^{-1}}{2^{s_1n\theta}\nu_{k+s_1n}^{-1}}\ \leqslant\ 2^{n(s_2-s_1)\theta}.$$

Так как $m+2n\ \geqslant\ (s_2-s_1)n$, то получаем

$$\frac{\mu_{j+m}}{\mu_j}\ \leqslant\ 2^{(m+2n)\theta}\ \ (j\geqslant k\,,\,m\geqslant n),$$

откуда

$$\sup_{j\geqslant k}\frac{\mu_{j+m}}{\mu_j}\ \leqslant\ C2^{m\theta}\ \ (m\geqslant n).$$

Если $k>0$, то для $0\leqslant j\leqslant k$ ввиду (8)

$$\frac{\mu_{j+m}}{\mu_j}\ \leqslant\ \frac{\mu_{k+m}}{\mu_k}\frac{\mu_k}{\mu_j}\ \leqslant\ 2^k\frac{\mu_{k+m}}{\mu_k},$$

и значит,

$$\sup_{j\geqslant 0}\frac{\mu_{j+m}}{\mu_j}\ \leqslant\ C'2^{m\theta}\ \ (m\geqslant n).$$

В итоге, учитывая (9), получаем соотношение (23).

Аналогичным образом, предполагая, что $\theta < \beta$, докажем неравенство

$$\theta \leqslant \alpha_\infty. \tag{28}$$

Пусть опять $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет (24). Так как $\theta < \beta$, то существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mu_{n+k} > 2^{n\theta}\mu_k$ или $\nu_{n+k} < \nu_k$, где по-прежнему $\nu_s = 2^{\theta s}\mu_s^{-1}$ $(s \in \mathbb{Z})$. Тем самым ввиду (27) $\nu_k < \nu_{k-n}$ и применяя (26) рекуррентно, доказываем, что последовательность $(\nu_{k-sn})_{s=0}^{\infty}$ монотонно возрастает.

Если $j \geqslant -k$ и $m \geqslant n$, то существуют $0 \leqslant s_1 \leqslant s_2$ такие, что

$$k - s_1 n \leqslant -j \leqslant k - (s_1 - 1)n \text{ и } k - (s_2 + 1)n \leqslant -j - m \leqslant k - s_2 n.$$

Тогда

$$\frac{\mu_{-j}}{\mu_{-m-j}} \geqslant \frac{\mu_{k-s_1 n}}{\mu_{k-s_2 n}} = \frac{2^{-s_1 n\theta}\nu_{k-s_1 n}^{-1}}{2^{-s_2 n\theta}\nu_{k-s_2 n}^{-1}} \geqslant 2^{n(s_2-s_1)\theta}.$$

Так как $(s_2 - s_1)n \geqslant m - 2n$, то

$$\sup_{j\geqslant -k} \frac{\mu_{-j-m}}{\mu_{-j}} \leqslant C_1 2^{-m\theta} \quad (m \geqslant n),$$

откуда, как и ранее, легко получить, что

$$\sup_{j\geqslant 0} \frac{\mu_{-j-m}}{\mu_{-j}} \leqslant C_1' 2^{-m\theta} \quad (m \geqslant n).$$

Тем самым ввиду (9) получаем (28).

Таким образом, если оператор T_θ замкнут и не инъективен, то из условия $\theta \notin (0,\alpha] \cup [\beta, 1)$ следует: $\theta \in [\beta_0, \alpha_\infty]$. Поэтому, если $\theta \in (\alpha, \beta_0) \cup (\alpha_\infty, \beta)$, то T_θ не замкнут. В то же время при $\theta \in (0,\alpha)\cup(\beta, 1)$ он — фредгольмов с индексом 0 [14, лемма 2], а при $\theta \in (\beta_0, \alpha_\infty)$ — с индексом 1 (см. первую часть доказательства). Так как множество всех фредгольмовых операторов с фиксированным индексом открыто, то для значений θ, равных α, α_∞, β и β_0, оператор T_θ также не замкнут. Тем самым теорема 3 доказана.

Литература

[1] Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лефстрем. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

[2] Лионс, Ж.Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 420 с.

[3] Triebel, H. Eine Bemerkung zur nicht-kommutativen Interpolation / H. Triebel // Math. Nachr. – 1975. – V. 69. – P. 57–60.

[4] Maligranda, L. On commutativity of interpolation with intersection / L. Maligranda // Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1985. – V. 10. – P. 113–118.

[5] Wallsten, R. Remarks on interpolation of subspaces / R. Wallsten // Lect. Notes in Math. – 1988. – V. 1902. – P. 410–419.

[6] Pisier, G. Interpolation between H^p spaces and non-commutative generalizations 1 / G. Pisier // Pasific J. Math. – 1992. – V. 155. – P. 341–368.

[7] Janson, S. Interpolation of subcouples and quotient couples / S. Janson // Arkiv Math. – 1993. – V. 31. – P. 307–338.

[8] Кисляков, С.В. Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы / С.В. Кисляков, Шу Куанхуа // Алгебра и анализ. – 1996. – Т. 8. – №4. – С. 75–109.

[9] Löfström J. Interpolation of subspaces / J. Löfström // Technical report, Univ. of Göteborg. – 1997. – №10. – 63 p.

[10] Ivanov, S. Interpolation of subspaces and applications to exponential bases / S. Ivanov, N. Kalton // Алгебра и анализ. – 2001. – Т. 13. – №2. – С. 93–115.

[11] Astashkin, S.V. About interpolation of subspaces of rearrangement invariant spaces generated by Rademacher system / S.V. Astashkin // Journal of Math. and Math. Sci. – 2001. – V. 25. – №7. – P. 451–465.

[12] Kaijser, S., Sunehag P. Interpolation subspaces and the unit problem / S. Kaijser, P. Sunehag // In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics (Lund 2000), de Gruyter, Berlin. – 2002. – P. 345–353.

[13] Асташкин, С.В. Об интерполяции пересечений, порожденных линейным функционалом / С.В. Асташкин // Функц. анал. и его прилож. – 2005. – Т. 17. – №2. – С. 61–64.

[14] Асташкин, С.В. Об интерполяции пересечений вещественным методом / С.В. Асташкин // Алгебра и анализ. – 2005. – Т. 17. – №2. – С. 33–69.

[15] Sunehag, P. Subcouples of codimension one and interpolation of operators that almost agree / P. Sunehag // J. Approx. Theory. – 2004. – V. 130. – P. 78–98.

[16] Krugljak, N. The failure of Hardy's inequality and interpolation of intersections / N. Krugljak, L. Maligranda, L.-E. Persson // Arkiv Mat. – 1999. – V. 37. – P. 323–344.

[17] Astashkin, S.V. Real method of interpolation on subcouples of codimension one / S.V. Astashkin, P. Sunehag // Stud. Math. (to appear).

[18] Пич, А. Операторные идеалы / А. Пич. – М.: Мир, 1982. – 536 с.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2007;
в окончательном варианте — 19/*XII*/2007.

INTERPOLATION OF SUBSPACES OF CODIMENSION ONE

 S.V. Astashkin[2]

The necessary and sufficient conditions under which the real method of interpolation generates equivalent norms on an arbitrary Banach couple and a subcouple of intersections of these spaces with the kernel of a linear functional are found.

Paper received 18/*XI*/2007.
Paper accepted 19/*XII*/2007.

[2] Astashkin Sergey Vladimirovich (astashkn@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.